المعادلات التربيعية :

$$س^{٢} + ب س + جـ = ٠$$

فيما سبق

درست ضرب ثنائيات الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب .

الآن

١) أحلل ثلاثية حدود على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$.

٢) أحل المعادلات على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

المفردات

المعادلة التربيعية

جدول التعلم

ماذا أعرف ؟	ماذا أريد أن أعرف ؟	ماذا تعلمت ؟

لماذا

بركة سباحة سطحها مستطيل الشكل، يُراد وضع سياج حولها طوله ٢٤ م. إذا كانت مساحة سطح البركة ٣٦ م^{٢}، فما بعداها؟

لحل هذه المسألة يجب إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦ وَمجموعهما يساوي ١٢ (نصف محيط البركة).

تحليل س^{٢} + ب س + جـ: تعلمت كيف تضرب ثنائيتي حدّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، على أن تكون كل ثنائية حد منهما عاملاً لناتج الضرب. ويمكن استعمال نمط ضرب ثنائيتي الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود.

لماذا

$(س + ٣)(س + ٤) = س^{٢} + ٤س + ٣س + ٣ \times ٤$ طريقة التوزيع بالترتيب

$= س^{٢} + (٤ + ٣)س + ٣ \times ٤$ خاصية التوزيع

$= س^{٢} + ٧س + ١٢$ بسّط.

لاحظ أن معامل الحدّ الأوسط ٧ هو مجموع العددين ٣ و٤، والحد الأخير ١٢ هو ناتج ضربهما.

لاحظ القاعدة الآتية في الضرب:

$(س + ٣)(س + ٤) = س^{٢} + (٤ + ٣)س + (٣ \times ٤)$

$(س + م)(س + ن) = س^{٢} + (ن + م)س + م ن$ لتكن ٣ = م، ٤ = ن

$= س^{٢} + (م + ن)س + م ن$ الإبدال (+)

$س^{٢} + ب س + جـ$ ب = م + ن، جـ = م ن

لاحظ أن معامل الحد الأوسط هو مجموع م وَ ن، والحدّ الأخير هو ناتج ضربهما.

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$.

مفهوم أساسي

تحليل $س^{٢} + ب س + جـ$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$ ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب، وناتج ضربهما جـ ، ثم اكتب $س^{٢} + ب س + جـ$ على الصورة (س+ م) (س+ ن).

الرموز: $س^{٢} + ب س + جـ = (س + م) (س + ن)$ ، حيث م + ن = ب، م ن = جـ

مثال: $س^{٢} + ٦ س + ٨ = (س + ٢) (س + ٤)$. لأن ٢ + ٤ = ٦، ٢ × ٤ = ٨

يكون لعاملي جـ الإشارة نفسها عندما تكون موجبة. ويعتمد كون العاملين موجبين أو سالبين على إشارة ب. فإذا كانت ب موجبة فالعاملان موجبان، وإذا كانت سالبة فالعاملان سالبان.

تحليل $س^{٢} + ب س + جـ$ عندما يكون ب ، جـ موجبين

مثال ١

حلّل : $س^{٢} + ٩س + ٢٠$.

بما أن جـ ، ب موجبان في ثلاثية الحدود، ب = ٩، جـ = ٢٠. لذا يجب إيجاد عاملين موجبين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠. كوّن قائمة عوامل العدد ٢٠، و أوجد العاملين اللذين مجموعهما ٩.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
١، ٢٠	٢١
٢، ١٠	١٢
٤، ٥	٩

العاملان الصحيحان هما ٤، ٥

$س^{٢} + ٩س + ٢٠ = (س + م)(س + ن)$ اكتب القاعدة

$= (س + ٤)(س + ٥)$ م = ٤، ن = ٥

تحقق: يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين لتحصل على العبارة الأصلية.

$(س + ٤)(س + ٥) = س^{٢} + ٥س + ٤س + ٢٠$ طريقة التوزيع بالترتيب

$= س^{٢} + ٩س + ٢٠$ ✓ بسّط.

