..التهيئة للفصل الأول ص 9..

اختبار سريع

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّي نقطةِ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي
(Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي
(Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

إذا كان $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ فإن إحداثيَّي نقطةِ منتصف $\overline{AB}$:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

(1 $(1, 4), (-2, 4)$

المسافة $= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0} = 3$

نقطة المنتصف $M = \left(\frac{1 + (-2)}{2}, \frac{4 + 4}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, 4\right)$

(2 $(-5, 3), (-5, 8)$

المسافة $= \sqrt{(-5 - (-5))^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{0 + 5^2} = 5$

نقطة المنتصف $M = \left(\frac{(-5) + (-5)}{2}, \frac{3 + 8}{2}\right) = \left(-5, \frac{11}{2}\right)$

(3 $(2, -9), (-3, -7)$

المسافة $= \sqrt{(-3 - 2)^2 + ((-7) - (-9))^2} = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

نقطة المنتصف $M = \left(\frac{2 + (-3)}{2}, \frac{(-9) + (-7)}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, -8\right)$

(4 $(-4, -1), (-6, -8)$

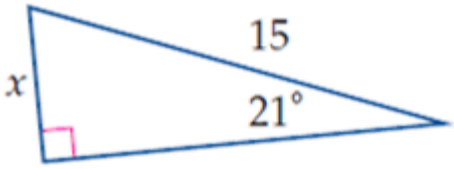
المسافة $= \sqrt{(-6 + (+4))^2 + (-8 + (+1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$

نقطة المنتصف $M = \left(\frac{(-4) + (-6)}{2}, \frac{(-1) + (-8)}{2}\right) = \left(-5, \frac{-9}{2}\right)$

د. إيمان التركي

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر.

(5

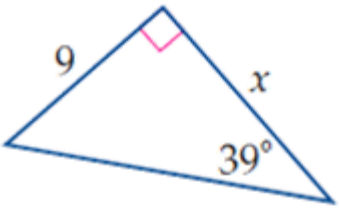


$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 21° = \frac{x}{15}$$

$$x = 15 \sin 21° \approx 5.4$$

(6

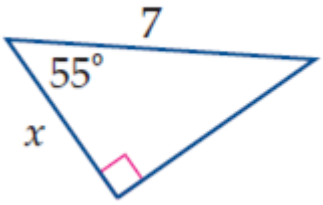


$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 39° = \frac{9}{x}$$

$$x = \frac{9}{\tan 39°} \approx 11.1$$

(7

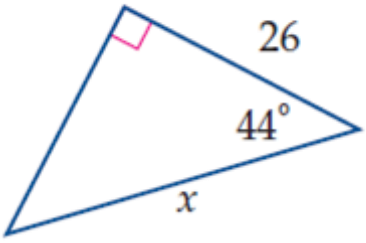


$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos 55° = \frac{x}{7}$$

$$x = 7 \cos 55° \approx 4$$

(8



$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

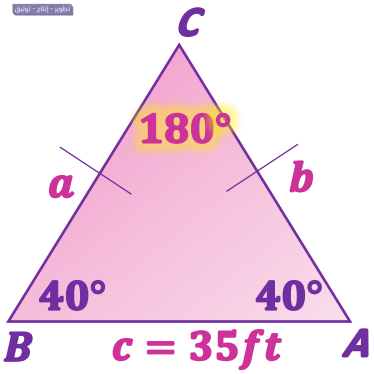
$$\cos 44° = \frac{26}{x}$$

$$x = \frac{26}{\cos 44°} \approx 36.1$$

رب اشرح لي صدري
ويسر لي أمري واغفر لي ذنبي

د. إيمان التركي

9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft ، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض 40° ، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة.



$$c = 180° - (40° + 40°) = 100°$$

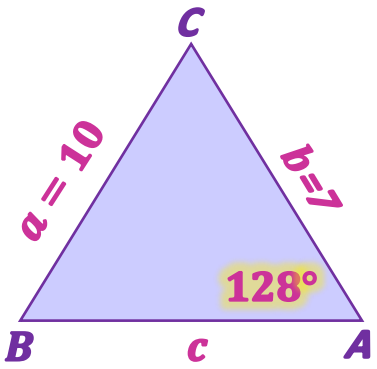
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 100°}{35} = \frac{\sin 40°}{b}$$

$$b = \frac{35 \sin 40°}{\sin 100°} \approx 22.8ft = a$$

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب " لا يوجد حَلّ " مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 128°}{10} = \frac{\sin B°}{7}$$

