الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

فيما سبق

درست تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية

والآن

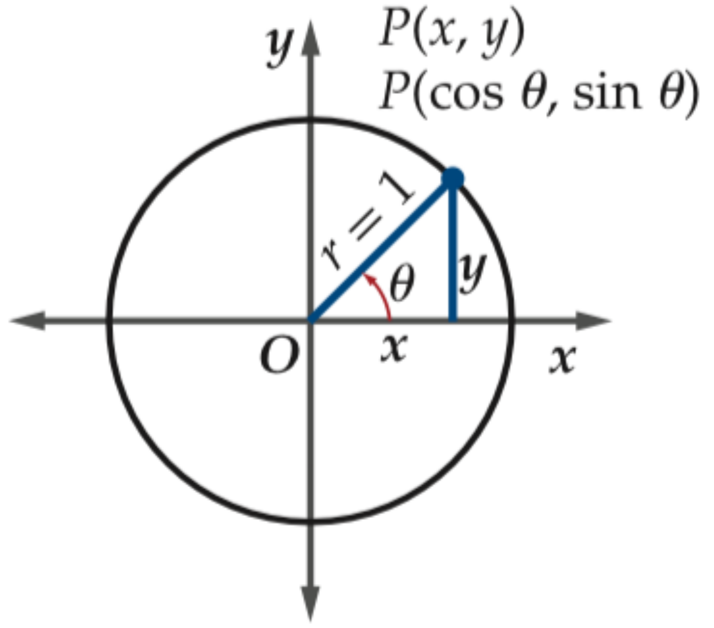
١| أحول بين الاحداثيات القطبية والديكارتية
٢| أحول المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس

لماذا؟

يبعث مِجَس مُثبت إلى رجل آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة المتجهة r ، والزاوية المتجهة θ . ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.

الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$؛ لأن

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$



فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة r, θ على النحو الآتي:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

اضرب في r

$$r\cos\theta = x \quad , \quad r\sin\theta = y$$

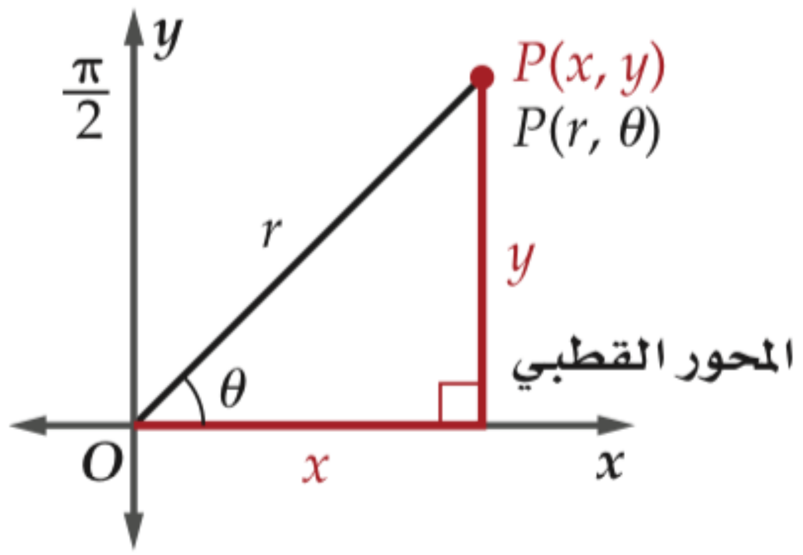
وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيّات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.