إرشادات لحل المسألة

خمّن وتحقّق

عند تحليل ثلاثية حدود، اعمل تخمينًا مدروسًا، وتحقق من المعقولية، ثم عدّل التخمين حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

أ١) $د^{٢} + ١١د + ٢٤$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ب١) $٩ + ١٠ن + ن^{٢}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما تكون ب سالبة ، جـ موجبة

مثال ٣

إرشادات للدراسة

إيجاد العوامل

عندما تجد العوامل الصحيحة فليس هناك ضرورة لاختبار العوامل الأخرى. فمثلاً، العاملان الصحيحان في المثال٢ هما: −٢ وَ −٦، لذا فلا داعي لاختبار العاملين: −٣ وَ −٤

حلّل: س^{٢} − ٨س + ١٢

بما أن جـ موجبة، و ب سالبة في ثلاثية الحدود ، ب= −٨، جـ = ١٢ لذا يجب إيجاد عاملين سالبين مجموعها −٨ وحاصل ضربهما ١٢

عوامل العدد ١٢	مجموع العاملين
−١، −١٢	−١٣
−٢، −٦	−٨
−٣، −٤	−٧

العاملان الصحيحان هما −٢، −٦

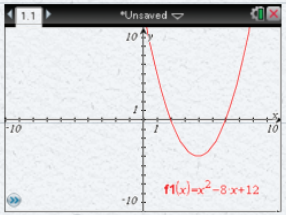
س^{٢} − ٨س + ١٢ = (س + م)(س + ن)

= (س − ٢)(س − ٦)

اكتب القاعدة

م = −٢، ن = −٦

تحقق: مثّل المعادلتين: ص= س^{٢} − ٨س + ١٢، ص= (س−٢) (س− ٦) بيانيًّا على الشاشة نفسها. بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُللت بصورة صحيحة. ✓



تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

٢أ) $٢١ - ٢٢م + م^{٢}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢ب) $و^{٢} - ١١و + ٢٨$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما تكون جـ سالبة

مثال ٣

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

أ) س^{٢} + ٢س − ١٥

في ثلاثية الحدود هذه ب = ٢، جـ = −١٥ وبما أن جـ سالبة. فإن م وَ ن عددان مختلفان في الإشارة.
وبما أن ب موجبة، فالعامل الذي قيمته المطلقة أكبر يكون موجبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل العدد −١٥، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما ٢.

عوامل العدد −١٥	مجموع العاملين
−١، ١٥	١٤
−٣، ٥	٢

العاملان الصحيحان هما −٣، ٥

س^{٢} + ٢س − ١٥ = (س + م)(س + ن)

اكتب القاعدة

= (س − ٣)(س + ٥)

م = −٣، ن = ٥

تحقق: (س − ٣) (س + ٥) = س^{٢} + ٥س − ٣س − ١٥

طريقة التوزيع بالترتيب

= س^{٢} + ٢س − ١٥ ✓

بسّط

مراجعة المفردات

القيمة المطلقة

تمثل القيمة المطلقة للعدد ن المسافة بين العدد والصفر على خط الأعداد. وتُكتب على الصورة | ن |.

تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما تكون جـ سالبة

مثال ٣

ب) س^{٢} − ٧س − ١٨

في ثلاثية الحدود هذه ب = −٧، جـ = −١٨ . ، إذن م أو ن سالبة، وليس كلاهما. وبما أن ب سالبة، فالعامل ذو القيمة المطلقة الكبرى يكون سالبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل −١٨، على أن يكون أحد العاملين في كلّ زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما −٧.

عوامل العدد −١٨	مجموع العاملين
١، −١٨	−١٧
٢، −٩	−٧
−٦، +٣	−٣

العاملان الصحيحان هما ٢، −٩

س^{٢} − ٧س − ١٨ = (س + م)(س + ن)

= (س + ٢)(س − ٩)

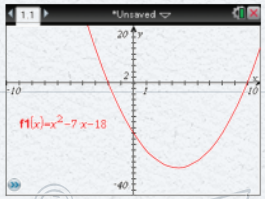
اكتب القاعدة

م = ٢، ن = −٩

تحقق: مثّل المعادلتين ص = س^{٢} − ٧س − ١٨ ،

ص = (س + ٢) (س − ٩) بيانيًّا على الشاشة نفسها،

بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُلّلت بصورة صحيحة. ✓



مراجعة المفردات

القيمة المطلقة

تمثل القيمة المطلقة للعدد ن المسافة بين العدد والصفر على خط الأعداد. وتُكتب على الصورة | ن |.

