المعادلات التربيعية :
المربعات الكاملة

فيما سبق

درست إيجاد ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما .

الآن

١) أحلل ثلاثية الحدود التي على صورة مربع كامل .
٢) أحل معادلات تتضمن مربعات كاملة .

المفردات

المربع الكامل لثلاثية حدود

جدول التعلم

ماذا أعرف ؟	ماذا أريد أن أعرف ؟	ماذا تعلمت ؟

لماذا

يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة $٠ = -٥\text{ن}^{٢} + \text{ل}_{٠}$، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي ($\text{ل}_{٠}$) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثّل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل: تعلمت قاعدة مفكوك ثنائيتي الحد $(\text{أ} + \text{ب})^{٢}$، $(\text{أ} - \text{ب})^{٢}$. تذكّر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

$$(\text{أ} + \text{ب})^{٢} = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$$
$$= \text{أ}^{٢} + \text{أب} + \text{أب} + \text{ب}^{٢}$$
$$= \text{أ}^{٢} + ٢\text{أب} + \text{ب}^{٢}$$

$$(\text{أ} - \text{ب})^{٢} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{ب})$$
$$= \text{أ}^{٢} - \text{أب} - \text{أب} + \text{ب}^{٢}$$
$$= \text{أ}^{٢} - ٢\text{أب} + \text{ب}^{٢}$$

لماذا

تكون نواتج الضّرب هذه على صورة **مربع كامل لثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملًا.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلاً ثلاثية الحدود ١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩ تشكّل مربعًا كاملًا، كما هو موضح أدناه.

١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩

هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم؛ لأن ١٦س^{٢}=(٤س)^{٢}.

هل الحدّ الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي لكل من الحدين الأول والأخير؟ نعم؛ لأن ٢٤س=٢(٤س)(٣).

هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأن ٩ = ٣^{٢}.

مفهوم أساسي

تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا

أضف إلى مطويتك

الرموز:

$أ^٢ + ٢أب + ب^٢ = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)^٢$

$أ^٢ - ٢أب + ب^٢ = (أ - ب)(أ - ب) = (أ - ب)^٢$

أمثلة:

$س^٢ + ٨س + ١٦ = (س + ٤)(س + ٤) = (س + ٤)^٢$

$س^٢ - ٦س + ٩ = (س - ٣)(س - ٣) = (س - ٣)^٢$

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعاً كاملاً وتحليلها

مثال ١

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، و إذا كانت كذلك فحلّلها.

أ) $٤ص^٢ + ١٢ص + ٩$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٤ص^٢ = (٢ص)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٩ = ٣^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي ٢ (٢ص) (٣)؟ نعم، ١٢ص = ٢(٢ص)(٣).

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة $٤ص^٢ + ١٢ص + ٩$ ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملاً.

$٤ص^٢ + ١٢ص + ٩ = (٢ص)^٢ + ٢(٢ص)(٣) + ٣^٢$ اكتب العبارة على صورة $أ^٢ + ٢أب + ب^٢$

$= (٢ص + ٣)^٢$ حلّل باستعمال القاعدة

إرشادات للدراسة

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملاً

إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً، لذا ليس من الضروري التحقق من الشروط الأخرى.

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعاً كاملاً وتحليلها

مثال ١

ب) $٩س^٢ - ٦س + ٤$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٩س^٢ = (٣س)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٤ = ٢^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $-٢(٣س)(٢)$؟ لا، $-٦س \neq -٢(٣س)(٢)$.

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود $٩س^٢ - ٦س + ٤$ لا تشكّل مربعًا كاملاً.

إرشادات للدراسة

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملاً

إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً، لذا ليس من الضروري التحقق من الشروط الأخرى.

تحقق من فهمك

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، و إذا كانت كذلك فحلّلها.

١أ) ٩ص^{٢} + ٢٤ص + ١٦

....
....
....
....
....
....
....

١ب) ٢أ^{٢} + ١٠أ + ٢٥

....
....
....
....
....
....
....

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تامًّا إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لايمكن تحليلها فإنها تكون أوليّة.

ملخص المفهوم **طرق التحليل**

أضف إلى مطويتك

الخطوات	عدد الحدود	أمثلة
الخطوة ١: حلّل بإخراج (ق . م . أ)	أي عدد	$٤س^٣ + ٢س^٢ - ٦س = ٢س(٢س^٢ + س - ٣)$
الخطوة ٢: تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقًا بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.	٢ أو ٣	$٩س^٢ - ١٦ = (٣س + ٤)(٣س - ٤)$ $١٦س^٢ + ٢٤س + ٩ = (٤س + ٣)^٢$
الخطوة ٣: طبّق أنماط التحليل لـِ $س^٢ + ب س + جـ$ أو $أ س^٢ + ب س + جـ$ أو حلّل بتجميع الحدود.	٣ أو ٤	$س^٢ - ٨س + ١٢ = (س - ٢)(س - ٦)$ $١٢ص^٢ + ٩ص + ٨ص + ٦$ $= (١٢ص^٢ + ٩ص) + (٨ص + ٦)$ $= ٣ص(٤ص + ٣) + ٢(٤ص + ٣)$ $= (٤ص + ٣)(٣ص + ٢)$

التحليل التام

مثال ٢

إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك:
يمكنك التحقق من إجابتك من خلال:
– استعمال طريقة التوزيع بالترتيب.
– استعمال خاصية التوزيع
– تمثيل كلٍّ من العبارة الأصلية وتحليلها بالرسم والمقارنة بينهما.

