# الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

## فيما سبق

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى

## والآن

١|أجد الضرب الداخلي لمتجهين والزاوية بينهما في الفضاء

٢|أجد الضرب الاتجاهي للمتجهات وأستعمله في ايجاد المساحة والحجوم

## لماذا؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطًّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

**الضرب الداخلي في الفضاء** إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

math بسمة

# مثال ١

## إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامده

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.

# تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

(1A $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

(1B $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

## تدرب

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$

## الزاوية بين متجهين في الفضاء

## مثال 2

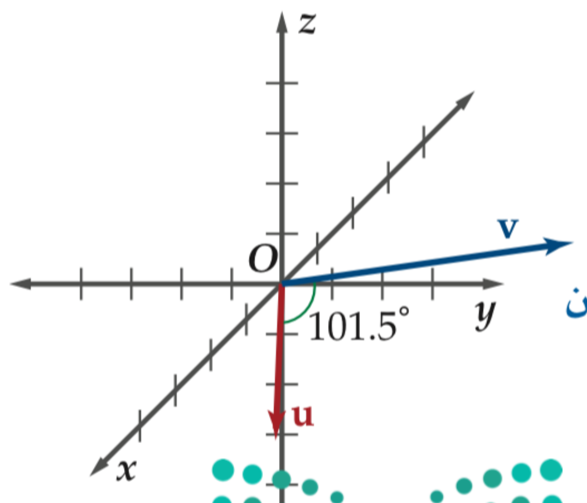
أوجد قياس الزاوية θ بين **u, v** ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \dfrac{\langle 3, 2, -1\rangle \cdot \langle -4, 3, -2\rangle}{|\langle 3, 2, -1\rangle|\,|\langle -4, 3, -2\rangle|}$ $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$

$\cos\theta = \dfrac{-4}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}$ أوجد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$ بسّط وحُل بالنسبة إلى $\theta$




أي أن قياس الزاوية بين **u, v** هو °101.5 تقريبًا.

## تحقق من فهمك

**2)** أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ , $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشرية.

# تدرب

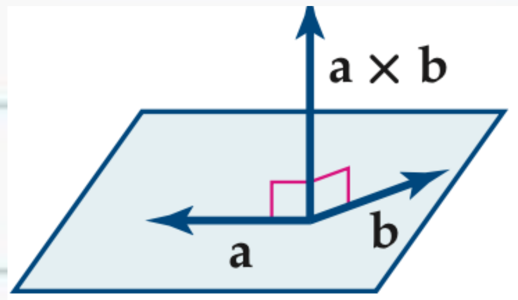
أوجد قياس الزاوية $\theta$ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ: ( مثال 2 )

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$

# مقطع توضيحي

**الضرب الاتجاهي** هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ $\mathbf{a}$ cross $\mathbf{b}$ ، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ .




## مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

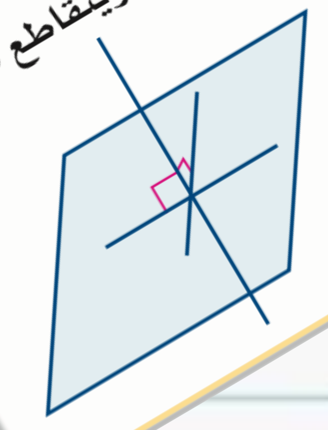
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{بوضع متجهات الوحدة } \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ في الصف 1} \\ \longleftarrow \text{بوضع إحداثيات } \mathbf{a} \text{ في الصف 2} \\ \longleftarrow \text{بوضع إحداثيات } \mathbf{b} \text{ في الصف 3} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\mathbf{i} - (a_1\, b_3 - a_3\, b_1)\mathbf{j} + (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\mathbf{k}$$

### إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًا على مستوى، إذا كان عموديًا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.



# إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

## مثال 3

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle , \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} , \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

