صباح الخير ليومنا الجديد، للأماني التي استيقظَت، ولكل من سيُضيف لمسةَ جمالٍ ليومنا هذا 💛🌿

الاحداثيات القطبية

رياضيات ٦

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

فيما سبق

درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها في الوضع القياسي. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثّل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أُمثّل بيانيًا معادلات قطبية بسيطة.

المفردات

نظام الإحداثيات القطبية
polar coordinate system

القطب
pole

المحور القطبي
polar axis

الإحداثيات القطبية
polar coordinates

المعادلة القطبية
polar equation

التمثيل القطبي
polar graph

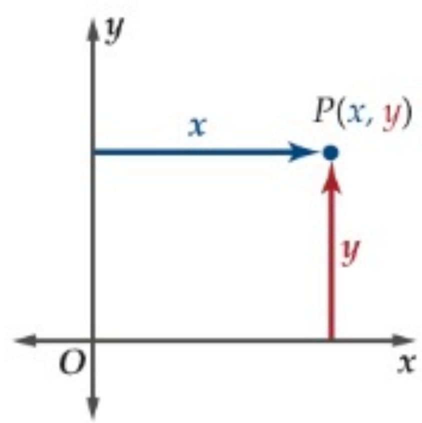
لماذا

يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى، والتضاريس الأرضية. ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.

تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). وعندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

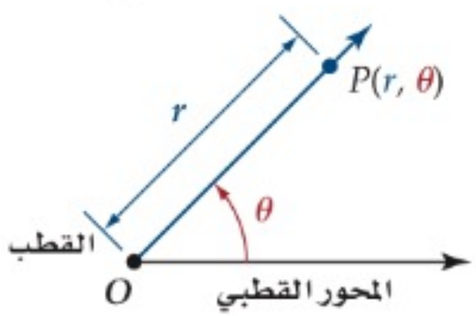
في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x, y هما المحوران الأفقي والرأسي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما نقطة الأصل، ويرمز لها بالحرف O. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x, y)، حيث x, y المسافتان المتّجهتان الأفقية، والرأسية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(1, \sqrt{3})$ على بُعد وحدة وحدة إلى يمين المحور y، وعلى بُعد $\sqrt{3}$ وحدة إلى أعلى المحور x.

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**. و**المحور القطبي** هو نصف مستقيم يمتد أفقيًّا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات** (r, θ) ، حيث r المسافة المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا، فمن الممكن أن تكون r سالبة) من القطب إلى النقطة P، و θ الزاوية المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا) من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية



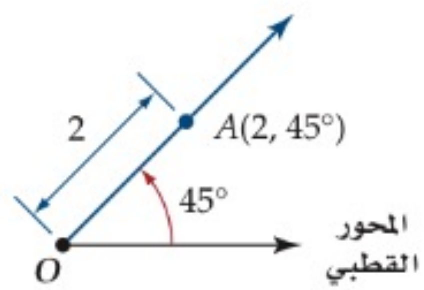
القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، ولتمثيل النقطة P بالإحداثيات القطبيّة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ إذا كانت r موجبة. أما إذا كانت سالبة، فإن P تقع على نصف المستقيم المقابل (الامتداد) لضلع الانتهاء للزاوية θ .

مثال ١

تمثيل الإحداثيات القطبية

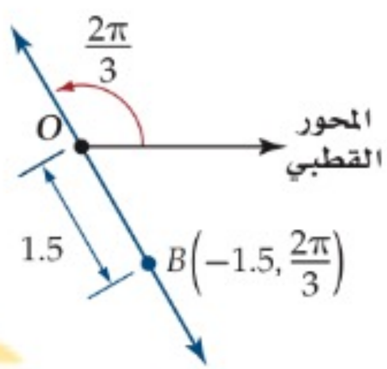
مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

a) $A(2, 45°)$



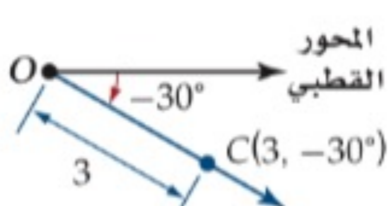
بما أن $\theta = 45°$ ، فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $45°$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 2$ ، لذا عيِّن نقطةً A تبعُد وحدتين عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية $45°$ ، كما في الشكل المجاور.