مفهوم أساسي: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ) ، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

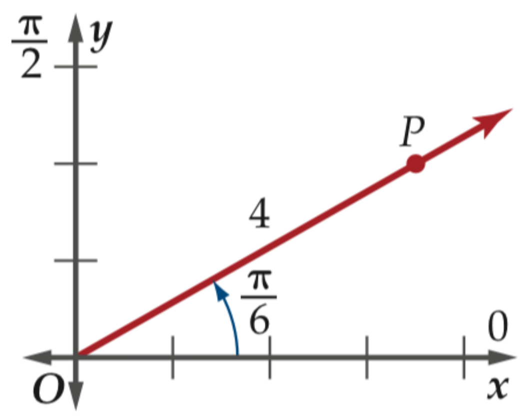


تحويل الاحداثيات القطبية الى الاحداثيات الديكارتية

مثال 1

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلِّ نقطة مما يأتي:

a) $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

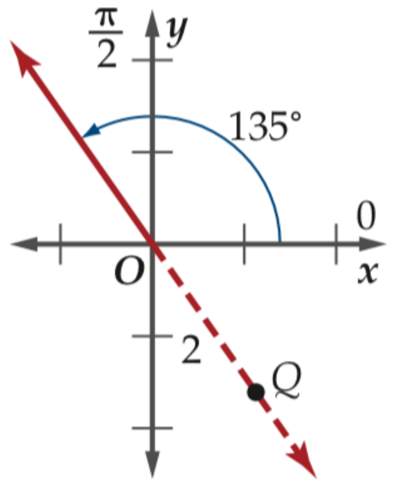


بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، فإن $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$.

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 4\cos\frac{\pi}{6}$	$r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4\sin\frac{\pi}{6}$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	بسّط	$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3}$		$= 2$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو $(3.46, 2)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

b) $Q(-2, 135°)$



بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (-2, 135°)$، فإن $r = -2, \theta = 135°$.

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= -2\cos 135°$	$r = -2, \theta = 135°$	$= -2\sin 135°$
$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$	بسّط	$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

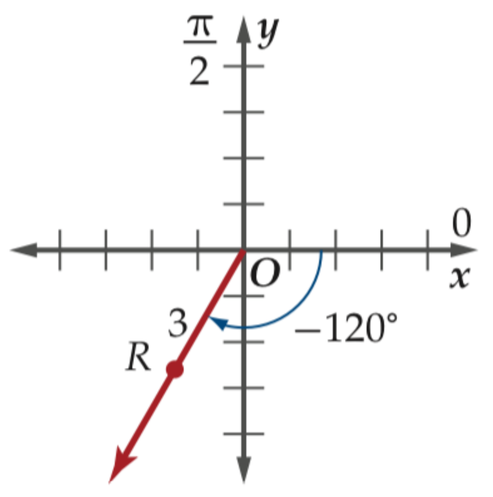
أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو $(1.41, -1.41)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

تحويل الاحداثيات القطبية الى الاحداثيات الديكارتية

مثال ١

c) $V(3, -120°)$

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (3, -120°)$ ، فإن $r = 3, \theta = -120°$



$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 3(\cos -120°)$	$r = 3, \theta = -120°$	$= 3\sin(-120°)$
$= 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$	بسّط	$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $(-1.5, -2.6)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

1A) $R(-6, -120°)$

1B) $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

1C) $T(-3, 45°)$

تدرب

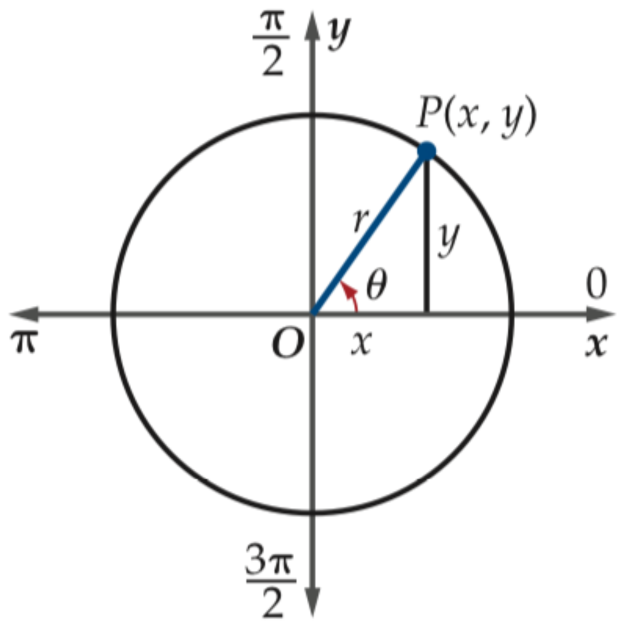
حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلٍّ نقطة مما يأتي:

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة المتجهة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية المتجهة التي يصنعها r مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.

استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.



$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

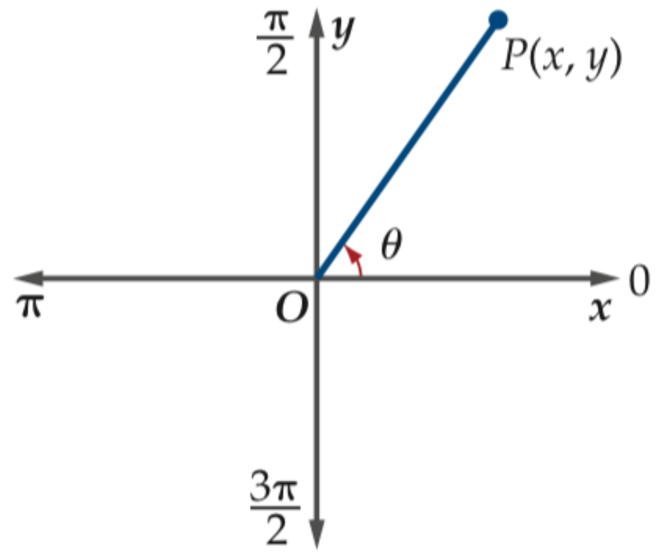
ترتبط الزاوية θ بكل من x, y من خلال دالة الظل، ولإيجاد الزاوية θ:

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ تعريف الظل

$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ دالة معكوس الظل

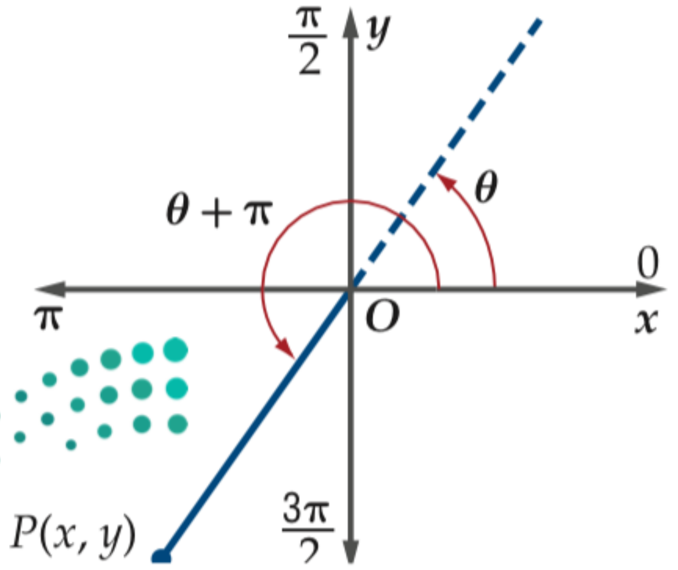
تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ أو $(-90°, 90°)$ في نظام الإحداثيات الديكارتية.

وتُعطى قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أي عندما تكون $x > 0$، كما في الشكل **2.2.1** . وإذا كانت $x < 0$، فإن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث، لذا عليك إضافة π أو $180°$ (طول الدورة للدالة $y = \tan x$) إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل **2.2.2** .



