

العلاقات في المثلث

Relationships in Triangle

الفصل 4

فيما سبق:

درست طرائق تصنيف المثلثات.

والآن:

- أتعرف القطع المستقيمة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- أتعرف العلاقات الخاصة بين أضلاع المثلث وزواياه.
- أكتب برهاناً غير مباشر.

لماذا؟

التصميم الداخلي:

تستعمل العلاقات في المثلث لإيجاد الأبعاد وقياسات الزوايا ومقارنتها. ويستعمل مهندسو التصميم الداخلي هذه العلاقات لتحسين تصاميمهم.

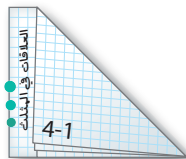


منظم أفكار

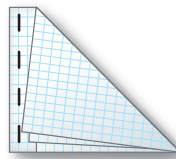
المطويات

العلاقات في المثلث: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 4، مبتدئاً بسبع أوراق رسم بياني.

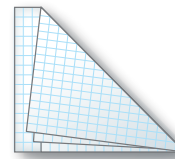
4 اكتب عنوان الفصل على الحافة المستطيلة، ورقم كل درس أسفل المثلث، وخصص الورقة الأخيرة للمفردات الجديدة كما هو موضح بالشكل.



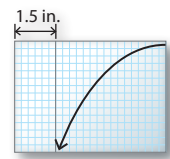
3 ثبّت الأوراق على طول الحافة المستطيلة في أربعة أماكن.



2 اطو الجزء المستطيل كما هو مبين بالشكل.



1 اجمع الأوراق، واطو الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلى لتشكل مثلثات متطابقة وحافة مستطيلة.





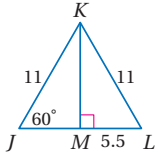
التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال 1



أوجد كلاً من القياسين الآتيين:

(a) $m\angle JKL$ (b) $m\angle J$

(a) بما أن $JK = KL$ (معطى)، فإن

$m\angle J = m\angle L$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)، وبما أن

$m\angle KML = m\angle KJM = 90^\circ$ (فإن هذا

يعني أن $\angle KML \cong \angle KJM$ ، ويكون $\triangle KML \cong \triangle KJM$ بحسب AAS، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين

المتطابقين تكون متطابقة، فإن $JM = ML = 5.5$

(b) $m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180^\circ$ (نظرية مجموع زوايا المثلث)

$60^\circ + m\angle JKL + 60^\circ = 180^\circ$ $m\angle J = m\angle L = 60^\circ$

$120^\circ + m\angle JKL = 180^\circ$ بسط

$m\angle JKL = 60^\circ$ اطرح 120 من الطرفين

مثال 2

ضع تخميناً مبنياً على المعطى الآتي، إذا كانت K نقطة منتصف $\overline{JL}$ ، وارسم شكلاً يوضح تخمينك.

المعطيات: K نقطة منتصف $\overline{JL}$.

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

الرسم:



مثال 3

حل المتباينة $3x + 5 > 2x$

معطى $3x + 5 > 2x$

اطرح $3x$ من الطرفين $3x - 3x + 5 > 2x - 3x$

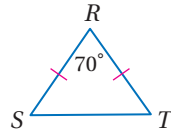
بسط $5 > -x$

اقسم الطرفين على -1 $-5 < x$

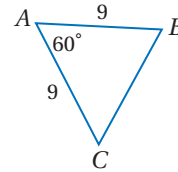
اختبار سريع

أوجد كلاً من القياسين الآتيين:

(2) $m\angle RST$



(1) BC



(3) **حداثي:** يصمم عبد الله حوضاً لزراعة الورود على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول كل من ضلعي القائمة 7 ft، فما طول الضلع الثالث (قرب إلى أقرب عدد صحيح)؟

للأسئلة 4-6 ضع تخميناً مبنياً على المعطيات وارسم شكلاً

يوضح تخمينك:

(4) $\angle 3, \angle 4$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم.

(5) $\square JKLM$ مربع.

(6) $\overrightarrow{BD}$ منصف $\angle ABC$.

(7) **تبرير:** حدّد ما إذا كان التخمين التالي المبني على المعطيات الواردة صحيحاً دائماً أو صحيحاً أحياناً أو غير صحيح أبداً. وفّر إجابتك.

المعطيات: D, E, F ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

التخمين: $DE + EF = DF$

حل كلاً من المتباينات الآتية:

(8) $x + 16 < 41$ (9) $x - 6 > 2x$

(10) $6x + 9 < 7x$ (11) $8x + 15 > 9x - 26$

(12) **صور:** أضافت نورة 15 صورة إلى ألبوم صورها، فأصبح عدد الصور أكثر من 120، فكم صورة كانت في الألبوم؟



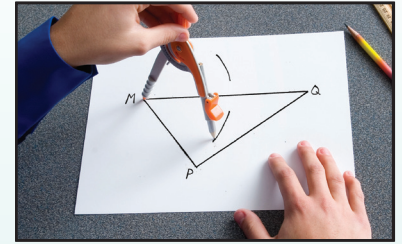
4-1 إنشاء المنصفات Constructing Bisectors

سوف تنشئ فيما يلي العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث والمنصف لإحدى زواياه. العمود المنصف لقطعة مستقيمة هو العمود على القطعة المار بمنتصفها.

إنشاء هندسي 1 العمود المنصف

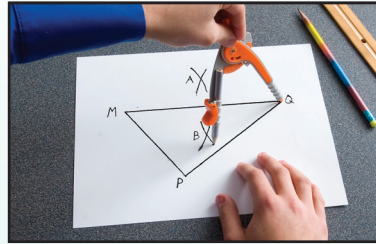
إنشاء العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث.

الخطوة 1:



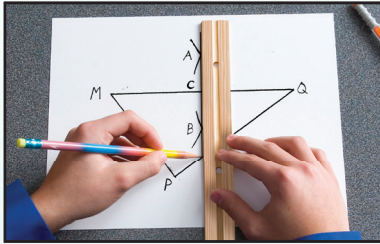
افتح الفرجار فتحة أكبر من $\frac{1}{2}MQ$ ، وارسم قوساً من الرأس M فوق $\overline{MQ}$ وقوساً آخر تحتها.

الخطوة 2:



استعمل فتحة الفرجار نفسها. وارسم من الرأس Q قوساً فوق $\overline{MQ}$ وقوساً آخر تحتها. وسم نقطتي تقاطع القوسين A, B.

الخطوة 3:



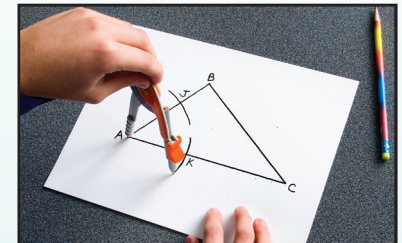
استعمل مسطرة غير مدرّجة وارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$. وسم نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{MQ}$ بالحرف C.

منصف زاوية في مثلث هو نصف مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.

إنشاء هندسي 2 منصف الزاوية

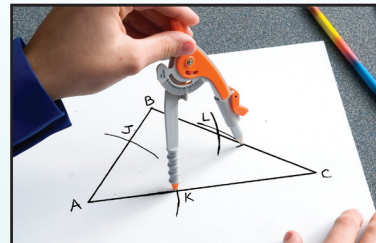
إنشاء منصف زاوية في مثلث.

الخطوة 1:



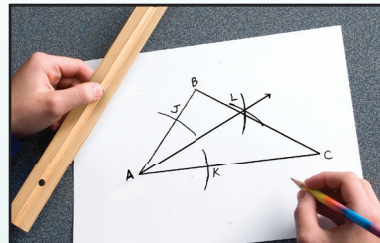
ثبت الفرجار عند الرأس A، وارسم قوساً يقطع $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. وسم نقطتي التقاطع J, K.

الخطوة 2:



ثبت الفرجار عند J، وارسم قوساً داخل الزاوية A، وارسم من K قوساً آخر، مستعملاً فتحة الفرجار نفسها، على أن يقطع القوس الأول في نقطة سمها L.

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overleftrightarrow{AL}$ ، وهو منصف للزاوية A في $\triangle ABC$.

التمثيل والتحليل:

1) أنشئ العمودين المنصفين للضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. ثم أنشئ منصفين الزاويتين الباقيتين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ حول نقطة التلاقي في الحالتين؟



كرّر الإنشاءين السابقين لكل نوع من المثلثات الآتية:

2) حادّ الزوايا

3) منفرج الزاوية

4) قائم الزاوية



المنصفات في المثلث

Bisectors of Triangle

4-1



لماذا؟

إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كلٍّ من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث.

فيما سبق:

درست منصف القطعة المستقيمة ومنصف الزاوية.

والآن:

- أتعرف الأعمدة المنصفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرف منصفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصف

perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية

concurrent lines

نقطة التلاقي

point of concurrency

مركز الدائرة الخارجية

للمثلث

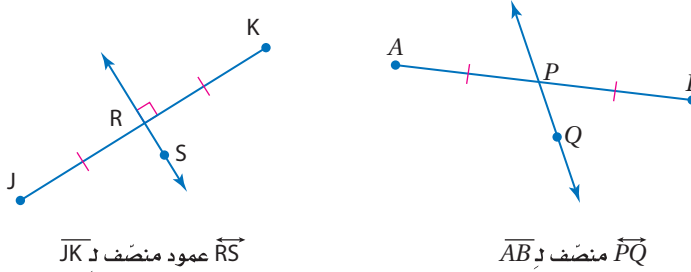
circumcenter

مركز الدائرة الداخلية

للمثلث

incenter

الأعمدة المنصفة: تعلمت سابقاً أن منصف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها، وإذا كان المنصف عمودياً على القطعة سُمي **عموداً منصفاً**.