b) $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$



بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{2\pi}{3}$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً B تبعُد 1.5 وحدة عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء، كما في الشكل المجاور.

c) $C(3, -30°)$



بما أن $\theta = -30°$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $-30°$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، لذا عيِّن نقطةً C تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك:

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

1A) $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ **1B)** $E(2.5, 240°)$ **1C)** $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

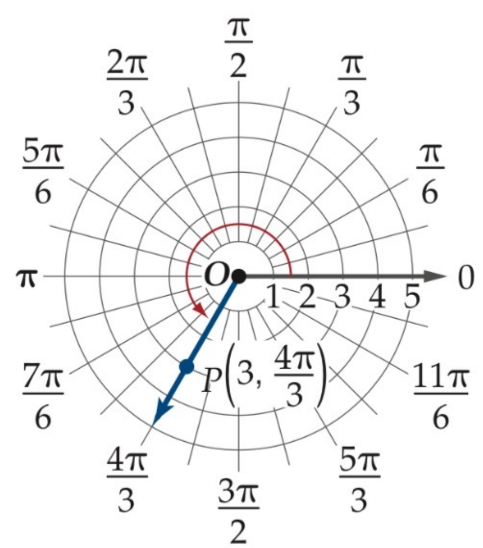
تُعيَّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًّا، كما تُعيَّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.

مثال ٢ تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

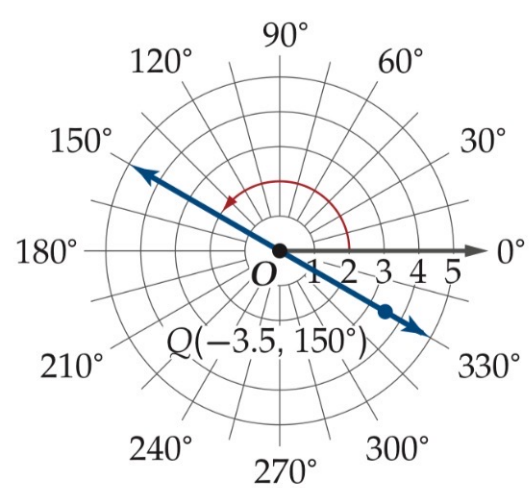
a) $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، لذا عيِّن نقطةً P تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



b) $Q(-3.5, 150°)$

بما أن $\theta = 150°$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $150°$ ، بحيث يكون المحور القطبي ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً Q تبعد 3.5 وحدات عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.