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب "أولية":

أ) ٥س^{٢} – ٨٠

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدين ٥س^{٢}، –٨٠ هو ٥، حلّل بإخراج (ق. م. أ).

الخطوة ٢: بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقًا بين مربعين.

٥س^{٢} – ٨٠ = ٥(س^{٢} – ١٦)	(ق. م. أ) للحدين ٥
= ٥(س^{٢} – ٤^{٢})	س^{٢} = س × س ، ١٦ = ٤ × ٤
= ٥(س – ٤)(س + ٤)	تحليل الفرق بين مربعين

التحليل التام

مثال ٢

إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك:
يمكنك التحقق من إجابتك من خلال:
– استعمال طريقة التوزيع بالترتيب.
– استعمال خاصية التوزيع
– تمثيل كلٍّ من العبارة الأصلية وتحليلها بالرسم والمقارنة بينهما.

ب) ٩س^{٢} – ٦س – ٣٥

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدود: ٩س^{٢}، –٦س، –٣٥ هو ١.

الخطوة ٢: بما أن ٣٥ ليس مربعًا كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً.

الخطوة ٣: حلّل باستعمال النمط أ س^{٢}+ ب س+ جـ. هل يوجد عددان ناتج ضربهما ٩(–٣٥)، أو –٣١٥ ومجموعهما –٦؟ نعم، –٢١ وَ ١٥ ناتج ضربهما –٣١٥. ومجموعهما –٦ .

٩س^{٢} – ٦س – ٣٥ = ٩س^{٢} + م س + ن س – ٣٥	استخدم القاعدة
= ٩س^{٢} + ١٥س – ٢١س – ٣٥	م = ١٥ ، ن = –٢١
= (٩س^{٢} + ١٥س) + (–٢١س – ٣٥)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
= ٣س(٣س + ٥) – ٧(٣س + ٥)	حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)
= (٣س + ٥)(٣س – ٧)	(٣س+٥) عامل مشترك

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب "أولية":

٢أ) ٢س^{٢} – ٣٢

....
....
....
....
....
....
....

٢ب) ١٢س^{٢} + ٥س – ٢٥

....
....
....
....
....
....
....

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة: عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

مثال ٣

حل المعادلة: ٩س^{٢} − ٤٨س = −٦٤.

٩س^{٢} − ٤٨س = −٦٤	المعادلة الأصلية
٩س^{٢} − ٤٨س + ٦٤ = ٠	أضف ٦٤ إلى الطرفين
(٣س)^{٢} − ٢(٣س)(٨) + (٨)^{٢} = ٠	تحقق إن كانت ثلاثية الحدود ٩س^{٢}−٤٨س+٦٤ تمثّل مربعًا كاملاً
(٣س − ٨)^{٢} = ٠	حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل
(٣س − ٨)(٣س − ٨) = ٠	اكتب (٣س−٨)^{٢} كحاصل ضرب عاملين
٣س − ٨ = ٠	ضع أحد العوامل المتكررة = ٠
٣س = ٨	أضف ٨ إلى كلا الطرفين
س = $\frac{٨}{٣}$	اقسم كلا الطرفين على ٣

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

٣أ) $\text{أ}^{٢} + ١٢\text{أ} + ٣٦ = ٠$

٣ب) $\text{ص}^{٢} - \frac{٤}{٣}\text{ص} + \frac{٤}{٩} = ٠$

سبق أن حللت معادلات مثل س^{٢}−١٦=٠ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضًا استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

س^{٢} − ١٦ = ٠	المعادلة الأصلية
س^{٢} = ١٦	أضف ١٦ إلى كلا الطرفين
س = ± $\sqrt{١٦}$	خاصية الجذر التربيعي

قراءة الرياضيات

الجذر التربيعي

يقرأ ± $\sqrt{١٦}$ موجب أو سالب الجذر التربيعي لـ ١٦

تذكّر أنه يوجد جذران تربيعيان لـِ ١٦، هما ٤ وَ −٤. لذا فإن مجموعة الحل هي {−٤، ٤}. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ {±٤}.

أضف إلى **مطويتك**

مفهوم أساسي

خاصية الجذر التربيعي

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعية على الصورة $س^٢ = ن$، خُذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي $ن \geq ٠$، إذا كان $س^٢ = ن$ فإنَّ $س = \pm\sqrt{ن}$.