$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

الشكل 2.2.1



$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$

الشكل 2.2.2

مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$، عندما $x > 0$

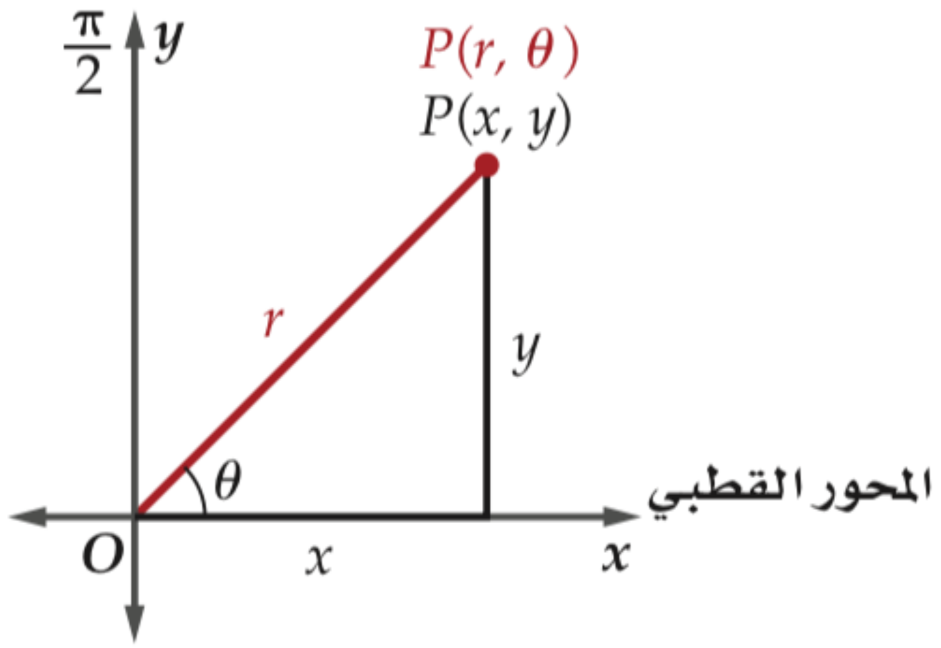
وعندما $x < 0$ فإن:

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$

أو $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + 180°$.

وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$



إرشادات للدراسة

تحويل الإحداثيات

إن العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتها العملية المتبعة في إيجاد طول المتجه واتجاهه.

تحويل الاحداثيات الديكارتيه الى الاحداثيات القطبية

مثال 2

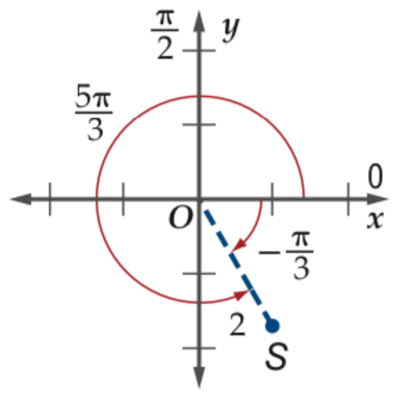
أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

a) $S(1, -\sqrt{3})$

بما أن إحداثيات النقطة $(1, -\sqrt{3}) = (x, y)$ ، فإن $x = 1, y = -\sqrt{3}$.

ولأن $x > 0$ ، لذا استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ؛ لإيجاد الزاوية θ.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1, y = -\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بسّط	$= -\frac{\pi}{3}$



أي أن $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة S.

ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة موجبة لـ θ ، وذلك بإضافة 2π.

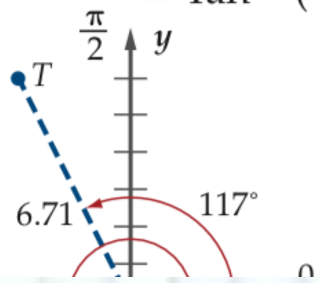
فيكون $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$ ، كما في الشكل المجاور.

b) $T(-3, 6)$

بما أن إحداثيات النقطة $(-3, 6) = (x, y)$ ، فإن $x = -3, y = 6$.