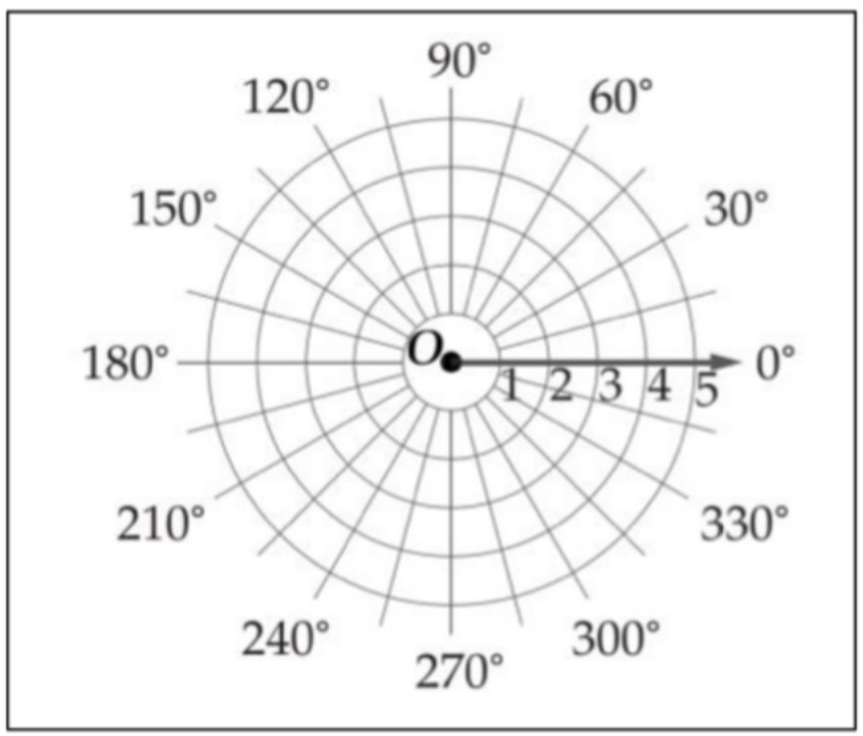


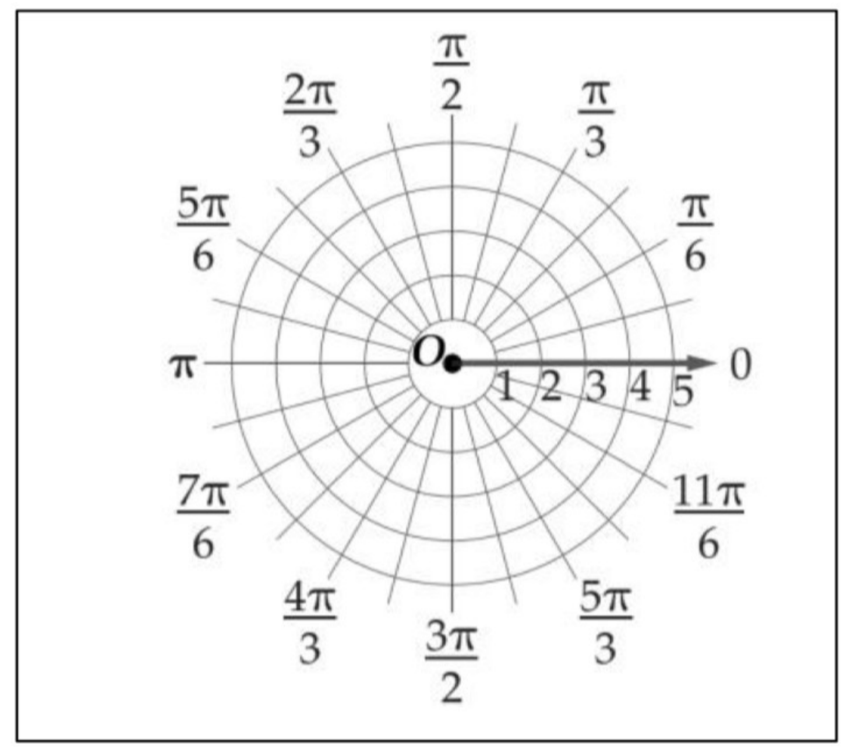
تحقق من فهمك :