تذكر أن المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطاً معيناً، فالعمود المنصف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط في المستوى، تقع كلٌّ منها على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

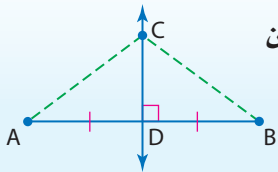
نظريتان

الأعمدة المنصفة

أضف إلى
مطوياتك

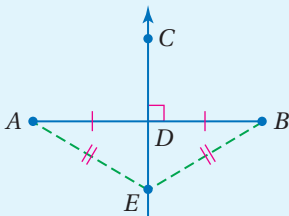
4.1 نظرية العمود المنصف

كل نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.
مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ عموداً منصفاً لـ $\overline{AB}$ ، فإن $AC = BC$.



4.2 عكس نظرية العمود المنصف

كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.
مثال: إذا كان $AE = BE$ ، و $\overleftrightarrow{CD}$ هو العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ ، فإن E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$.

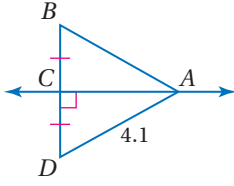


سوف تبرهن النظريتين 4.1، 4.2 في السؤالين 27، 29.

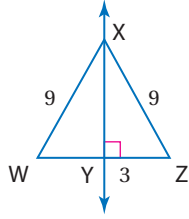
استعمال نظريات العمود المنصف

مثال 1

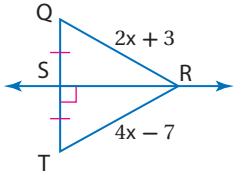
أوجد كل قياس مما يأتي :
AB (a)



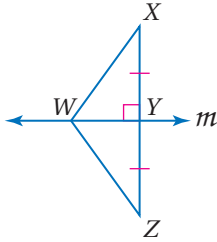
WY (b)



RT (c)



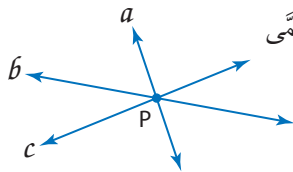
تحقق من فهمك



1A إذا كان $WX = 25.3$, $YZ = 22.4$, $WZ = 25.3$ ، فأوجد طول $\overline{XY}$.

1B إذا كان m عموداً منصفاً لـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$ ، فأوجد طول $\overline{WX}$.

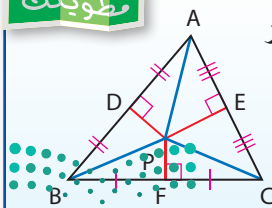
1C إذا كان m عموداً منصفاً لـ $\overline{XZ}$ ، $WX = 4a - 15$ ، $WZ = a + 12$ ، فأوجد طول $\overline{WX}$.



تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P .

عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة، فإن هذه المستقيمات تُسمى **مستقيمات متلاقية**. والنقطة التي تلتقي فيها المستقيمات تسمى **نقطة التلاقي**.
وبما أن لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإن له ثلاثة أعمدة منصفة. وهذه الأعمدة المنصفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصفة **مركز الدائرة الخارجية للمثلث**.

أضف إلى
مطوبتك



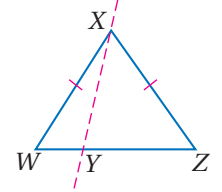
نظرية 4.3 مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمى مركز الدائرة الخارجية للمثلث، وهي دائرة تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الخارجية للمثلث $\triangle ABC$ ، فإن $PB = PA = PC$.

إرشادات للدراسة

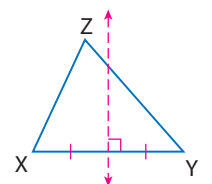
المعلومة $WX = ZX$ لوحدها لا تعد كافية لاستنتاج أن $\overline{XY}$ عمود منصف لـ $\overline{WZ}$.



إرشادات للدراسة

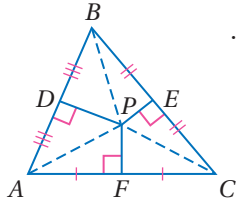
العمود المنصف

ليس من الضروري أن يمر العمود المنصف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل. فمثلاً في $\triangle XYZ$ أدناه العمود المنصف لـ $\overline{XY}$ لا يمر بالرأس Z .



برهان

نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث



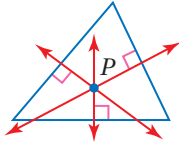
المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

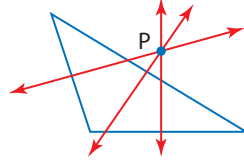
برهان حر:

بما أن P تقع على العمود المنصف لـ $\overline{AC}$ ، فإنها متساوية البعد عن A, C .
أي أن $AP = CP$. والعمود المنصف لـ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P . لذلك يكون $CP = BP$ ، وتبعًا لخاصية التعدي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$ ؛ إذن $AP = CP = BP$.

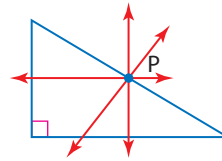
يمكن أن يقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزاوية



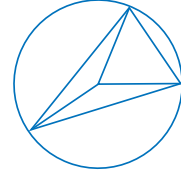
مثلث قائم الزاوية

إرشادات للدراسة

مركز الدائرة

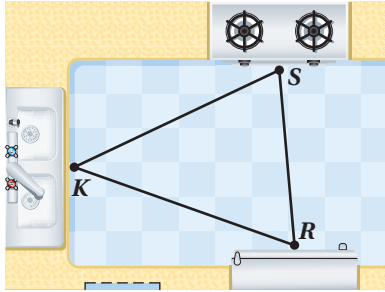
الخارجية للمثلث:

هو مركز الدائرة التي تمر برؤوس هذا المثلث.

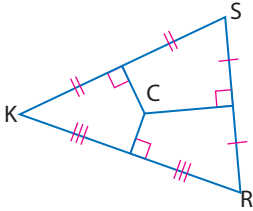


استعمال نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث

مثال 2 من واقع الحياة



تصميم داخلي: تطبيقًا للفكرة التي وردت في فقرة (لماذا؟)، إذا وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R .



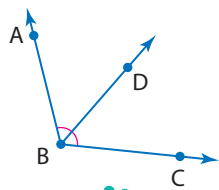
2) يريد علي أن يضع مرشّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل. فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟

تحقق من فهمك



الربط مع الحياة

يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب ألا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.



BD منصف لـ $\angle ABC$.

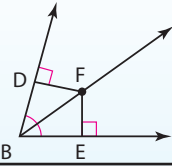
وزارة التعليم

Ministry of Education

نظريتان

منصفات الزوايا

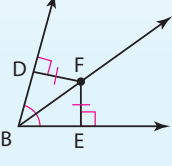
أضف إلى مطوبتك



4.4 نظرية منصف الزاوية

كل نقطة تقع على منصف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصفاً لـ $\angle DBE$ ، وكان $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ ، $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ ، فإن $DF = FE$.



4.5 عكس نظرية منصف الزاوية

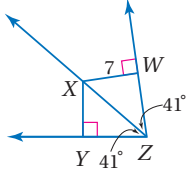
كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصف الزاوية.

مثال: إذا كان $DF = FE$ ، $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ ، $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ ، فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$.

ستبرهن النظريتين 4.4، 4.5 في السؤالين 30، 32

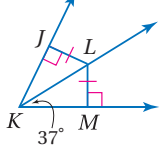
مثال 3

استعمال نظريتي منصفات الزوايا

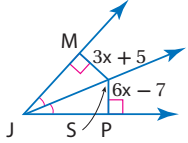


أوجد كل قياس مما يأتي:

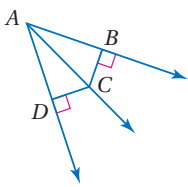
(a) $\angle XY$



(b) $m\angle JKL$



(c) SP



(3A) إذا كان: $BC = 5$ ، $DC = 5$ ، $m\angle BAC = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle DAC$

(3B) إذا كان: $DC = 10$ ، $m\angle DAC = 40^\circ$ ، $m\angle BAC = 40^\circ$ ، فأوجد BC

(3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle DAB$ ، و $DC = 9x - 7$ ، $BC = 4x + 8$ ، فأوجد BC

إرشادات للدراسة

منصف الزاوية

لا تعد المعلومة

b في الفرع $JL = LM$

لوحدها كافية لاستنتاج

أن $\overrightarrow{KL}$ ينصف $\angle JKM$.

تحقق من فهمك

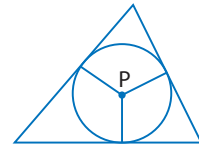
وكما هو الحال في الأعمدة المنصّفة، بما أن للمثلث ثلاث زوايا، فإنّ له ثلاثة منصّفات للزوايا تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

قراءة الرياضيات

مركز الدائرة

الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع داخل المثلث دائماً.