قاعدة إيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

أوجد قيمة محدّدة الدرجة الثانية

$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$

بسّط

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

الصورة الإحداثية

$$= \langle -5, -6, 3\rangle$$

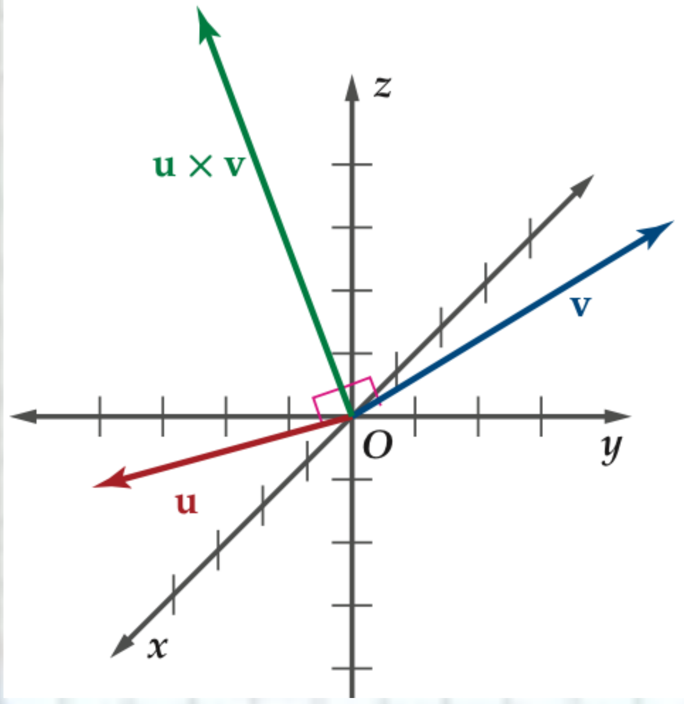
ولإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$

$$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle 3, -2, 1\rangle$$
$$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$$
$$= -15 + 12 + 3 = 0 \checkmark$$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

$$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle -3, 3, 1\rangle$$
$$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$$
$$= 15 + (-18) + 3 = 0 \checkmark$$




بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{v}, \mathbf{u}$.

**تنبيه!**

**الضرب الاتجاهي**

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

## تحقق من فهمك

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3A) $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

# تدرب

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ : ( مثال 3 )

(12 $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3 \rangle$

(13 $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1 \rangle$

## مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

## مثال 4

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

**الخطوة 1** أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدِّدة الدرجة الثالثة

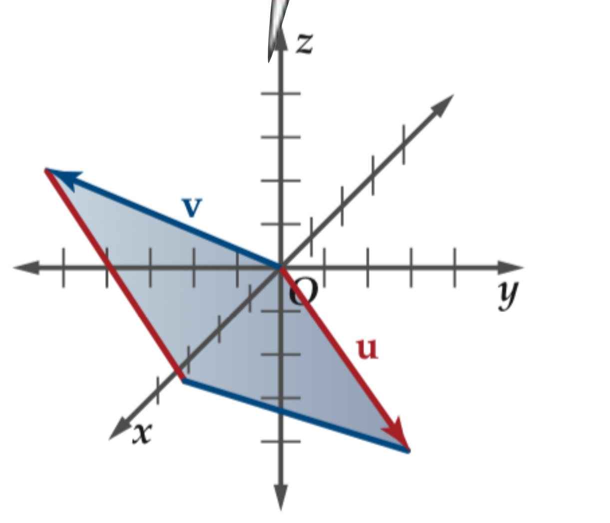
$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدِّدة الدرجة الثانية

**الخطوة 2** أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ طول متجه في الفضاء

$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$ بسّط

أي أن مساحة متوازي الأضلاع في الشكل **1.5.1** ، تساوي 16.91 وحدةً مربعةً تقريبًا.



الشكل 1.5.1

# تحقق من فهمك

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

# تدرب

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}$ , $\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4)

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2 \rangle$ , $\mathbf{v} = \langle 6, -5, 3 \rangle$

17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1 \rangle$ , $\mathbf{v} = \langle 7, 2, -2 \rangle$

**الضرب القياسي الثلاثي** إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة **لمتوازي سطوح**، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 1.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة **للضرب القياسي الثلاثي** لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.

### مفهوم أساسي — الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $t = t_1 i + t_2 j + t_3 k,\ u = u_1 i + u_2 j + u_3 k,\ v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $t, u, v$ يُعرف كالآتي

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

# حجم متوازي السطوح

## مثال 5

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k},\ \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

$\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

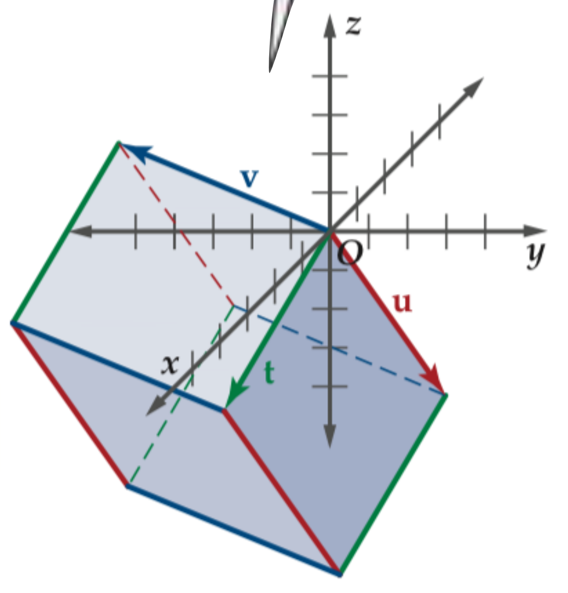
أوجد قيمة محدّدة المصفوفة من الرتبة 3 × 3

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$

بسّط

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل 1.5.2 هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$، ويساوي 34 وحدةً مكعبة.