$$\sin B° = \frac{7 \sin 128°}{10} \approx 0.55ft$$

$$\sin B° \approx 0.55ft$$

$$B° = \sin^{-1} 0.55 \approx 33°$$

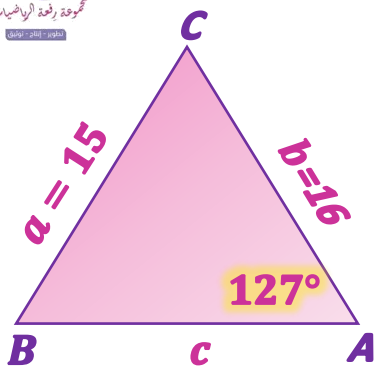
$$C = 180° - (128° + 33°) = 180° - 161° = 19°$$

$$\frac{\sin 128°}{10} = \frac{\sin 19°}{c}$$

$$c = \frac{10 \sin 19°}{\sin 128°} \approx 4$$

د. إيمان التركي

$a = 15, b = 16, A = 127°$ **(11**



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 127°}{15} = \frac{\sin B°}{16}$$

$$\sin B° = \frac{16 \sin 127°}{15} \approx 0.85ft$$

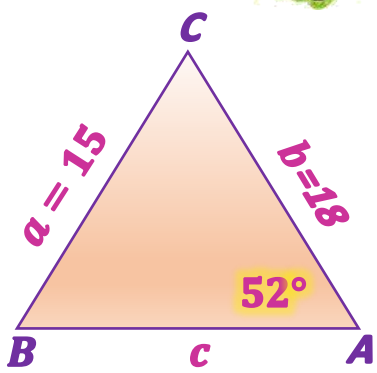
$$\sin B° \approx 0.85ft$$

$$B° = \sin^{-1} 0.85 \approx 58°$$

$$c = 180° - (127° + 58°) = 180° - 185°$$

لا يوجد حل

$a = 15, b = 18, A = 52°$ **(12**



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 52°}{15} = \frac{\sin B°}{18}$$

$$\sin B° = \frac{18 \sin 52°}{15} \approx 0.95ft$$

$$\sin B° \approx 0.95ft$$

$$B° = \sin^{-1} 0.95 \approx 71°$$

$$C = 180° - (52° + 71°) = 180° - 123° = 57°$$

$$\frac{\sin 52°}{15} = \frac{\sin 57°}{c}$$

$$c = \frac{15 \sin 57°}{\sin 52°} \approx 16$$

{ النجاح

أسطورة مدفونة في داخلك

فصدق وجودها وقم بالبحث عنها }

د. إيمان التركي

1-1 تصويب واجب مقدمة في المتجهات ص 15

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

1) طول محمد 125 cm . كمية قياسية

2) مساحة مربع $20\ m^2$. كمية قياسية

3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب. كمية متجهة

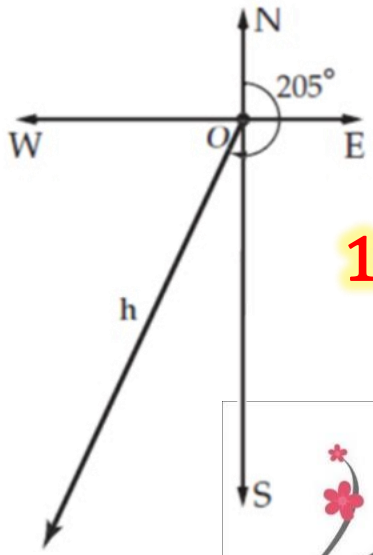
4) المسافة التي قطعتها كرة قدم 5 m . كمية قياسية

5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل. كمية متجهة

6) رمي حجر رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 50 ft/s . كمية متجهة

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة.