ولأن $x < 0$ ، لذا استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ ؛ لإيجاد الزاوية θ

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$y = 6, x = -3$	$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + 180°$
$= \sqrt{45} \approx 6.71$	بسّط	$= \text{Tan}^{-1}(-2) + 180° \approx 117°$



أي أن $(6.71, 117°)$ تقريبًا هو زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة T ، ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة سالبة لـ r ، فنحصل على $(-6.71, 117° + 180°)$ أو $(-6.71, 297°)$ ، كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2A) $V(8\ ,\ 10)$

2B) $W(-9\ ,\ -4)$

تدرب

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

11) $(7, 10)$

12) $(-13, 4)$

مقطع توضيحي

مثال من واقع الحياة 3

التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟» ، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 5\cos 295°$	$r = 5 , \theta = 295°$	$= 5\sin 295°$
≈ 2.11	بسّط	≈ -4.53

أي أن الإحداثيات الديكارتية لموقع الجسم هي $(2.11 , -4.53)$ تقريبًا.

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3, 7)$ ، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{3^2 + 7^2}$	$x = 3 , y = 7$	$= \mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{3}$
≈ 7.62	بسّط	$\approx 66.8°$

الإحداثيات القطبية لموقع الجسم هي $(7.62, 66.8°)$ تقريبًا؛ أي أن المسافة بين الجسم والرجل الآلي 7.62، وقياس الزاوية بينهما $66.8°$

تحقق من فهمك

3) **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

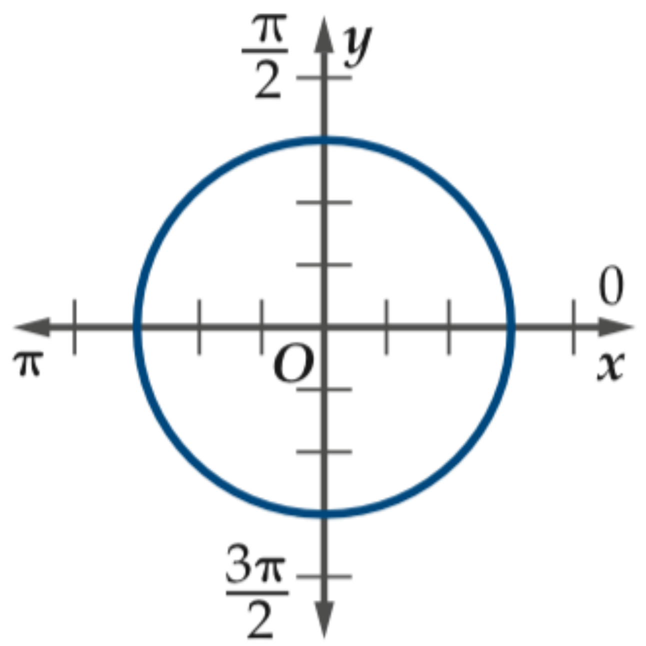
A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2, 6)$ ، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

المعادلات القطبية والديكارتية قد تحتاج في دراستك المستقبلية إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس؛ وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية الـمعقَّدة صورتها القطبية أسهل كثيرًا. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

المعادلة على الصورة الديكارتية

$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية

$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقَّدة صورتها الديكارتية أسهل كثيرًا،

فالمعادلة القطبية $r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$ صورتها الديكارتية هي $2x - 3y = 6$

مثال 4

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $(x-4)^2+y^2=16$

لإيجاد الصورة القطبيّة للمعادلة، عوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$. ثم بَسِّط المعادلة.