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

(2A $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$

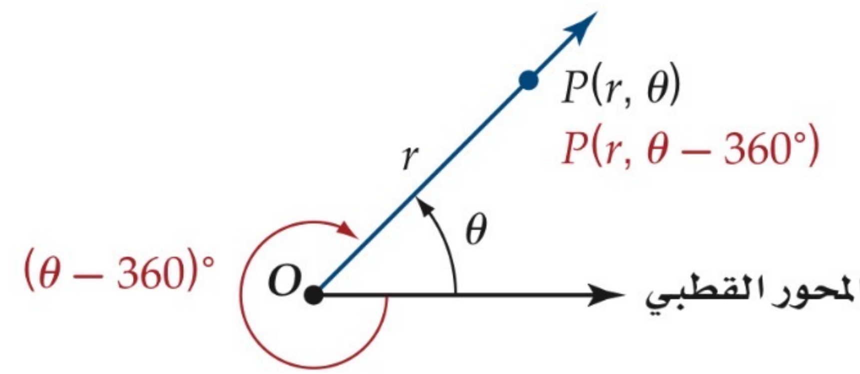
(2B $S(-2, -135°)$

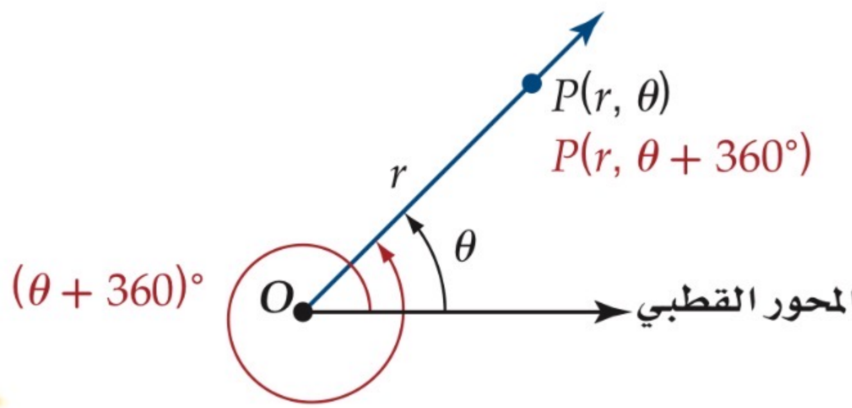




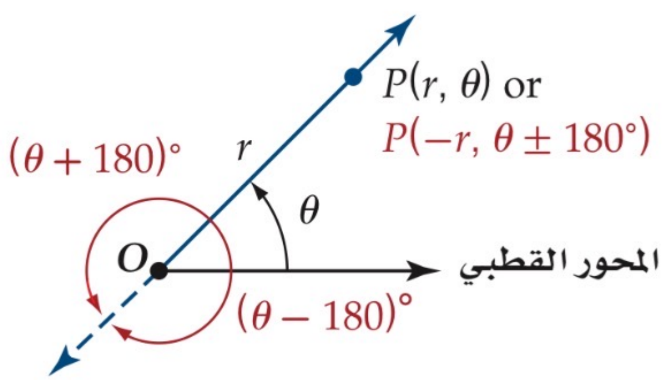
موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.





وكذلك لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ ، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثِّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.

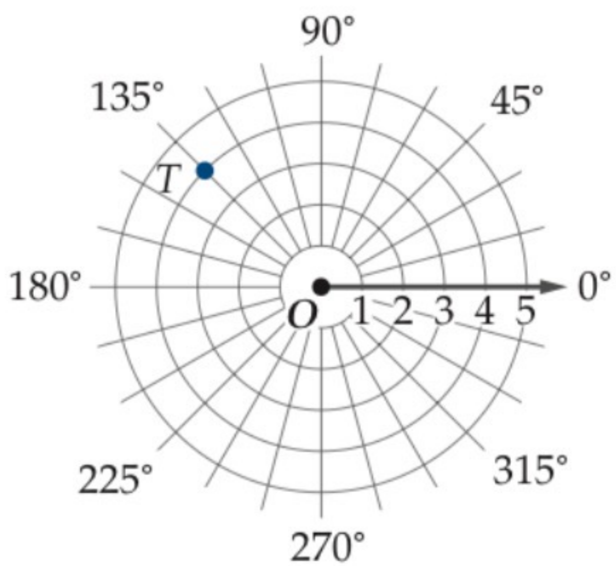


وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

مثال ٣

تمثيلات قطبية متعددة

إذا كانت $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



أحد الأزواج القطبية التي تمثّل النقطة T هو $(4, 135°)$.
وفيما يأتي الأزواج الثلاثة الأخرى:

$$(4, 135°) = (4, 135° - 360°) = (4, -225°)$$
اطرح $360°$ من θ

$$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°) = (-4, 315°)$$
ضع $-r$ بدلًا من r، وأضف $180°$ إلى θ

$$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°) = (-4, -45°)$$
ضع $-r$ بدلًا من r، واطرح $180°$ من θ