7) $\mathbf{h} = 13\ in/s$ ، باتجاه $205°$



مقياس الرسم: 1cm: 1 in/s

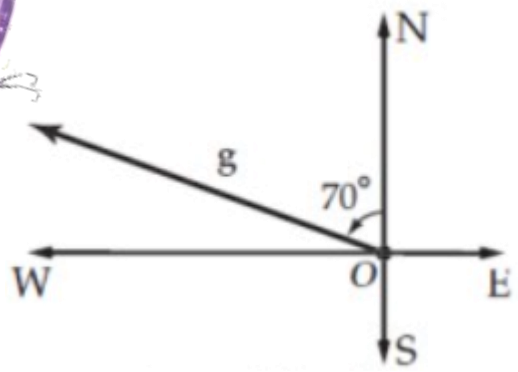
13 cm: 13 in/s

د. إيمان التركي

8) $\mathbf{g} = 6\ \text{km/h}$ ، باتجاه $\text{N } 70^\circ \text{ W}$

مقياس الرسم: $1\ cm : 2\ km/h$

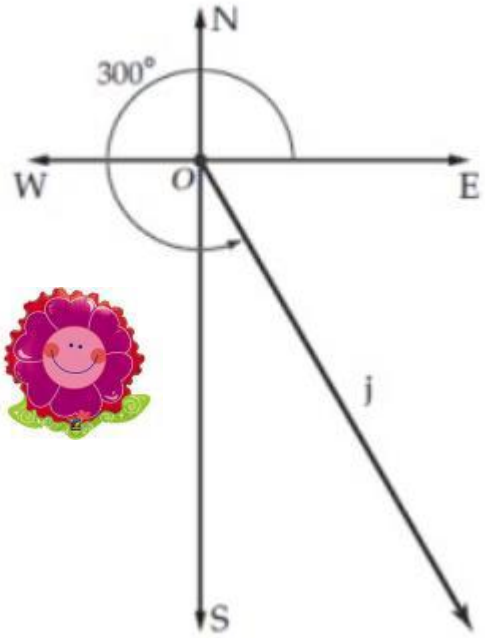
$3\ cm : 6\ km/h$



9) $\mathbf{j} = 5\ \text{ft/s}$ ، وبزاويةٍ قياسها 300° مع الأفقي.

مقياس الرسم: $1\ cm : 1\ ft/s$

$5\ cm : 5\ ft/s$

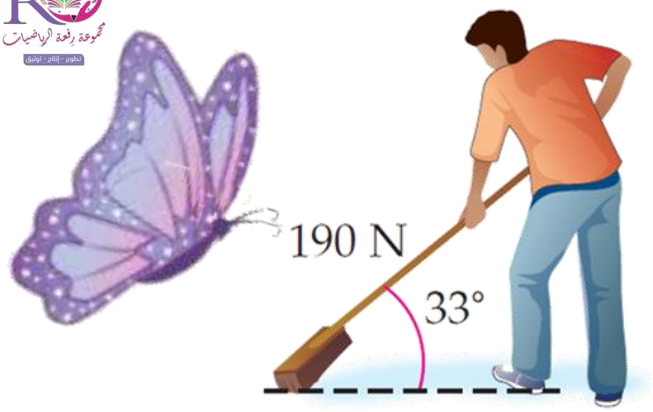


رب اشرح لي صدري

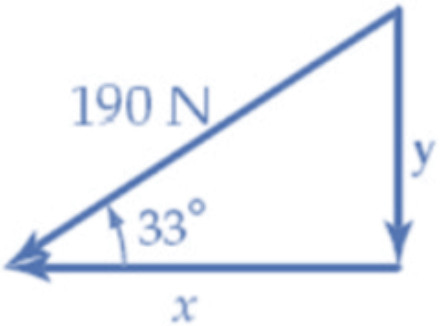
ويسر لي أمري واغفر لي ذنبي

د. إيمان التركي

29) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض، كما في الشكل المجاور.



a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين.



مقياس الرسم: $1\ cm: 50\ N$

$3.8\ cm: 190\ N$

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

المركبة الأفقية: $x = 190cos33° \approx 159.3N$

المركبة الرأسية: $y = 190sin33° \approx 103.5N$

1-2.. تصويب واجب المتجهات في المستوى الإحداثي ص 23..

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: **1)** $A(-3, 1), B(4, 5)$

$$AB = B - A$$
$$=< 4-(-3), 5-1 >$$
$$=< 7, 4 >$$
$$|AB| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \approx 8.1$$

إذا كان: $\mathbf{f} = \langle 8, 0\rangle, \mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle, \mathbf{h} = \langle -6, 2\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: **7)** $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$

$$4h - g$$
$$= 4 < -6, 2 > - < -3, -5 >$$
$$=< -24, 8 > + < +3, +5 >$$
$$=< -24+3, 8+5 >$$
$$= < -21, 13 >$$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي:

13) $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$

$$u = \frac{v}{|v|}$$
$$= \frac{< -2, 7 >}{\sqrt{(-2)^2 + (7)^2}}$$
$$= \frac{< -2, 7 >}{\sqrt{4+49}}$$
$$= \frac{< -2, 7 >}{\sqrt{53}}$$
$$=< \frac{-2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{\sqrt{53}} >$$
$$=< \frac{-2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53} >$$