مثال: $س^٢ = ٢٥$

$س = \pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$

إذا كانت ن في المعادلة $س^٢ = ن$، ليست مربعًا كاملاً، فتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي، لذا استعمل الآلة الحاسبة. أما إذا كانت ن مربعًا كاملاً فستحصل على إجابة دقيقة.

استعمال خاصية الجذر التربيعي

مثال ٤

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) $(ص - ٦)^٢ = ٨١$

$(ص - ٦)^٢ = ٨١$	المعادلة الأصلية
$ص - ٦ = \pm\sqrt{٨١}$	خاصية الجذر التربيعي
$ص - ٦ = \pm٩$	$٨١ = ٩ \times ٩$
$ص = ٦ \pm ٩$	أضف ٦ إلى كلا الطرفين
$ص = ٦ + ٩$ أو $ص = ٦ - ٩$	افصل المعادلة إلى معادلتين
$= ١٥$ $\quad$ $= -٣$	بسّط
الجذران هما ١٥ وَ −٣	تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية

استعمال خاصية الجذر التربيعي

مثال ٤

ب) $(س + ٦)^{٢} = ١٢$

$(س + ٦)^{٢} = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س + ٦ = \pm\sqrt{١٢}$	خاصية الجذر التربيعي
$س = -٦ \pm \sqrt{١٢}$	اطرح ٦ من كلا الطرفين

الجذران هما $-٦ + \sqrt{١٢}$ ، $-٦ - \sqrt{١٢}$.

باستعمال الآلة الحاسبة، $-٦ + \sqrt{١٢} \approx -٢,٥٤$ ، $-٦ - \sqrt{١٢} \approx -٩,٤٦$

تحقق من فهمك

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

٤أ) $(\text{أ} - ١٠)^٢ = ١٢١$

....

....

....

....

....

....

....

٤ب) $(\text{ع} + ٣)^٢ = ٢٦$

....

....

....

....

....

....

....

مثال ٥
من واقع الحياة

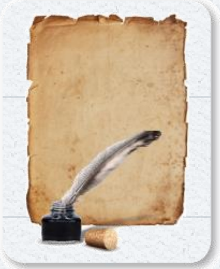
حل المعادلة

فيزياء: أُسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ع_{٠}$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي ($ع_{٠}$) بالمتر، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

عند مستوى الأرض، ع = ٠ والارتفاع الابتدائي ٦٨ ، إذن $ع_{٠} = ٦٨$

$ع = -٥ن^{٢} + ع_{٠}$	المعادلة الأصلية
$٠ = -٥ن^{٢} + ٦٨$	عوض عن ع بـ صفر، وعن $ع_{٠}$ بـ ٦٨
$-٦٨ = -٥ن^{٢}$	اطرح ٦٨ من كلا الطرفين
$١٣,٦ = ن^{٢}$	اقسم على -٥
$\pm ٣,٧ \approx ن$	خاصية الجذر التربيعي

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.



تاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي
(١٥٦٤م–١٦٤٢م)
كان جاليليو أول من أثبت أن الأجسام المختلفة الكتل تسقط بالسرعة نفسها، وذلك بإسقاط جسمين مختلفي الكتلة من قمة برج بيزا المائل في إيطاليا عام ١٥٨٩ ميلادية.

تحقق من فهمك

٥) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا أُسقطت من سطح مبنى ارتفاعه نصف الارتفاع المذكور أعلاه.

....

....

....

....

....

....

تأكد

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، و إذا كانت كذلك فحلّلها.

١) $٢٥س^{٢} + ٦٠س + ٣٦$

....

....

....

....

....

....

٢) $٦س^{٢} + ٣٠س + ٣٦$

....

....

....

....

....

....

تأكد

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب "أولية":

٣) ٢س^{٢} – س – ٢٨

....

....

....

....

....

....

٤) ٤س^{٢} + ٦٤

....

....

....

....

....

....

تأكد

حل كلًّا من المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل:

٦) $٤س^٢ = ٣٦$

....

....

....

....

....

....

٨) $(ع + ٥)^٢ = ٤٧$

....

....

....

....

....

....

تأكد

مثال ٥ ٩) **طلاء:** سقطت فرشاة الدهان من نايف أثناء قيامه بطلاء غرفة نومه، من ارتفاع ٢م. استعمل المعادلة ع = −٥ ن^{٢} + ع. لإيجاد العدد التقريبي للثواني التي تستغرقها الفرشاة للوصول إلى الأرض.

....

....

....

....

....

مهارات التفكير العليا

٤٣) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا للعبارة:

"لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ثلاثة حلول حقيقية دائمًا".

....

....

....

....

....

الواجب
بمنصة مدرستي

تصميم
أ . عثمان الربيعي
@uthman20191

موقع رفعة التعليمية

مجموعة رفعة التعليمية
تطوير - إنتاج - توثيق