أضف إلى

مطوياتك

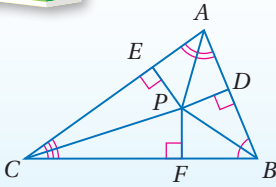
نظرية 4.6

نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC ،

$$PD = PE = PF$$



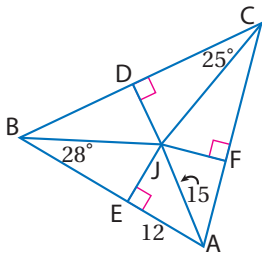
ستبرهن النظرية 4.6 في السؤال 28

مثال 4

استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أوجد كلّاً من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

(a) JF



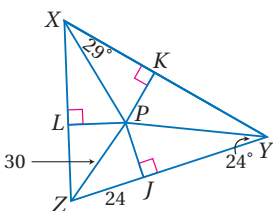
(b) $m\angle JAC$

تحقق من فهمك

إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$ ، فأوجد القياسين الآتيين:

(4A) PK

(4B) $\angle LZP$

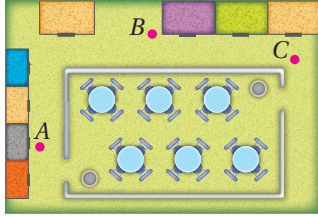
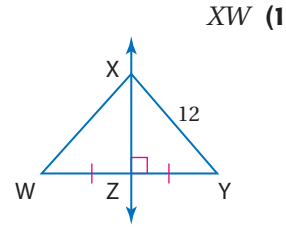
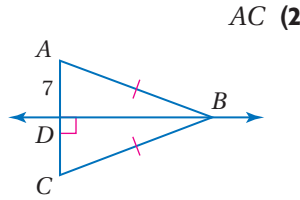
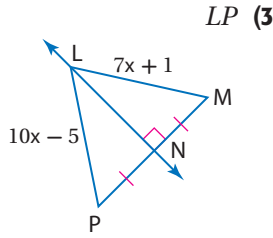


وزارة التعليم

Ministry of Education

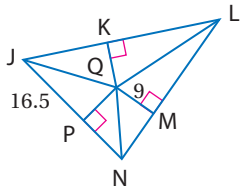
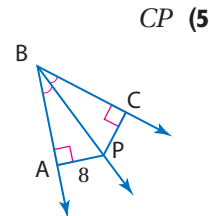
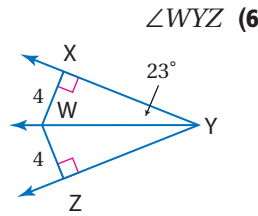
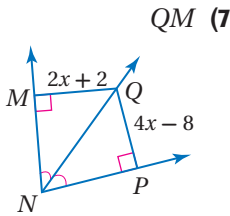
الدرس 1-4 المنصّفات في المثلث 8522

المثال 1 أوجد كل قياس مما يأتي:



المثال 2 (4) إعلانات: يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أما الرابع فكان يزودهم بالإعلانات. انسخ المواقع A, B, C في دفترك، ثم عيّن مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعاد متساوية من أصدقائه الثلاثة.

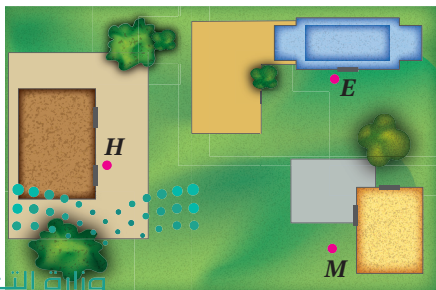
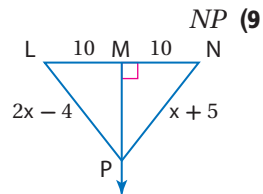
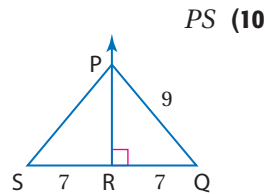
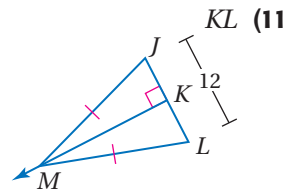
المثال 3 أوجد كل قياس مما يأتي:



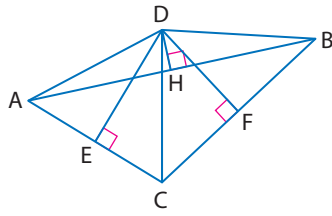
المثال 4 (8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$ ، فأوجد طول $\overline{JQ}$.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كل قياس مما يأتي:



المثال 2 (12) مدرسة: يتكون مجمع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبينة في الصورة المجاورة. انسخ مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.



النقطة D مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

$\overline{AH}$ (14)

$\overline{AD}$ (13)

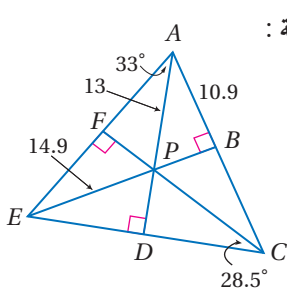
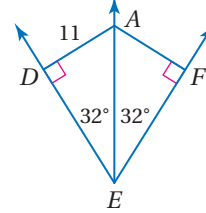
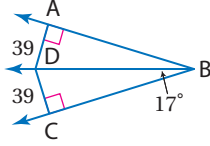
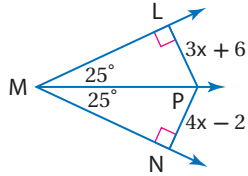
أوجد قياس كلٍّ ممَّا يأتي :

المثال 3

PN (17)

$\angle DBA$ (16)

AF (15)



إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$ ، فأوجد كلاً من القياسات الآتية :

PB (18)

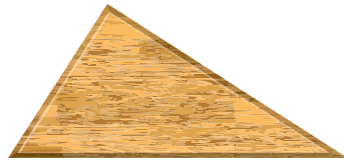
DE (19)

$\angle DAC$ (20)

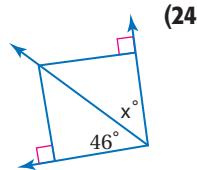
$\angle DEP$ (21)

المثال 4

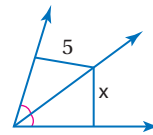
(22) **تصميم داخلي:** توضع زهرية فضيَّة عند مركز سطح الطاولة المبيَّنة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حوافه. انسخ الرسم المجاور في دفترك، ويبيِّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك.



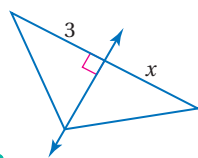
حدِّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x . وضح إجابتك.



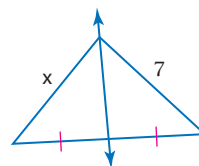
(24)



(23)



(26)



(25)



الربط مع الحياة

مهندس التصميم الداخلي

يزيِّن مهندس الديكور المكان؛ بحيث يجعله بهيج المنظر ومريحاً للإقامة أو العمل فيه. ويجب على مهندسي الديكور أن يكونوا على معرفة بالألوان وتصاميم الإضاءة وتخطيط المكان.



وزارة التعليم

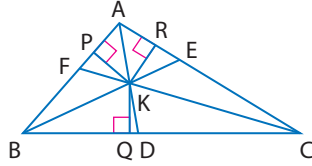
Ministry of Education

الدرس 1-4 المنصفات في المثلث - 8722

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لكل من النظريتين الآتيتين:

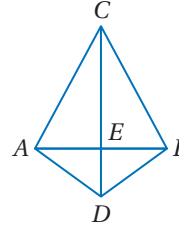
النظرية 4.6 (28)

المعطيات: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصفات لزوايا $\triangle ABC$ ،
 $\overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp \overline{BC}$
 $\overline{KR} \perp \overline{AC}$
المطلوب: $KP = KQ = KR$



النظرية 4.2 (27)

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$
المطلوب: النقطتان C, D تقعان على
العمود المنصف لـ $\overline{AB}$



برهان: اكتب برهاناً حرّاً لكل من النظريتين الآتيتين:

النظرية 4.5 (30)

(31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي إحداثيّا نقطتي طرفيها هما $A(-3, 1), B(4, 3)$. ووضح إجابتك.

النظرية 4.1 (29)

(32) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 4.4.

(33) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيّ مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$. وضح إجابتك.

(34) **المحل الهندسي:** انظر إلى القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ ، وصِف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كل منها بُعدين متساويين عن C, D



مسائل مهارات التفكير العليا

(35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثاً، على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له داخله، ويقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. برّر صحّة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتي التلاقي.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً أو ليست صحيحة أبداً. وبرّر إجابتك.

(36) تتقاطع منصفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

(37) في المثلث المتطابق الضلعين، يكون العمود المنصف للقاعدة منصفاً لزواية الرأس المقابلة للقاعدة.

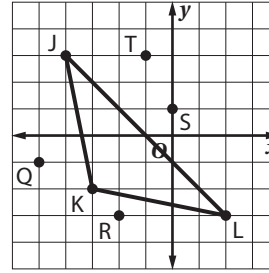
(38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث ومنصفات زواياه مبيّناً أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتي التلاقي.

تدريب على اختبار

(40) إذا كانت $x \neq -3$ ، فإن $\frac{3x+9}{x+3}$ يساوي:

- A $x + 9$
B $x + 3$
C x
D 3

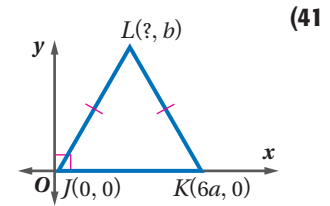
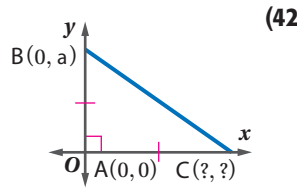
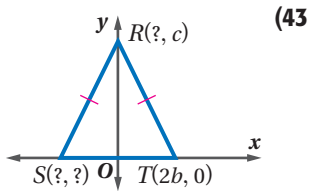
(39) بأيّ نقطتين يمر العمود المنصف للضلع $\overline{JL}$ في $\triangle JKL$ ؟



- A T, K
B L, Q
C J, R
D S, K

مراجعة تراكمية

عين الإحداثي المجهول في كلٍّ من المثلثات الآتية : (الدرس 3-7)



أوجد البعد بين المستقيم والنقطة المعطاة في كلٍّ مما يأتي : (مهارة سابقة)

(44) $y = 5, (-2, 4)$

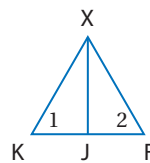
(45) $y = 2x + 2, (-1, -5)$

(46) $2x - 3y = -9, (2, 0)$

استعد للدرس اللاحق

(47) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين:

المعطيات: $\triangle XKF$ متطابق أضلاع.
 $\overline{XJ}$ تنصّف $\angle X$.
المطلوب: J نقطة منتصف $\overline{KF}$.





إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات Constructing Medians and Altitudes

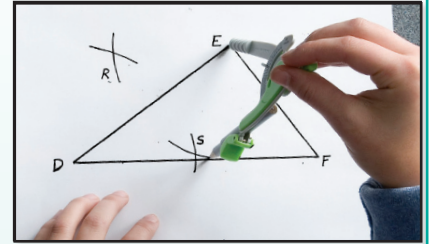
4-2

القطعة المتوسطة في مثلث هي قطعة مستقيمة، طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس. ويمكنك استعمال طريقة تعيين نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة لإنشاء قطعة متوسطة.

إنشاء هندسي 1

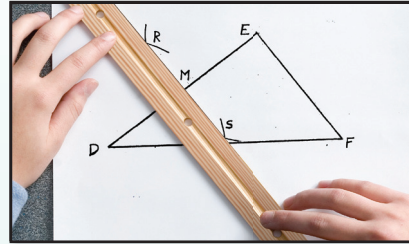
قطعة متوسطة لمثلث

الخطوة 1:



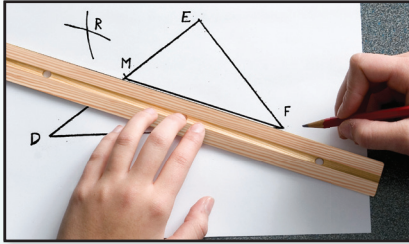
ثبت الفرجار عند الرأس D ثم عند الرأس E ؛ لترسم أقواساً متقاطعة فوق $\overline{DE}$ وتحتها، وسمّ نقطتي التقاطع R, S .

الخطوة 2:



استعمل مسطرة لإيجاد نقطة تقاطع $\overline{RS}, \overline{DE}$ ، وسمّ نقطة المنتصف M .

الخطوة 3:



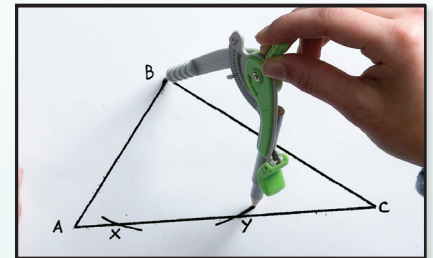
ارسم مستقيماً يمرّ بالنقطتين F, M ، فتكون $\overline{FM}$ قطعة متوسطة لـ $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل، وتكون عمودية عليه.

إنشاء هندسي 2

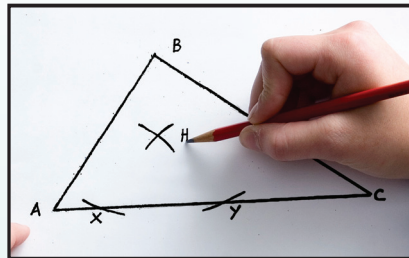
ارتفاع المثلث

الخطوة 1:



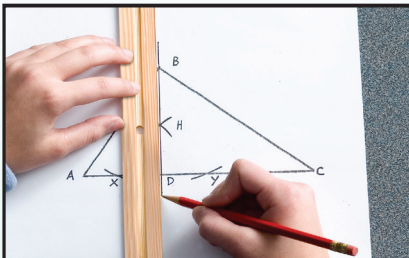
ثبت الفرجار عند الرأس B ، وارسم قوسين يقطعان $\overline{AC}$ في النقطتين X, Y .

الخطوة 2:



عدّل فتحة الفرجار على أن تكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبته عند X ، وارسم قوساً فوق $\overline{AC}$ ، ثم استعمل الفتحة نفسها وارسم قوساً آخر من Y ، وسمّ نقطة تقاطع القوسين H .

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overrightarrow{BH}$ ، وسمّ نقطة تقاطع $\overrightarrow{BH}, \overline{AC}$ بالحرف D ، فتكون $\overline{BD}$ ارتفاعاً لـ $\triangle ABC$ وهي عمودية على $\overline{AC}$.

التمثيل والتحليل:

- أنشئ القطعتين المتوسطتين على الضلعين الآخرين في $\triangle DEF$ ، ماذا تلاحظ بالنسبة للقطع المتوسطة للمثلث؟
- أنشئ الارتفاعين الآخرين على الضلعين الآخرين في $\triangle ABC$ ، ماذا تلاحظ؟

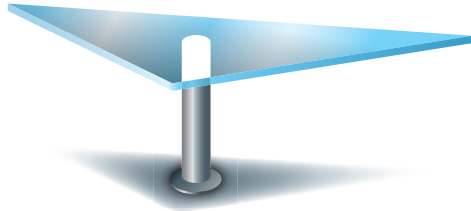




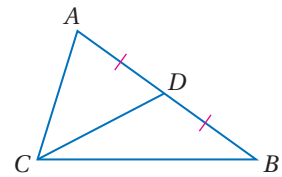
القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

Medians and Altitudes of Triangle

4-2



صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن، يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يرتكز على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو في حاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها، ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.



$\overline{CD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$.

القطع المتوسطة: القطعة المتوسطة لمثلث قطعة

مستقيمة طرفيها أحد رؤوس

المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة تسمى **مركز المثلث**، وتقع داخله دائماً.

فيما سبق:

درست الأعمدة المنصّفة
ومنصفات الزوايا في
المثلث واستعملتها.

والآن:

- أتعرف القطع المتوسطة
- في المثلث وأستعملها.
- أتعرف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

المفردات:

القطعة المتوسطة

median

مركز المثلث

centroid

الارتفاع

altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث

orthocenter

أضف إلى

مطوبتك

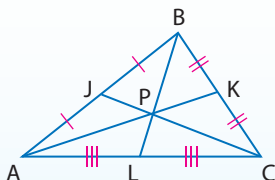
نظرية 4.7

نظرية مركز المثلث

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإن

$$AP = \frac{2}{3}AK, BP = \frac{2}{3}BL, CP = \frac{2}{3}CJ$$

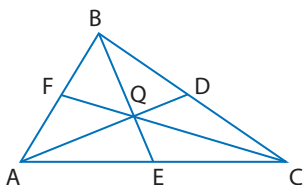


مثال 1

استعمال نظرية مركز المثلث

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$ ، $BE = 9$.

فأوجد كلاً من BQ ، QE .



تحقق من فهمك

في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولي القطعتين الآتيتين:

QC (1B)

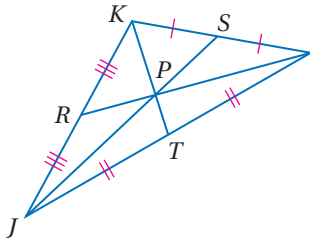
FQ (1A)



وزارة التعليم

Ministry of Education

مثال 2 استعمال نظرية مركز المثلث



في $\triangle JKL$ ، إذا كان $PT = 2$ ، فأوجد KP .

إرشادات للدراسة

استعمال الحسن العددي

في المثال 2، يمكنك

أيضاً استعمال الحسن

العددي لإيجاد KP .

بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$ ،

فإن $PT = \frac{1}{3}KT$

وكذلك $KP = 2PT$ ؛

لذا إذا كان $PT = 2$

فإن $KP = 2(2) = 4$.

تحقق من فهمك

في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $JP = 9$ ، $RP = 3.5$ ، فأوجد طولي القطعتين:

PS (2B)

PL (2A)

جميع المضلعات لها نقطة اتزان، وهذه النقطة تعتبر مركز ثقل الجسم، وهي النقطة التي يظهر فيها الجسم متوازناً تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

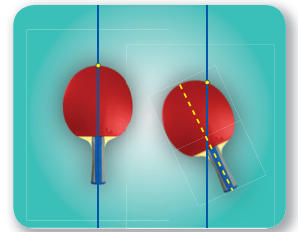
مثال 3 من واقع الحياة إيجاد المركز في المستوى الإحداثي



فن الأداء: في مهرجان رياضي يُخطط عبدالعزيز لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور، وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10)$ ، $(5, 0)$ ، $(9, 5)$. ما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبت المثلث عندها حتى يحفظه متوازناً؟ وضح إجابتك.

افهم:

خطط:



الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)

يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:

علق الجسم من أي نقطة،

وعندما يتوقف عن التراجع.

ارسم مستقيماً رأسياً من

نقطة التعليق، ثم علقه مرة

أخرى من نقطة ثانية وارسم

مستقيماً رأسياً منها، فتكون

نقطة تقاطع المستقيمين هي

نقطة الاتزان.

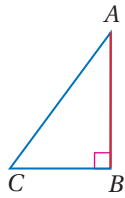
حل:

تحقق:

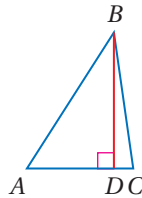
تحقق من فهمك

3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(12, 1)$ ، $(6, 11.5)$ ، $(0, 4)$ ، فما إحداثيات النقطة التي يتزن عندها هذا المثلث؟ وضح إجابتك.

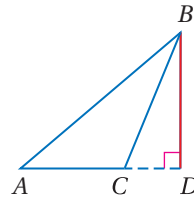
ارتفاعات المثلث: ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



$\overline{AB}$ هو الارتفاع إلى $\overline{CB}$.



$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.



قراءة الرياضيات

ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.

ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقى المستقيمت التي تحويها في نقطة مشتركة.

