يحيي فيك الطموح ويمدك بالقدرة على تحقيقه ويحيي فيك سُبل الوصول إليه ، حاشاه تعالى أن يضيعك ..

المتجهات في المستوى الإحداثي

رياضيات ٦

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

فيما سبق:

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم. (الدرس 1-1)

الآن:

- أجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

المفردات:

الصورة الإحداثية
component form
متجه الوحدة
unit vector
متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors
توافق خطي
linear combination

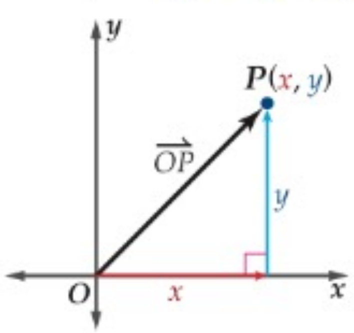
إعداد: شيخة المزروقي shikhah_math

لماذا؟

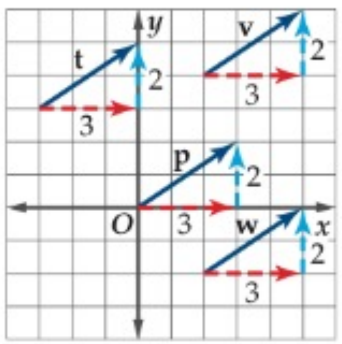
تؤثّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-1 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 1.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y\rangle$ ، حيث إن x , y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 1.2.1

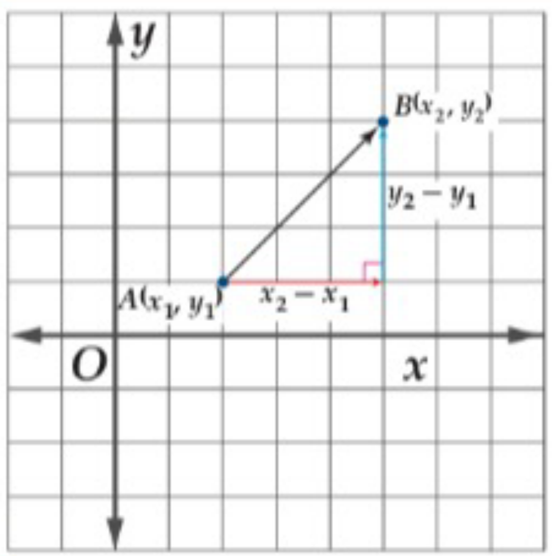


الشكل 1.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات **p, t, v, w** في الشكل 1.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2\rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسوم في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيي نقطتَي بدايته ونهايته.

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي: الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

مثال 1 التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7 \rangle$ بسّط

إعداد: شيخة المزروقي shikhah_math

تحقق من فهمك:

أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

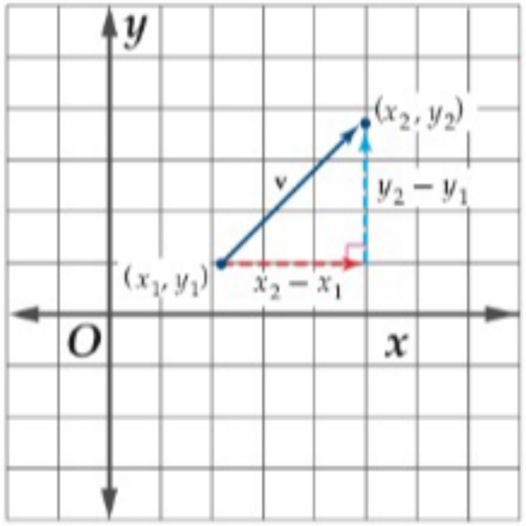
مفهوم أساسي — طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان **v** متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول **v** يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b\rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه **v** فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مثال 2 — إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)\ ,\ (x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98} \approx 9.9$ بسّط

التحقق علمت من المثال 1 أن: $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7\rangle$ ؛ وعليه فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

تحقق من فهمك:

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

(2A $A(-2, -7), B(6, 1)$

(2B $A(0, 8), B(-9, -3)$

قراءة الرياضيات

المعيار

يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي: العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

مثال 3 العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$ عوّض

$= \langle -4 + 2, 1 + 5 \rangle = \langle -2, 6 \rangle$ اجمع المتجهين

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$ أعد كتابة الطرح كعملية جمع

$= \langle -3, 0 \rangle + (-2)\langle 2, 5 \rangle$ عوّض

$= \langle -3, 0 \rangle + \langle -4, -10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$ اضرب متجهًا في عددٍ حقيقي، واجمع متجهين

تحقق من فهمك:

أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

3A) $4c + b$ 3B) $-3c$ 3C) $2c + 4a - b$

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًا

يمكن التحقق بيانيًا من إجابة مثال 3 الفرع a ، استعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع كما في الشكل أدناه .

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز **u**، ولإيجاد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه **v** على طوله |**v**| .

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = \mathbf{u}\,|\mathbf{v}|$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ **v** في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه **v** في عددٍ حقيقيٍّ.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطًى

أوجد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$ متجه وحدة باتجاه **v**

$$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle$$ عوِّض

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$$ $|\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$$ بسِّط

$$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$ اضرب متجه في عدد حقيقي

$$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$ أنطق المقام

التحقق بما أن **u** تمثل حاصل ضرب **v** في عدد موجب فإن له اتجاه **v** نفسه. تحقَّق من أن طول **u** هو 1 .

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}}$$ بسِّط

$$= \sqrt{1} = 1 \checkmark$$ بسِّط

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

تحقق من فهمك:

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

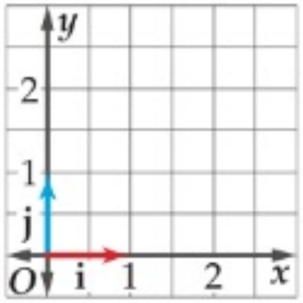
(4A $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

(4B $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

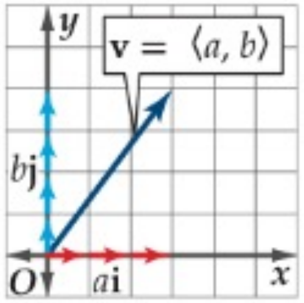
إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.3



الشكل 1.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4 ؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$	أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين
$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$	$\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$, $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$

تنبيه!

متجه الوحدة i

لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخط داكن غير مائل $\mathbf{i}$ ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخط غير داكن مائل i .

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 5 كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$، ونقطة نهايته $E(4, 5)$، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$ الصورة الإحداثية

$$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$$ $(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (4, 5)$

$$= \langle 6, 2 \rangle$$ بسّط

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$$ الصورة الإحداثية

$$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$ $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

تحقق من فهمك:

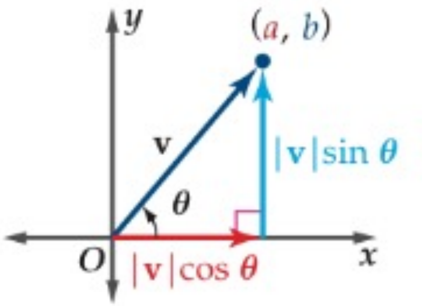
اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

(5A $D(-6, 0), E(2, 5)$

(5B $D(-3, -8), E(7, 1)$

إعداد: شيخة المزروقي shikhah_math

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 1.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل 1.2.5

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$	عوّض
$= \lvert\mathbf{v}\rvert (\cos\theta)\mathbf{i} + \lvert\mathbf{v}\rvert (\sin\theta)\mathbf{j}$	توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

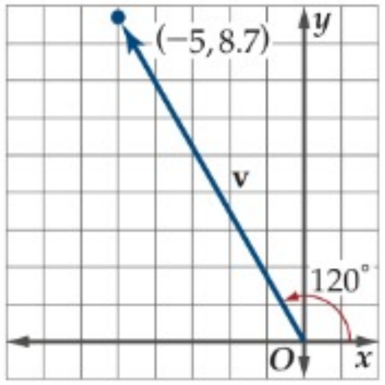
مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$	الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة $\lvert\mathbf{v}\rvert, \theta$
$= \langle 10\cos 120°, 10\sin 120° \rangle$	$\lvert\mathbf{v}\rvert = 10 , \theta = 120°$
$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$	$\cos 120° = -\frac{1}{2}, \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$	بسّط