$(x-4)^2+y^2=16$	المعادلة الأصلية
$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$	$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$	اضرب
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$	اطرح 16 من الطرفين
$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$	ضع الحدود المربعة في طرف واحد
$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$	حلّل
$r^2(1)=8r\cos\theta$	متطابقة فيثاغورس
$r=8\cos\theta$	اقسم الطرفين على r حيث $r\neq 0$

b) $y=x^2$

$y=x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta=(r\cos\theta)^2$	$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$
$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$	اضرب
$\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=r$	اقسم الطرفين على $r\cos^2\theta$
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}=r$	$\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}$
$\tan\theta\sec\theta=r$	المتطابقات النسبية ومتطابقات المقلوب

تحويل المعادلات الديكارتية الى معادلات قطبية

تحقق من فهمك

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A) $x^2 + (y-3)^2 = 9$

4B) $x^2 - y^2 = 1$

تدرب

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

24) $x = -2$

25) $(x + 5)^2 + y^2 = 25$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

النقطتان $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ تقعان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$، والإحداثيات الديكارتية لهما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$، فتكون معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين هي: $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$.

مثال 5

تحويل المعادلات القطبية الى معادلات ديكارتيه

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

(a $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$	المعادلة الأصلية
$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$	خُذ tan الطرفين
$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan \theta = \frac{y}{x}$
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	اضرب الطرفين في x

(b $r = 7$

$r = 7$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 49$	ربّع الطرفين
$x^2 + y^2 = 49$	$r^2 = x^2 + y^2$

(c $r = -5 \sin \theta$

$r = -5 \sin \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = -5r \sin \theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = -5y$	$r^2 = x^2 + y^2 , y = r \sin \theta$
$x^2 + y^2 + 5y = 0$	أضف $5y$ إلى الطرفين

تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

5A) $r = -3$

5B) $\theta = \frac{\pi}{3}$

5C) $r = 3\cos\theta$

تدرب

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

43) $r = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$

44) $r = 10\csc\left(\theta + \dfrac{7\pi}{4}\right)$

تدرب

حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام.

(69 $x^2 - 7x = -15$

(75 أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟

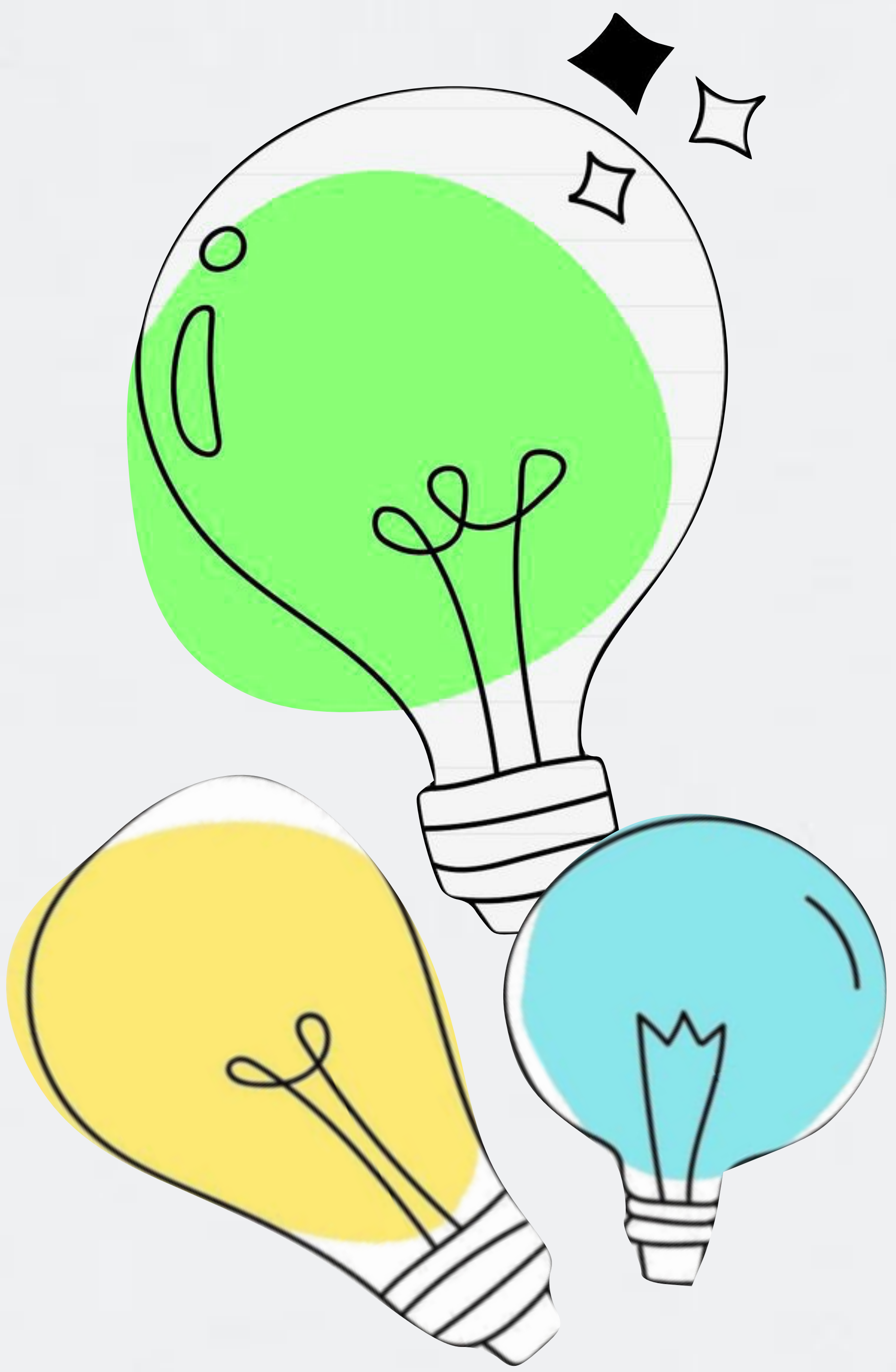
A $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