تحقق من فهمك:

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، أو $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

3A) $(5, 240°)$

3B) $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلةً قطبيةً**. فمثلًا : $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = a$ ، و $y = b$ أساسيًّا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$ ، و $\theta = h$ ، حيث k, h عددان حقيقيان، يُعَدُّ أساسيًّا في نظام الإحداثيات القطبية.

مثال ٤

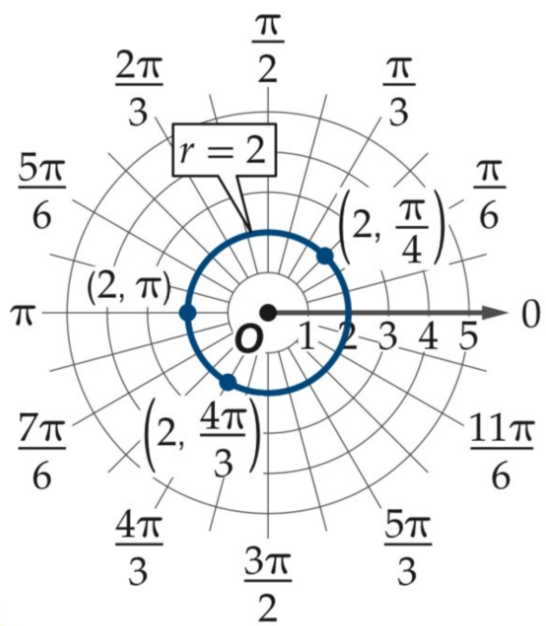
التمثيل البياني التمثيلات القطبية

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

a) $r = 2$

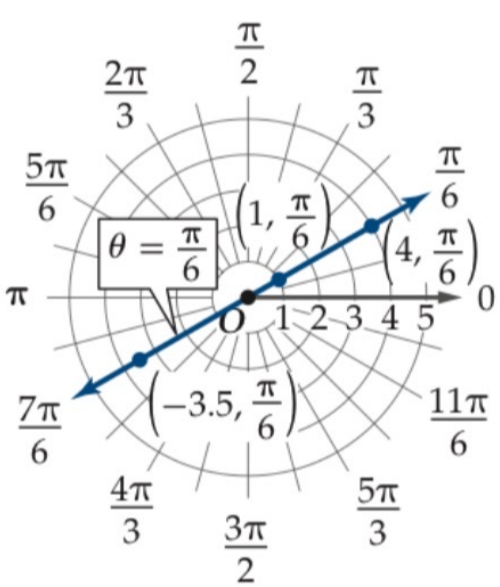
تتكون حلول المعادلة $r = 2$ من جميع النقاط على الصورة $(2, \theta)$ ، حيث θ أي عدد حقيقي فمثلًا تعد النقاط $(2, \frac{4\pi}{3})$, $(2, \pi)$, $(2, \frac{\pi}{4})$ حلولًا لها.

يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعُد 2 وحدة عن القطب. وعليه فإن المنحنى هو دائرة مركزها نقطة الأصل (القطب) ، وطول نصف قطرها 2 كما في الشكل المجاور.



b) $\theta = \frac{\pi}{6}$

تتكوّن حلول المعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$ من جميع النقاط $(r, \frac{\pi}{6})$ ، حيث r أي عدد حقيقي مثل النقاط $(-3.5, \frac{\pi}{6})$, $(4, \frac{\pi}{6})$, $(1, \frac{\pi}{6})$ ؛ وعليه فإن التمثيل البياني عبارة عن جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي.