أضف إلى
مطويتك

مفهوم أساسي

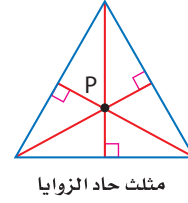
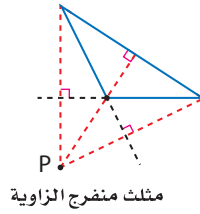
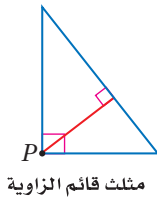
ملتقى الارتفاعات

تتقاطع المستقيمت التي تحوي ارتفاعات أي مثلث في نقطة تُسمى **ملتقى الارتفاعات**.

مثال:

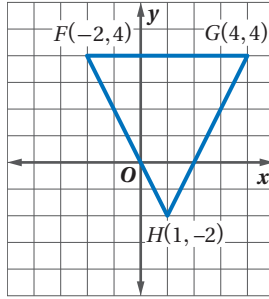
تتقاطع المستقيمت التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}$ ، $\overline{CD}$ ، $\overline{BG}$ عند النقطة P ، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC .

يمكن أن تلتقي الارتفاعات في مثلث داخله أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثية: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2, 4)$, $G(4, 4)$, $H(1, -2)$ ، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1:

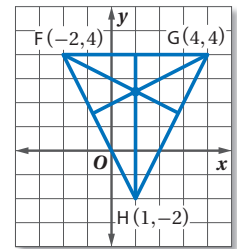
الخطوة 2:

الخطوة 3:

إرشادات للدراسة

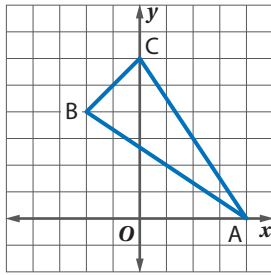
التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريباً عند $(1, 2\frac{1}{2})$ ؛ لذا فالجواب معقول.



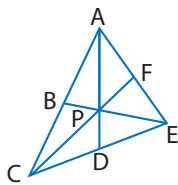


تحقق من فهمك

(4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصية	مثال
العمود المنصف		مركز الدائرة الخارجية للمثلث	P مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز $\triangle ABC$ ، وتبعد عن كل رأس ثلثي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	

تأكد



إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $AD = 15$ ، $PF = 6$. فأوجد كل طول مما يأتي:

(1) PC

(2) AP

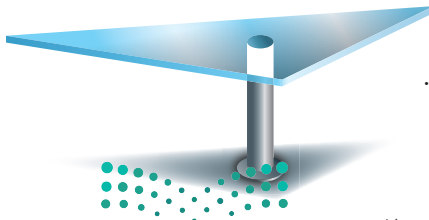
المثالان 1, 2

(3) تصميم داخلي: بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، إذا كانت

إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط $(3, 6)$ ، $(5, 2)$ ، $(7, 10)$.

فعند أي نقطة ستوضع الدعامة؟

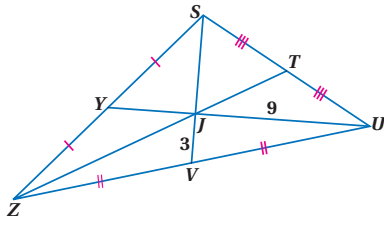
المثال 3



(4) هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه:

$A(-3, 3)$ ، $B(-1, 7)$ ، $C(3, 3)$

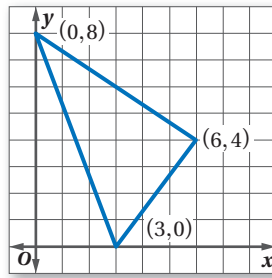
المثال 4



المثالان 1, 2 في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد كل طول مما يأتي:

SJ (6)	YJ (5)
SV (8)	YU (7)
ZJ (10)	JT (9)

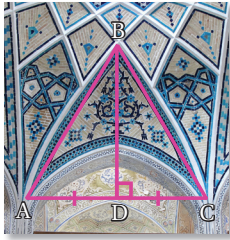
المثال 3 (11) **تصميم داخلي:** صنعت كوثر لوحة مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه لتضع عليها صور معالم مشهورة. وأرادت أن تعلقها في سقف حجرتها على أن تكون موازية له. فعند أي نقطة يجب أن تُثبت الخيط؟



المثال 4 (12) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه:

$$J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$$

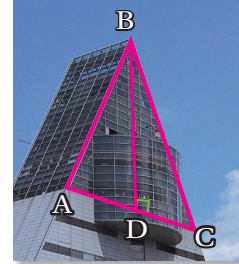
صنّف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصف:



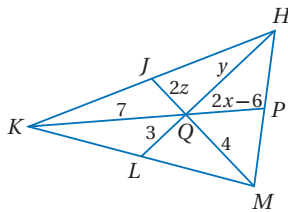
15



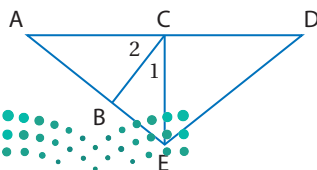
14



13

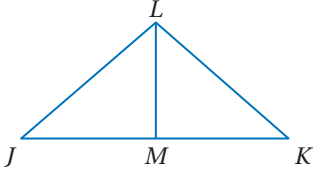


(16) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت J, P, L نقاط منتصفات $\overline{KH}$, $\overline{HM}$, $\overline{MK}$ على الترتيب، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y, z .



(17) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعاً لـ $\triangle AED$ ، $m\angle 1 = (2x + 7)^\circ$ ، $m\angle 2 = (3x + 13)^\circ$ ، فأوجد كلا من $m\angle 1, m\angle 2$.

في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عموداً منصفاً، أو قطعة متوسطة، أو ارتفاعاً لـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:



$$\triangle JLM \cong \triangle KLM \quad (19)$$

$$\overline{LM} \perp \overline{JK} \quad (18)$$

$$\overline{LM} \perp \overline{JK}, \overline{JL} \cong \overline{KL} \quad (21)$$

$$\overline{JM} \cong \overline{KM} \quad (20)$$

(22) **برهان:** اكتب برهاناً حرّاً.

(23) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$

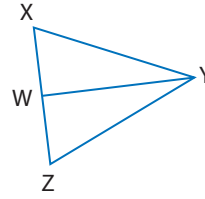
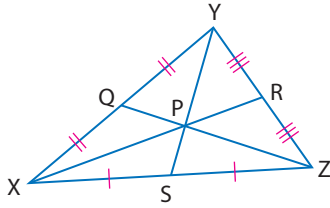
المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه

قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$

$\overline{WY}$ تنصّف $\angle Y$ ، $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$

$$\frac{XP}{PR} = 2 \quad \text{المطلوب:}$$

المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

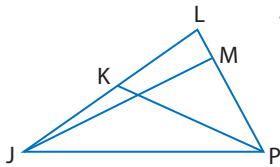


(24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف مواقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

(a) **عملياً:** أنشئ ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع ومختلفة بعضها عن بعض على ورق سهل الطي، ثم قصّها. واطو كل مثلث لتحديد موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

(b) **لفظياً:** خمن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع.

(c) **بيانياً:** ارسم مثلثاً متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعين مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدّد إحداثيات كل نقطة منها.



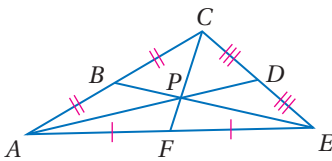
جبر: في $\triangle JLP$ ، $LK = 5y - 8$ ، $JK = 3y - 2$ ، $m\angle JMP = (3x - 6)^\circ$.

(25) إذا كانت $\overline{JM}$ ارتفاعاً لـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x .

(26) إذا كانت $\overline{PK}$ قطعة متوسطة، فأوجد LK .

مسائل مهارات التفكير العليا

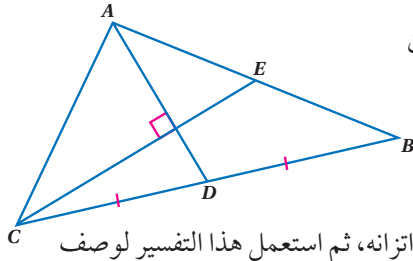
(27) **اكتشف الخطأ:** قال صفوان: إن $\frac{2}{3}AP = AD$ في الشكل المجاور.



ولكن عبد الكريم لم يوافق في ذلك، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

(28) **تبرير:** هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فأعط مثلاً مضاداً. "ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة."





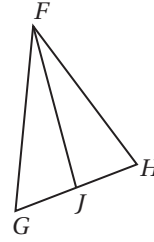
(29) **تحديد:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{AD}$ ، $\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CE = 9$ ، $AB = 10$ ، فأوجد CA

(30) **اكتب:** استعمل المساحة لتفسر لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

تدريب على اختبار

(32) ما المقطع x للمستقيم $4x - 6y = 12$ ؟

- A 3
B 2
C -3
D -2

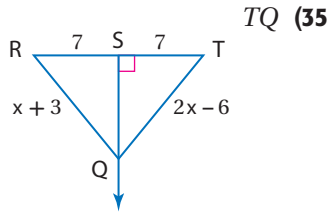


(31) في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$ ، فأأي عبارة مما يأتي صحيحة؟

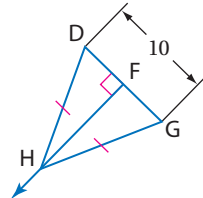
- A $\overline{FJ}$ ارتفاع $\triangle FGH$
B $\overline{FJ}$ منصف زاوية في $\triangle FGH$
C $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في $\triangle FGH$
D $\overline{FJ}$ عمود منصف في $\triangle FGH$

مراجعة تراكمية

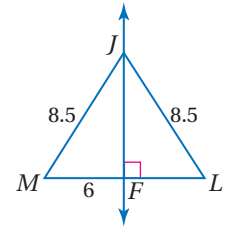
أوجد كل قياس مما يأتي : (الدرس 4-1)



(35) TQ



(34) DF



(33) LM

(36) ارسم المثلث المتطابق الضلعين QRT في المستوى الإحداثي الذي طول قاعدته $\overline{QR}$ يساوي b وحدة، وحدد إحداثيات رؤوسه. (الدرس 3-7)

(37) بين ما إذا كان $\overrightarrow{RS}$ ، $\overrightarrow{JK}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $R(1, 1)$ ، $S(9, 8)$ ، $J(-6, 1)$ ، $K(2, 8)$ ، وارسم كل مستقيم لتتحقق من إجابتك. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

اكتب > أو < داخل $\bigcirc$ لتحصل على عبارة صحيحة.