الشكل 1.5.2

## تحقق من فهمك

**5)** أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ , $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ , $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

# تدرب

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 5)

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$

21) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$

# تدرب

43) **تحدٍّ:** إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$ , $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$ ، فأوجد قيمة $c$ التي تجعل: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ .

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟

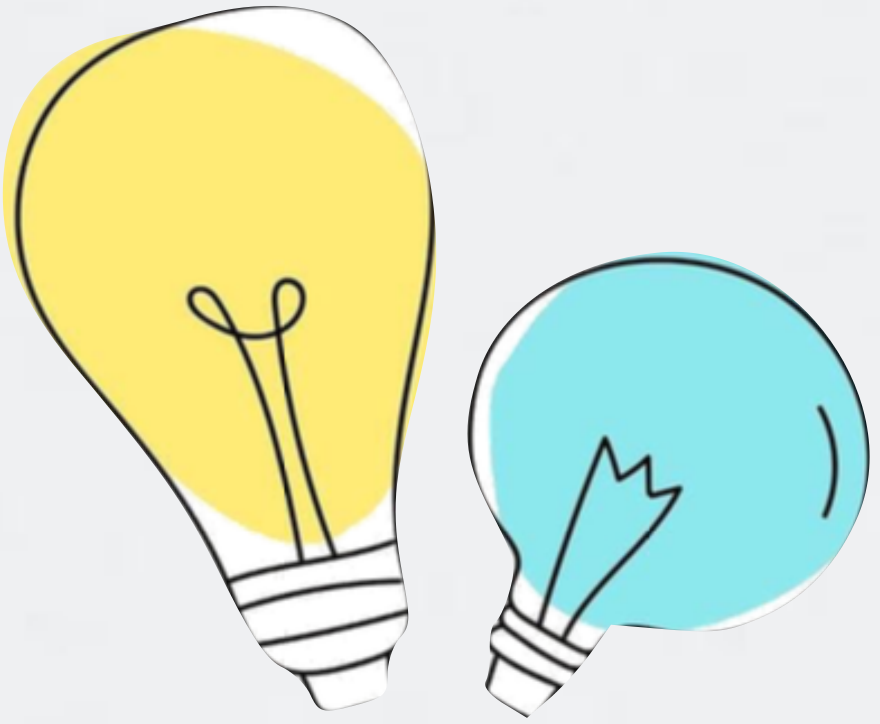
**A** $\langle 1, 0, 0 \rangle$ , $\langle 1, 2, 3 \rangle$

**B** $\langle 1, -2, 3 \rangle$ , $\langle 2, -4, 6 \rangle$

**C** $\langle 3, 4, 6 \rangle$ , $\langle 6, 4, 3 \rangle$

**D** $\langle 3, -5, 4 \rangle$ , $\langle 6, 2, -2 \rangle$

# مسابقات



Wordwall

1 المتجهات

# مقطع توضيحي

math بسمه

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

# نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

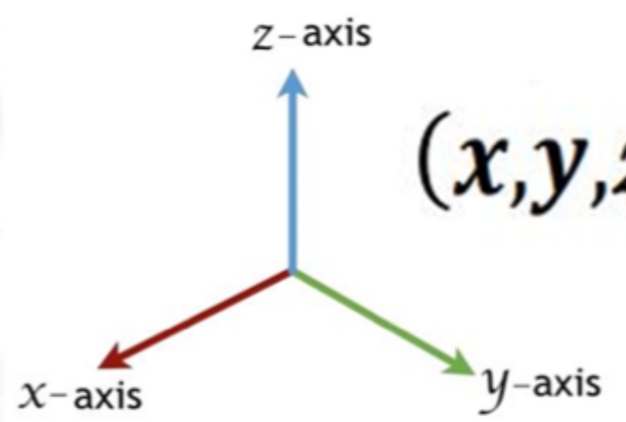
**الضرب الاتجاهي**

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

متجه عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين

**الثلاثي المرتب**

شكل كتابة النقطة في الفضاء




$(x,y,z)$

**الضرب القياسي الثلاثي**

$$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

# الواجب المنزلي