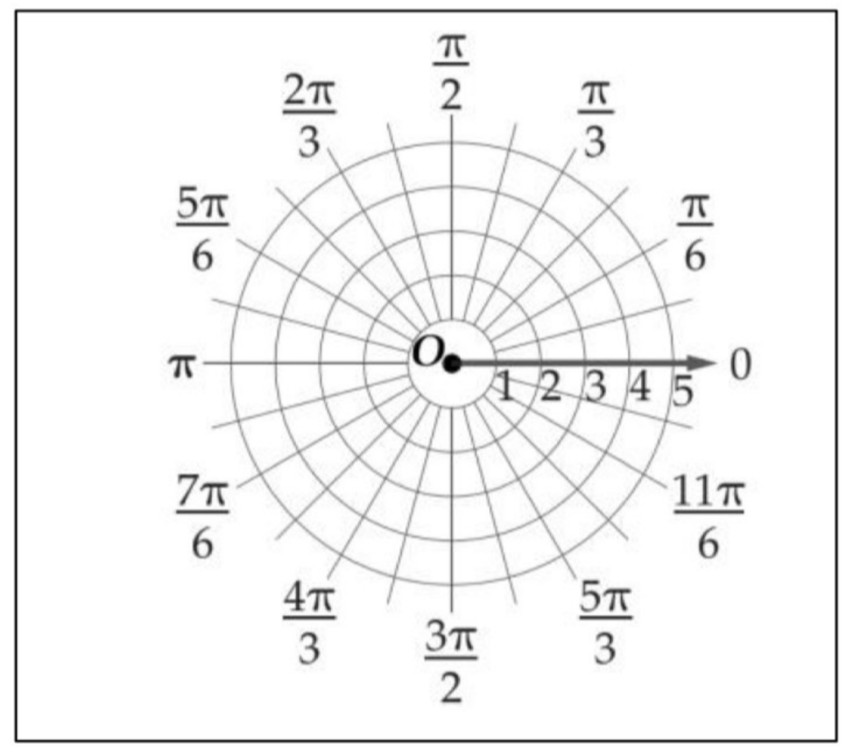


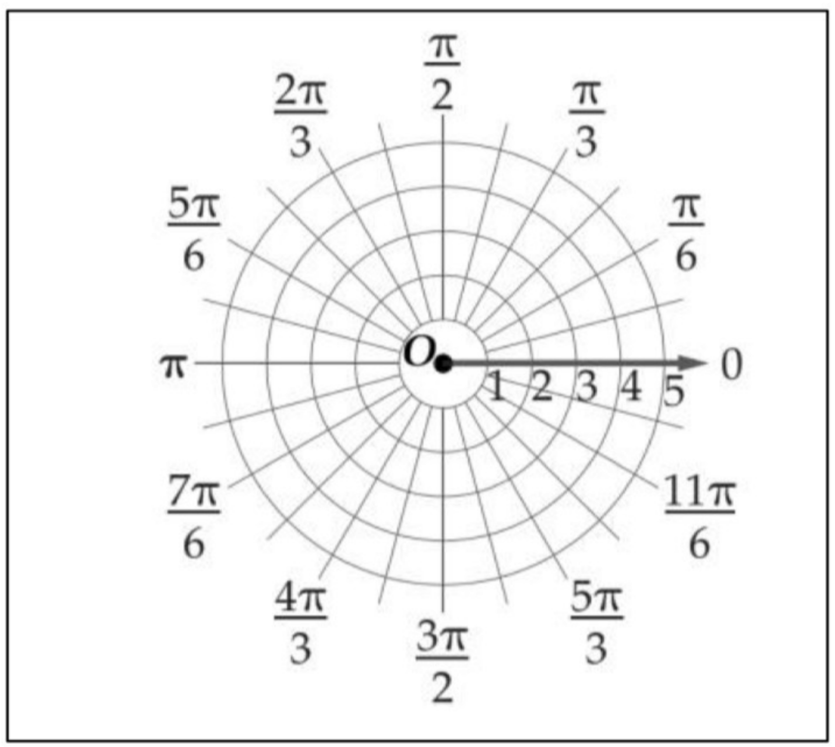
تحقق من فهمك:

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

(4A $r = 3$

(4B $\theta = \frac{2\pi}{3}$





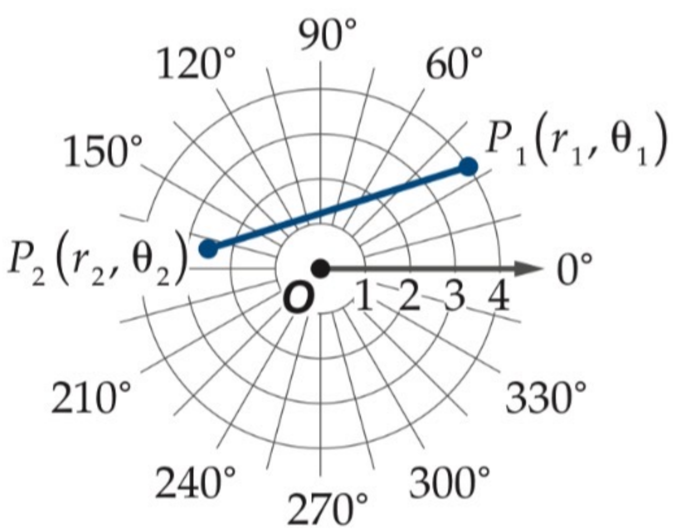
يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

مفهوم أساسي

المسافة بالصيغة القطبية

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 ، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



مثال ٥ ايجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

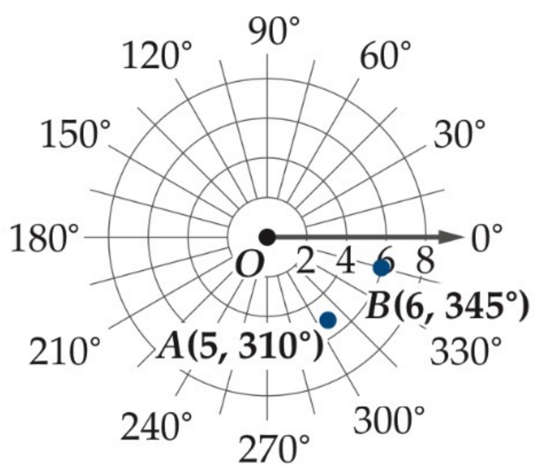
حركة جوية : يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°)$, $B(6, 345°)$، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

الربط مع الحياة

لقد طوّرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 يستطيع رصد الطائرات ضمن دائرة نصف قطرها 80 mi .

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

تقع الطائرة A على بُعد 5 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها $310°$، في حين تقع الطائرة B على بُعد 6 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها $345°$، كما في الشكل المجاور.



b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

باستعمال الصيغة القطبية للمسافة، فإن.

$$AB = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$ المسافة بالصيغة القطبية

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345° - 310°)} \approx 3.44$$ $(r_1, \theta_1) = (5, 310°)$, $(r_2, \theta_2) = (6, 345°)$

أي أن المسافة بين الطائرتين 3.44 mi تقريبًا؛ وعليه فإنهما لا تخالفان تعليمات الطيران.

تحقق من فهمك:

5) **قوارب:** يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°)$, $(8, 150°)$، حيث r بالأميال.

5A) فمثّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

5B) ما المسافة بين القاربين؟

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **تبرير:** وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًّا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1 ، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟

مسائل مهارات التفكير العليا

56) **برهان:** أثبت أن المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1 P_2 = \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

(**إرشاد:** استعمل قانون جيوب التمام).

مسائل مهارات التفكير العليا

57) **تبرير:** وضّح ماذا يحدث لمعادلة المسافة المعطاة بالصيغة القطبية عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. فسِّر هذا التغيّر.

مسائل مهارات التفكير العليا

58) اكتشف الخطأ: قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.