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

٣أ) $ص^{٢} + ١٣ص - ٤٨$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٣ب) $ر^{٢} - ٢ر - ٢٤$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكن كتابة **المعادلات التربيعية** على الصورة القياسية:

$أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ويمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري

حل المعادلة بالتحليل

مثال ٤

حل المعادلة: $س^{٢} + ٦س = ٢٧$، وتحقَّق من صحة الحل.

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} + ٦س - ٢٧ = ٠$	اطرح ٢٧ من كلا الطرفين
$(س - ٣)(س + ٩) = ٠$	حلِّل إلى العوامل
$س - ٣ = ٠$ أو $س + ٩ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$س = ٣$ $\quad$ $س = -٩$	حل كل معادلة

تحقق: عوّض عن س بكل من ٣، -٩ في المعادلة الأصلية.

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$

$(٣)^{٢} + ٦(٣) \stackrel{؟}{=} ٢٧$

$٩ + ١٨ = ٢٧$ ✓

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$

$(-٩)^{٢} + ٦(-٩) \stackrel{؟}{=} ٢٧$

$٨١ - ٥٤ = ٢٧$ ✓

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤أ) $ع^{٢} - ٣ع = ٧٠$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٤ب) $س^{٢} + ٣س - ١٨ = ٠$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حل المسألة بالتحليل

مثال ٥
من واقع الحياة

تصميم: يصمّم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة عن عرضها بِـ ٢ بوصة. وَمساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربّعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطّط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض× الطول

حلّ: بما أن ض = عرض اللوحة، فيكون طول اللوحة = ض+ ٢ + ٤ = ض+ ٦

ض (ض+ ٦) = ٦١٦	اكتب المعادلة
ض^{٢}+ ٦ض= ٦١٦	اضرب
ض^{٢}+ ٦ض – ٦١٦= ٠	اطرح ٦١٦ من كل طرف
(ض + ٢٨) (ض – ٢٢) = ٠	حلل
ض + ٢٨ = ٠ أو ض – ٢٢ = ٠	خاصية الضّرب الصفري
ض = –٢٨ ض = ٢٢	حل كل معادلة

بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة.

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المساحة = ٢٢(٢٢ + ٦) = ٦١٦ بوصة مربعة، وهي مساحة اللوحة. ✓

تحقق من فهمك

٥) **هندسة:** متوازي أضلاع ارتفاعه أقل من قاعدته بِـ ١٨ سم، ومساحته ١٧٥ سم^{٢}. فما ارتفاعه؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تأكد

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١) $س^{٢} + ١٤س + ٢٤$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢) $ص^{٢} - ٧ص - ٣٠$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٣) $ن^{٢} + ٤ن - ٢١$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تأكد

مثال ٤ حُلَّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٥) $س^{٢} - ٤س - ٢١ = ٠$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٦) $ن^{٢} - ٣ن + ٢ = ٠$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٨) $س^{٢} + ١٢س = -٣٢$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تأكد

مثال ٥ ١١) **إطار صورة:** اشترت لطيفة إطارًا لصورة، إلا أن الصورة كانت أكبر من الإطار، لذا فإنها بحاجة إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه، على أن تصبح مساحتها نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بُعدا الصورة الأصلية ١٢، ١٦ سم. فما بُعدا الصورة المصغَّرة؟

.....

.....

.....

.....

.....

مهارات التفكير العليا

٣٢) **اكتشف الخطأ:** حلّل كلٌّ من خليل وماجد العبارة: $س^{٢}+٦س-١٦$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

ماجد

$س^{٢}+٦س-١٦=(س+٢)(س-٨)$

خليل

$س^{٢}+٦س-١٦=(س-٢)(س+٨)$

الواجب
بمنصة مدرستي

تصميم
أ. عثمان الربيعي
@uthman20191

موقع رفعة التعليمية