(41) $-4.25 \bigcirc -\frac{19}{4}$

(40) $2.7 \bigcirc \frac{3}{5}$

(39) $\frac{3}{8} \bigcirc \frac{5}{16}$

(38) $-\frac{18}{25} \bigcirc \frac{19}{27}$



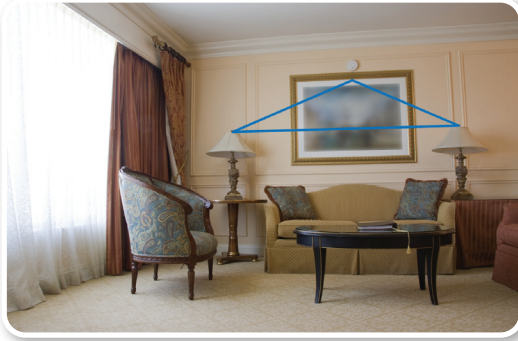


المتباينات في المثلث

Inequalities in One Triangle

4-3

لماذا؟



يستعمل المصممون طريقة تُسمى التثليث؛ لإعطاء الغرفة مظهرًا يُوحى بالاتساع، ومن الأمثلة على هذه الطريقة وضع طاولة صغيرة عند كل طرف من طرفي أريكة مع وضع لوحة فوقها. على أن يكون قياس كل زاوية من زاويتي قاعدة المثلث أقل من قياس الزاوية الثالثة.

فيما سبق:

درست العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

والآن:

- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.

متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتُستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.

أضف إلى
مطوبتك

تعريف المتباينة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $a > b$ ، إذا وفقط إذا وُجدَ عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$

مثال إذا كان $5 = 2 + 3$ ، فإن $5 > 2$

وفي الجدول أدناه قائمة ببعض خصائص المتباينات التي درستها.

أضف إلى
مطوبتك

خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية

مفهوم أساسي

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

خاصية المقارنة	$a > b$ أو $a = b$ أو $a < b$
خاصية التعدي	(1) إذا كان $a < b, b < c$ ، فإن $a < c$. (2) إذا كان $a > b, b > c$ ، فإن $a > c$.
خاصية الجمع	(1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. (2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصية الطرح	(1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. (2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.

يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقية.

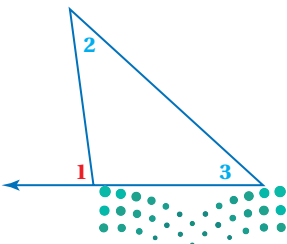
تأمل $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ في الشكل المجاور.

من نظرية الزاوية الخارجية، تعلم أن $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$

وبما أن قياسات الزوايا أعداد موجبة، إذن نستنتج أن:

$$m\angle 1 > m\angle 2 \quad \text{و} \quad m\angle 1 > m\angle 3$$

وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:



أضف إلى

مطوياتك

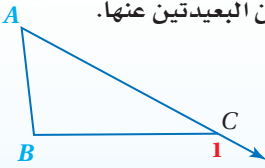
متباينة الزاوية الخارجية

نظرية 4.8

قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخليتين البعديتين عنها.

$$\text{مثال: } m\angle 1 > m\angle A$$

$$m\angle 1 > m\angle B$$



ستبرهن هذه النظرية في الدرس 4-4

مراجعة المفردات

الزاويتان الداخليتان البعديتان

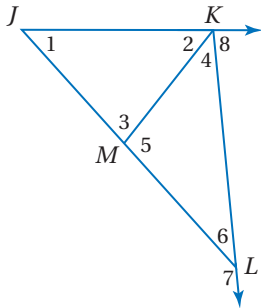
لكل زاوية خارجية
لمثلث زاويتان داخليتان
بعيدتان وهما الزاويتان
غير المجاورتين لها.

مثال 1

استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجية

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كل مما يأتي:

(a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

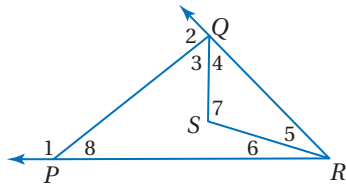


(b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

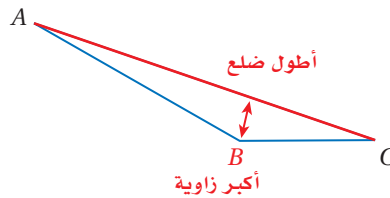
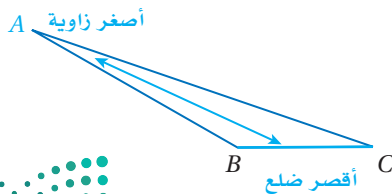
تحقق من فهمك

(1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$

(1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$



العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه: في الدرس 3-6، تعلمت أنه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان. ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متطابقين. وللإجابة عن هذا السؤال، افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.



لاحظ أن أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاوية، وبالمثل فإن أقصر ضلع يقابل أصغر زاوية أيضًا.

تنبيه

تحديد الضلع المقابل

انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة، فالضلعان اللذان يشكلان الزاوية لا يمكن أن يكون أحدهما مقابلًا لها.

وزارة التعليم

Ministry of Education

2022 - 1444

إن العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث المنفرج الزاوية والمختلف الأضلاع تكون صحيحة لجميع المثلثات، ويمكن صياغتها باستعمال المتباينات في النظريتين الآتيتين:

تنبيه !

رمز الزاوية والمتباينة

يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهاً لرمز أقل من ($<$)، وخاصة عند الكتابة باليد؛ لذا كن دقيقاً في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستعمل الرمز معاً.

أضف إلى
مطوبتك

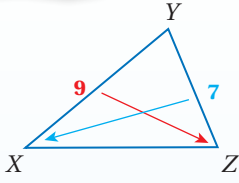
نظريتان

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

4.9

متباينة ضلع-زاوية: إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

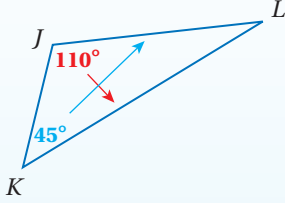
مثال بما أن $XY > YZ$ ، فإن $m\angle Z > m\angle X$.



4.10

متباينة زاوية-ضلع: إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الكبرى يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

مثال بما أن $m\angle J > m\angle K$ ، فإن $KL > JL$.



برهان

النظرية 4.9

المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه $AB > BC$.

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$.

البرهان:

بما أن $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنه توجد نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم $\overline{CD}$ لتشكّل $\triangle BCD$ المتطابق الضلعين، وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 1 \cong \angle 2$ ، واستناداً إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

واعتماداً على مسلمة جمع قياسات الزوايا يكون $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة. وبالتعويض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

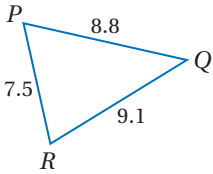
وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجية يكون $m\angle 1 > m\angle A$. وبما أن $m\angle BCA > m\angle 1$ ، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدي للمتباينة.

ستبرهن النظرية 4.10 في الدرس 4-4

ترتيب زوايا المثلث وفقاً لقياساتها

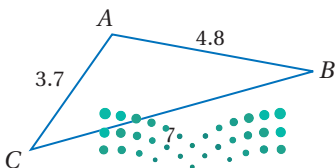
مثال 2

اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتبة من الأصغر إلى الأكبر.



تحقق من فهمك

(2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ مرتبة من الأصغر إلى الأكبر.

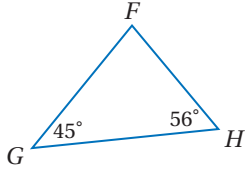


وزارة التعليم

Ministry of Education

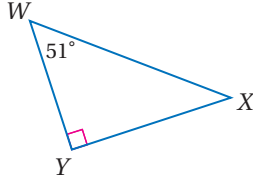
مثال 3 ترتيب أضلاع المثلث وفقاً لأطوالها

اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتبة من الأقصر إلى الأطول.



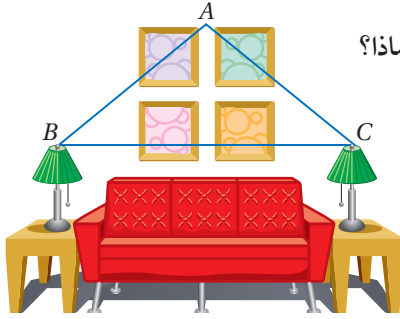
تحقق من فهمك

3 اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلعه، مرتبة من الأصغر إلى الأكبر.



ويمكنك استعمال العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

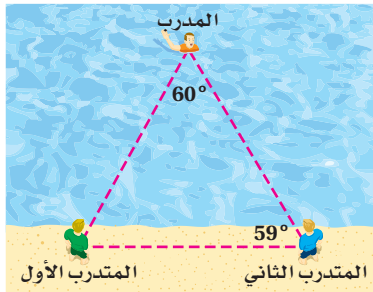
مثال 4 من واقع الحياة العلاقات بين الزوايا والأضلاع



تصميم داخلي: يستعمل مصمم فكرة التثليث الواردة في فقرة لماذا؟ لترتيب غرفة الاستقبال.