بإنطاق المقام

رب اشرح لي صدري
ويسر لي أمري واغفر لي ذنبي

د. إيمان التركي

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي على صورة توافقٍ خطِّي لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$:

(19 $D(4, -1), E(5, -7)$

$$DE = E - D$$
$$=< 5 - 4, -7 - (-1) >$$
$$=< 1, -7 + 1 >$$
$$=< 1, -6 >$$
$$DE = i - 6j$$

(23 $D(-4, -6), E(9, 5)$

$$DE = E - D$$
$$=< 9 - (-4), 5 - (-6) >$$
$$=< 9 + 4, 5 + 6 >$$
$$=< 13, 11 >$$
$$DE = 13i + 11j$$

الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممَّا يأتي:

(25 $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

$$v =< |v|cos\theta, |v|sin\theta >$$
$$=< 12cos60°, 12sin60° >$$
$$=< 6, 6\sqrt{3} >$$

د. إيمان التركي

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x :

(29 $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

$$tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{6}{3} = 2$$

$$\rightarrow \theta = tan^{-1}2 \approx 63.4°$$

(32 $\langle -5, 9 \rangle$

$$tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{9}{-5}$$

$$\rightarrow \theta = tan^{-1}\frac{9}{-5} \approx -60.9°$$

$$\theta = 180° - 60.9° = 119.1°$$

{ النجاح

أسطورة مدفونة في داخلك ◎ ◎

فصدق وجودها وقم بالبحث عنها }

د. إيمان التركي

1-3 .. تصويب واجب الضرب الداخلي ص 30 ..

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا.

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$

$$u.v = 3(6) + (-5)(2)$$
$$= 18 - 10 = 8 \neq 0$$

المتجهان غير متعامدان

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$

$$u.v = 9(1) + (-3)(3)$$
$$= 9 - 9 = 0$$

المتجهان متعامدان

6) **زيت الزيتون:** يمثِّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297 \rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجرٍ، ويمثِّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15 \rangle$ سعر العلبة من كلا النوعين على الترتيب

a) أوجد $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$.

$$u.v = 406(27.5) + (297)(15)$$
$$= 11165 + 4455 = 15619$$

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

ثمن العلب جميعها 15619 ريالاً

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى.

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$

$$|m| = \sqrt{(-3)^2 + (11)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 121}$$
$$= \sqrt{130} \approx 11.4$$

د. إيمان التركي

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|}$$

$$= \frac{0(1) + (-5)(-4)}{\sqrt{0 + (-5)^2}\sqrt{1^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{25}\sqrt{17}}$$

$$= \frac{20}{5\sqrt{17}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{20}{5\sqrt{17}} = 14°$$

16) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوةٍ مقدارها 534 N؛ بزاوية 25°، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيحٍ.

$$W = F.\overrightarrow{AB}$$

$$F = \langle 534\cos 25°, 534\sin 25° \rangle = \langle 484, 226 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1.5, 0 \rangle$$

$$W = \langle 484, 226 \rangle . \langle 1.5, 0 \rangle$$

$$= 484(1.5) + 226(0) = 726J$$

رب اشرح لي صدري
ويسر لي أمري واغفر لي ذنبي

د. إيمان التركي

1-4.. تصويب واجب المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد ص 37..

11) طيَّارون: في لحظةٍ ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(675, -121, 19300)$، وإحداثيات موقع طائرةٍ أخرى $(-289, 715, 16100)$ ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم .

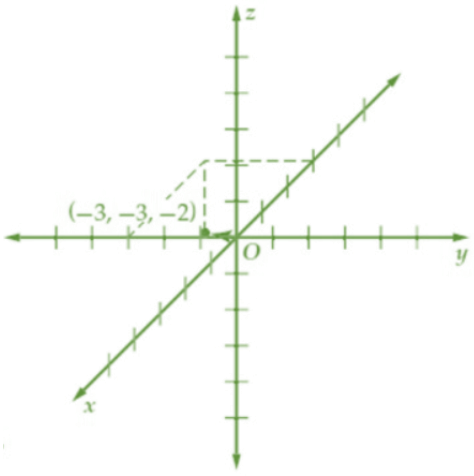
$$\text{المسافة} = \sqrt{(-289-675)^2+(715-(-121))^2+(16100-193000)^2}$$
$$= \sqrt{(-964)^2+(836)^2+(-3200)^2}$$
$$= \sqrt{11868192} \approx 3445ft$$

b) عيّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

$$M = \left(\frac{675+(-289)}{2}, \frac{-121+715}{2}, \frac{19300+16100}{2}\right)$$
$$= (193, 297, 17700)$$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$