C $\left(2, \frac{-11\pi}{6}\right)$

D $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

مسابقات



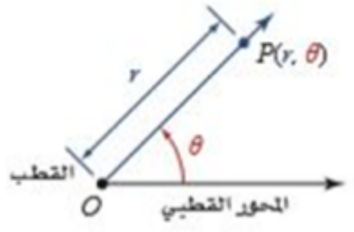
Wordwall

مقطع توضيحي

الإحداثيات القطبية

نظام الاحداثيات القطبية

يستخدم المسافات و الزوايا لتحديد الموقع



الاحداثي القطبي

هي زوج مرتب من الاعداد

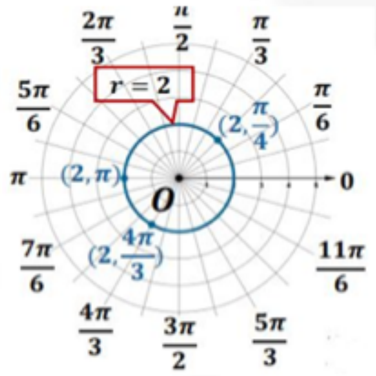
(r,θ)

التمثيل القطبي

مجموعة كل النقاط

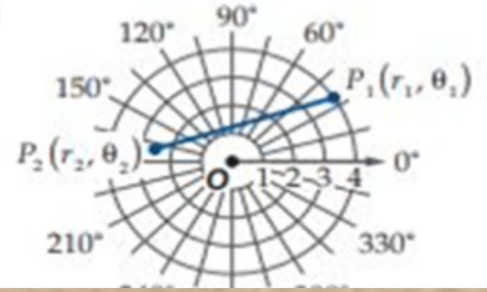
(r,θ)

التي تحقق احداثياتها المعادلة القطبية



المسافة بالصيغة القطبية

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



المعادلة القطبية

معادلة معطاة بدلالة الاحداثيات القطبية

التحويل من الصورة القطبية الى الاحداثيات الديكارتية

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

التحويل من الاحداثيات الديكارتية الى الصورة القطبية

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad if \ x > 0$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180° \quad if \ x < 0$$

$$\theta = 90° \ or \ 270° \quad if \ x = 0$$

الواجب المنزلي