فإذا أراد المصمم أن يكون $m\angle B$ أقل من $m\angle A$ ، فأى مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C ؟ فسر إجابتك.

تحقق من فهمك



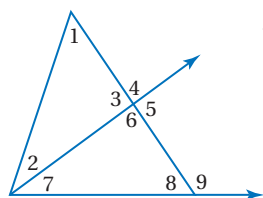
4 **سباحو الإنقاذ:** في أثناء التدريب يُمثل المدرّب دور

شخص في خطر ليتمكّن المتدربان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرّب والمتدرب الأول والثاني في المواقع المبينة في الشكل، فأى المتدربين أقرب إلى المدرّب؟

الربط مع الحياة

برامج إعداد المنقذين في السباحة تتضمن تدريباً على المراقبة والإنقاذ والإسعافات الأولية، وتتراوح مدة البرنامج عادة ما بين 30 إلى 37 ساعة، تبعاً لطبيعة الوسط المائي مثل البرك أو شواطئ البحار.





استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية، لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي :

المثال 1

(1) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

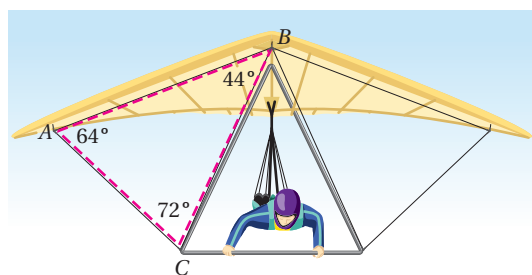
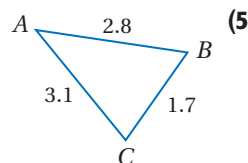
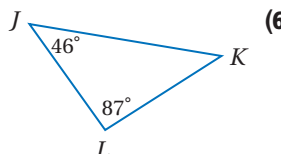
(2) قياساتها أكبر من $m\angle 7$.

(3) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

(4) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

اكتب زوايا كل مثلث مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين :

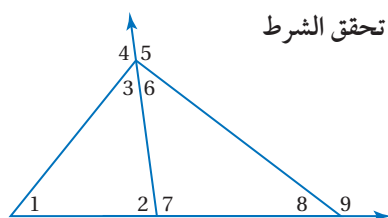
المثالان 2, 3



(7) **طيران شراعي**: تشكّل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة. فأأي دعامة تكون أطول: $\overline{AC}$ أم $\overline{BC}$ ؟ وضح إجابتك.

المثال 4

تدرب وحل المسائل



استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي :

المثال 1

(8) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

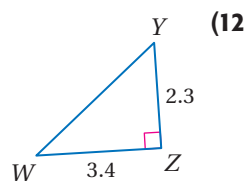
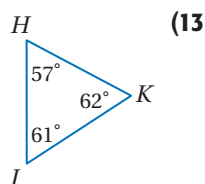
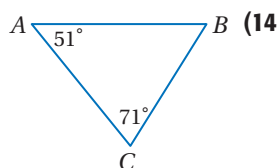
(9) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

(10) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

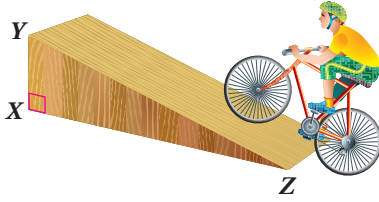
(11) قياساتها أكبر من $m\angle 8$.

اكتب زوايا كل مثلث مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في كل مما يأتي :

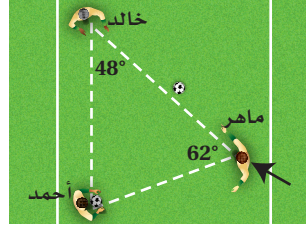
المثالان 2, 3



16 منحدرات: يمثل المنحدر طريقاً للدراجات الهوائية. فأيهما أطول؛ طول المنحدر $\overline{XZ}$ أم طول السطح العلوي للمنحدر $\overline{YZ}$ ؟ وضح إجابتك باستعمال النظرية 4.9.



15 كرة قدم: يقف أحمد وخالد وماهر في ملعب كرة قدم كما في الشكل أدناه، ويريد ماهر أن يمرر الكرة إلى أحد زميليه، على أن تكون مسافة التمرير أقصر. أيهما يختار: خالدًا أم أحمد؟ برّر إجابتك.



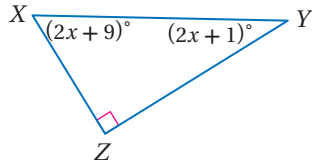
المثال 4



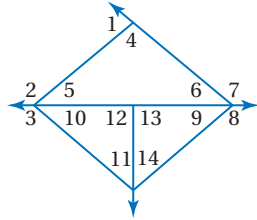
الربط مع الحياة

بينت إحدى الدراسات أن فريق كرة القدم يصبح في حالة الهجوم ما بين 45-65 مرة في المباراة الواحدة.

والفريق المتميز هو الذي يتميز بقدرته على تنفيذ الهجمات بشكل جيد، وفي الوقت نفسه يستطيع الاحتفاظ بدفاع متماسك.



17 اكتب زوايا المثلث المجاور مرتبة من الأصغر إلى الأكبر :

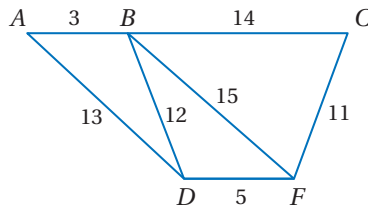


استعمل الشكل المجاور؛ لتحديد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي :

18 $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ **19** $\angle 2, \angle 4, \angle 6$

20 $\angle 7, \angle 4, \angle 5$ **21** $\angle 3, \angle 11, \angle 12$

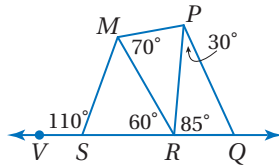
22 $\angle 3, \angle 9, \angle 14$ **23** $\angle 8, \angle 10, \angle 11$



استعمل الشكل المجاور؛ لتحديد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كل من الأسئلة الآتية :

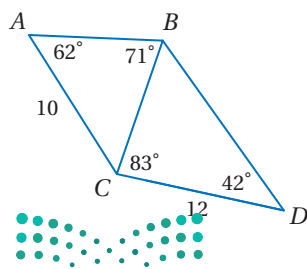
24 $\angle ABD, \angle BDA$ **25** $\angle BCF, \angle CFB$

26 $\angle BFD, \angle BDF$ **27** $\angle DBF, \angle BFD$



استعمل الشكل المجاور؛ لتحديد العلاقة بين أطوال الأضلاع المعطاة في كل من الأسئلة الآتية:

28 $\overline{SM}, \overline{MR}$ **29** $\overline{RP}, \overline{MP}$ **30** $\overline{RQ}, \overline{PQ}$



31 اكتب أضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتبة من الأقصر إلى الأطول. ووضح إجابتك.

المتثلث	AB	BC	AB + BC	CA
الحاد الزوايا				
المنفرج الزاوية				
القائم الزاوية				

(32) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة

العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث.

(a) **هندسياً:** ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حادّ الزوايا،

والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية، وسمّ

رؤوس كل مثلث A, B, C .

(b) **جدولياً:** استعمل المسطرة لقياس أطوال أضلاع كل مثلث، ثم انسخ الجدول في دفترتك وأكمّله.

(c) **جدولياً:** نظّم جدولين آخرين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC, CA في أحدهما، ومجموع

AB, CA في الجدول الآخر.

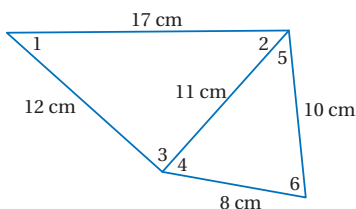
(d) **جبرياً:** اكتب متباينة لكل جدول كوّنته تربط بين مجموع طولَي الضلعين في مثلث وطول الضلع الثالث.

(e) **لفظياً:** خمن العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

(33) **تبرير:** هل تكون قاعدة المثلث المتطابق الضلعين هي الضلع الأطول في المثلث دائماً أم أحياناً أم لا

تكون أبداً؟ وضح إجابتك.



(34) **تحّد:** استعمل أطوال الأضلاع في الشكل المجاور؛

لترتب قياسات الزوايا المرقّمة من الأصغر إلى الأكبر،

إذا علمت أن $m\angle 2 = m\angle 5$. ووضح إجابتك.

(35) **اكتب:** وضح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائماً؟

تدريب على اختبار

(37) أيّ عبارة عددية مما يأتي لها أصغر قيمة؟

C $|-28|$

D $|-39|$

A $|45|$

B $|15|$

(36) إذا كان قياسا زاويتين في مثلث هما $45^\circ, 92^\circ$ ، فما نوع هذا المثلث؟

A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

B حادّ الزوايا ومختلف الأضلاع.

C منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين.

D حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين.