د. إيمان التركي

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :

$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$

(20 $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

$$6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c} = 6\langle -5, -4, 3 \rangle - 7\langle 6, -2, -7 \rangle + 8\langle -2, 2, 4 \rangle$$
$$= \langle -30, -24, 18 \rangle + \langle -42, 4, 49 \rangle + \langle -16, 16, 32 \rangle$$
$$= \langle -88, 4, 99 \rangle$$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :

$\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(26 $7x + 6y$

$$7x + 6y = 7\langle -9, 4, 3 \rangle + 6\langle 6, -2, -7 \rangle$$
$$= \langle -63, 28, 21 \rangle + \langle 36, -12, -42 \rangle$$
$$= \langle -27, 16, -21 \rangle$$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

(32 $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \langle 11 - (-5), -3 - (-5), -1 - (-9) \rangle = \langle 16, 2, 8 \rangle$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{324} = 18$$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\langle 16, 2, 8 \rangle}{18} = \left\langle \frac{16}{18}, \frac{2}{18}, \frac{8}{18} \right\rangle = \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$$

رب اشرح لي صدري
ويسر لي أمري واغفر لي ذنبي

د. إيمان التركي

1-5.. تصويب واجب الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء ص 42..

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7 \rangle$

$$u.v = 3(-8) + (-9)(2) + 6(7)$$
$$= -24 - 18 + 42 = 0$$

المتجهان متعامدان لأن حاصل الضرب الداخلي يساوي صفر

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ:

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5 \rangle$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|}$$
$$= \frac{\langle 6, -5, 1 \rangle . \langle -8, -9, 5 \rangle}{\sqrt{6^2 + (-5)^2 + 1^2}\sqrt{(-8)^2 + (-9)^2 + 5^2}}$$
$$= \frac{-48 + 45 + 5}{\sqrt{62}\sqrt{170}} \approx \frac{2}{102.7}$$
$$\cos\theta = \frac{2}{102.7} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{2}{102.7} \approx 88.9°$$

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

$$u = \langle -3, 2, 9 \rangle, v = \langle 4, 3, -10 \rangle$$
$$os\theta = \frac{u.v}{|u||v|}$$
$$= \frac{\langle -3, 2, 9 \rangle . \langle 4, 3, -10 \rangle}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 9^2}\sqrt{4^2 + 3^2 + (-10)^2}}$$
$$= \frac{-12 + 6 - 90}{\sqrt{94}\sqrt{125}} = \frac{-96}{5\sqrt{470}}$$
$$\cos\theta = \frac{-96}{5\sqrt{470}} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{-96}{5\sqrt{470}} \approx 152.3°$$

د. إيمان التركي

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

(18 $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

$u = \langle 6, -2, 5 \rangle$

$v = \langle 5, -4, -8 \rangle$

مساحة متوازي الأضلاع $= |u \times v|$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \big((-2)(-8) - 5(-4)\big)\mathbf{i} - \big(6(-8) - 5(5)\big)\mathbf{j} + \big(6(-4) - (-2)(5)\big)\mathbf{k}$$

$$= (16 + 20)\mathbf{i} - (-48 - 25)\mathbf{j} + (-24 + 10)\mathbf{k}$$

$$= 36\mathbf{i} - (-73)\mathbf{j} + (-14)\mathbf{k}$$

$$= 36\mathbf{i} + 73\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$

$$|u \times v| = \sqrt{36^2 + 73^2 + (-14)^2} = \sqrt{6821} \approx 82.5$$ وحدة مربعة

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي:

(20 $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6 \rangle$

حجم متوازي السطوح $= t.(u \times v)$

$$t.(u \times v) = \begin{vmatrix} -1 & -9 & 2 \\ 4 & -7 & -5 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \big((-7)(6) - (-5)(-2)\big)(-1) - \big(4(6) - (-5(3))(-9) + \big(4(-2) - (-7)(3)\big)(2)$$

$$= (-42 - 10)(-1) - (-24 - 15)(-9) + (-8 + 21)(2)$$

$$= (-52)(-1) - (39)(-9) + (13)(2)$$

$$= 52 + 351 + 26 = 429$$ وحدة مكعبة

د. إيمان التركي