التحقق مثِّل بيانيًّا: $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$ ، تجد أن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x هي $120°$ كما في الشكل المجاور،

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10 \checkmark$$



تحقق من فهمك

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

تحقق من فهمك:

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممّا يأتي :

(6A $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

(6B $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

من الشكل (1.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

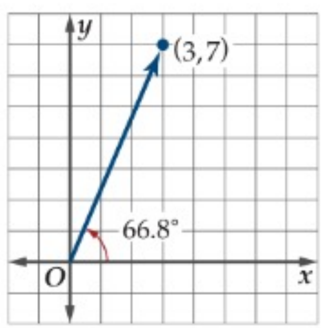
$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3, b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$ ، $y = 7$،
فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

$\theta \approx 66.8°$ استعمل الآلة الحاسبة

أي أن زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل 1.2.6 .



الشكل 1.2.6

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

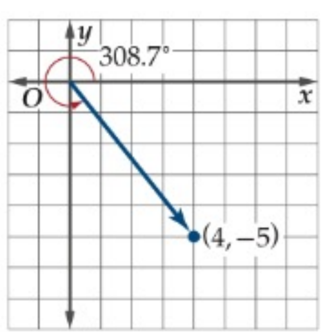
$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4, b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $y = -5 < 0$ ، $x = 4 > 0$،
فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

$\theta \approx -51.3°$ استعمل الآلة الحاسبة

بما أن $\mathbf{r}$ يقع في الربع الرابع، كما في الشكل 1.2.7 ، فإن: $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$



الشكل 1.2.7

إعداد: شيخة المزروقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

تحقق من فهمك:

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

7B) $\langle -3, -8 \rangle$

تنبيه!

لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:

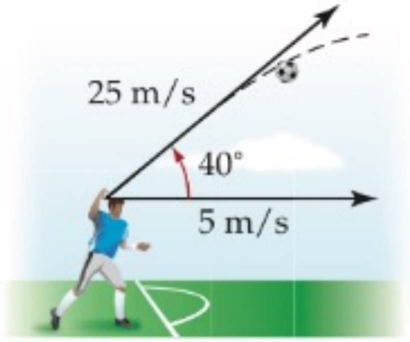
$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$

فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبةً فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبةً، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 8 من واقع الحياة — تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية °40 مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



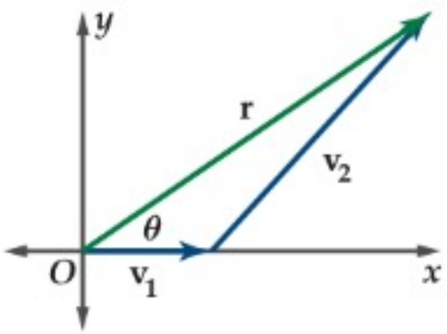
بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0\rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

$$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2| \cos\theta, |\mathbf{v}_2| \sin\theta \rangle$$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}_2$

$$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40° \rangle$$ $|\mathbf{v}_2| = 25 , \theta = 40°$

$$\approx \langle 19.2, 16.1 \rangle$$ بسّط

اجمع المتجهين $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.



$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$ متجه المحصلة

$$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle$$ عوّض

$$= \langle 24.2, 16.1\rangle$$ اجمع

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$$ $\tan\theta = \frac{b}{a}$ ، حيث $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$$ حُل بالنسبة إلى θ

أي أن محصلة سرعة الكرة هي 29.1 m/s تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها °33.6 مع الأفقي تقريبًا.

تحقق من فهمك:

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7\,m/s$

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

تدرب وحل المسائل:

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي

45) **تحدّ:** إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y\rangle$ هي $(4y)^\circ$ ، فأوجد قيمة x بدلالة y .