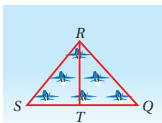
مراجعة تراكمية

(38) **هندسة إحداثيّة:** بصيغة الميل والمقطع اكتب معادلة العمود المنصف للقطعة

المستقيمة التي إحداثيات طرفيها $E(3, 5)$ ، $D(-2, 4)$. (الدرس 4-1)

(39) **طائرات:** يطير سربٌ من الطائرات على هيئة مثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أن:

$\triangle SRT \cong \triangle QRT$ ، إذا كانت النقطة T منتصف $\overline{SQ}$ ، $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. (الدرس 3-4)



استعد للدرس اللاحق

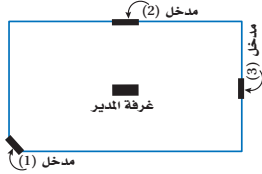
إذا كان $x = 8, y = 2, z = 3$ ، فحدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خاطئة:

(41) $2x = 3yz$

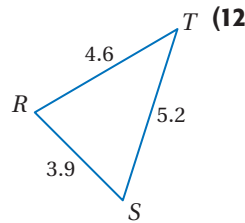
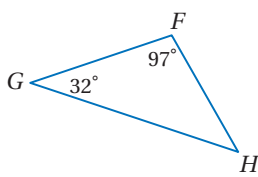
(40) $z(x - y) = 13$

(42) $x + y > z + y$

(11) تصميم هندسي: في إحدى المدارس، صمم مهندس مبنى للإدارة، وراعى في التصميم أن تكون غرفة المدير على نفس البعد من مداخل المبنى الثلاثة. هل تقع غرفة المدير عند نقطة التقاء ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه هي المداخل الثلاثة؟ ولماذا؟ (الدرس 4-2)



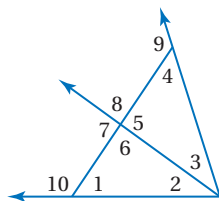
اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)



(14) مسافات: في الخريطة أدناه، إذا علمت أن $m\angle C = 70^\circ$, $m\angle A = \frac{2}{3}m\angle B$ (الدرس 4-3)

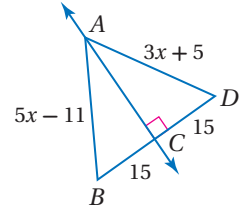
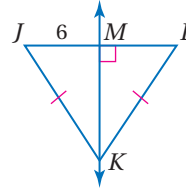


(a) أوجد قياس كل من الزاويتين A, B .
(b) رتب أطوال أضلاع المثلث من الأقصر إلى الأطول.
استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-3)

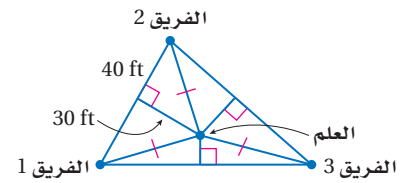


(15) قياسها أقل من $m\angle 8$.
(16) قياسها أكبر من $m\angle 3$.
(17) قياسها أقل من $m\angle 10$.

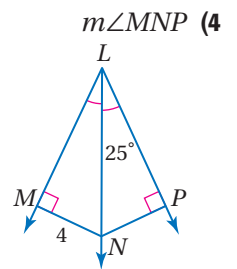
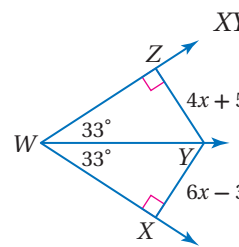
أوجد كلاً من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)
(1) AB **(2) JL**



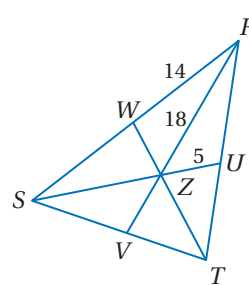
(3) مخيم: يلعب المشاركون في مخيم كشفية لعبة الفوز بالعلم. إذا كانت الفرق الثلاثة تقف في الأماكن المبينة في الشكل أدناه، والعلم مثبت عند نقطة متساوية البعد عن الفرق الثلاثة، فما المسافة بين العلم وكل من هذه الفرق؟ (الدرس 4-1)



أوجد كلاً من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)



إذا كانت Z مركز $\triangle RST$, $RZ = 18$.
فأوجد كلاً من الأطوال الآتية: (الدرس 4-2)



(6) ZV
(7) SZ
(8) SR

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات مركز كل مثلث علمت رؤوسه في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-2)

(9) $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$

(10) $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$



البرهان غير المباشر

Indirect Proof

لماذا؟

أعلن محل أحذية عن تخفيض مقداره 25% على جميع القطع الموجودة في المحل، فسألت هند أختها ما خلال تسوقهما في المحل قائلة: إذا كان ثمن القطعة 80 ريالاً بعد التخفيض، فهل كان ثمن القطعة أكثر من 100 ريال قبل التخفيض؟
فأجابتها: نعم؛ لأنه لو كان ثمن القطعة قبل التخفيض 100 ريال أو أقل، فإن ثمنها بعد التخفيض سيكون 75 ريالاً أو أقل.

فيما سبق:

درست البراهين
الحرة وذات العمودين
والمتسلسلة.

والآن:

- أكتب براهين جبرية غير مباشرة.
- أكتب براهين هندسية غير مباشرة.

المفردات:

التبرير المباشر

direct reasoning

البرهان المباشر

direct proof

التبرير غير المباشر

indirect reasoning

البرهان غير المباشر

indirect proof

البرهان بالتناقض

proof by contradiction



البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبها حتى الآن استعملت فيها **التبرير المباشر**، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة هذه الطريقة من البرهان تعتبر **برهاناً مباشراً**، وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع أي حقيقة سابقة كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقياً، فإن هذا يكون إثباتاً لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحة، ويسمى هذا النوع من البرهان **برهاناً غير مباشر** أو **برهاناً بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عملية البرهان غير المباشر.

أضف إلى

مطوبتك

خطوات كتابة البرهان غير المباشر

مفهوم أساسي

- الخطوة 1:** حدد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أن نفيها صحيح.
- الخطوة 2:** استعمل التبرير المنطقي لتبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع حقيقة أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظرية.
- الخطوة 3:** بما أن الافتراض الذي بدأت به أدى إلى تناقض، فبين أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.

مثال 1 صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

$$\angle ABC \neq \angle XYZ \quad (a)$$

(b) إذا كان العدد 6 عاملاً للعدد n ، فإن 2 عامل للعدد n .

(c) $\angle 3$ زاوية منفرجة.

تحقق من فهمك

(1A) $x > 5$

(1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع.

(1B) النقاط J, K, L تقع على استقامة واحدة.

يمكن أن تُستعمل البراهين غير المباشرة لإثبات صحّة المفاهيم الجبريّة.

قراءة الرياضيات

التناقض

التناقض مبدأ في المنطق ينصّ على أنه لا يمكن تحقق الافتراض ونفيه في آنٍ واحدٍ.

مثال 2

كتابة برهان جبري غير مباشر

اكتب برهاناً غير مباشر لتبين أنه: إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$

المعطيات:

المطلوب:

برهان غير مباشر:

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

تحقق من فهمك

اكتب برهاناً غير مباشر لكلّ من العبارتين الآتيتين:

(2A) إذا كانت $7x > 56$ ، فإن $x > 8$

(2B) إذا كان $-c$ موجباً، فإن c سالبٌ.

ويمكنك أن تستعمل البرهان غير المباشر في المواقف الحياتية اليومية.



مثال 3

من واقع الحياة

استعمال البرهان الجبري غير المباشر

تسوق: اشترى فهد قميصين بأكثر من 60 ريالاً، وبعد عدّة أسابيع سأله صديقه حامد عن ثمن كل قميص، ولكن فهداً لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالاً.

المعطيات:

المطلوب:

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

تحقق من فهمك

(3) **رحلة:** قطع رياض أكثر من 360 كيلومتراً في رحلة، وتوقّف في أثناء سفره مرتين فقط. استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضاً قطع أكثر من 120 كيلومتراً في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

تُستعمل البراهين غير المباشرة عادة لإثبات مفاهيم في نظرية الأعداد، ويكون من المفيد في هذه البراهين تذكر أنه يمكنك تمثيل العدد الزوجي على الصورة $2k$ ، والعدد الفردي على الصورة $2k + 1$ حيث k عدد صحيح.

مثال 4 براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عدداً زوجياً، فإن x عدد زوجي.

المعطيات:

المطلوب:

برهان غير مباشر:

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

تحقق من فهمك

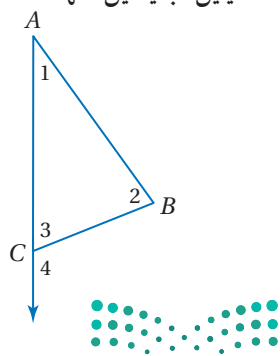
4) اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه "إذا كان مربع عدد صحيح فردياً، فإن العدد الصحيح فردي".

البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجية.

مثال 5 برهان هندسي

أثبت أن قياس الزاوية الخارجية لمثلث يكون أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعديتين عنها.

ارسم شكلاً توضيحياً، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.



المعطيات:

المطلوب:

برهان غير مباشر:

الخطوة 1:

تنبيه!

البرهان بالتناقض

مقابل المثال المضاد

البرهان بالتناقض

وإعطاء مثال مضاد

أمران مختلفان؛ إذ

يُستعمل المثال المضاد

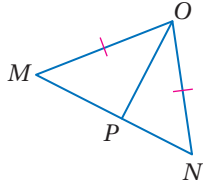
لإثبات خطأ تخمين

أو افتراض، ولا يمكن

استعماله لإثبات صحة

التخمين أو الافتراض.

الخطوة 2:



الخطوة 3:

تحقق من فهمك

(5) اكتب برهاناً غير مباشر.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \cong \angle NOP$

إرشادات للدراسة

تعرف التناقضات

تذكر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائماً مع المعطيات أو الفرض الذي تبدأ به، بل يمكن أن يكون مع حقيقة معلومة أو تعريف كما ورد في الحالة 1 من المثال 5، حيث إن قياس أي زاوية في مثلث يجب أن يكون أكبر من 0.

تأكد

المثال 1

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

(1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع.

(3) إذا كان $4x < 24$ ، فإن $x < 6$

(4) $\angle A$ ليست زاوية قائمة.

المثال 2

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين :

(5) إذا كان $2x + 3 < 7$ ، فإن $x < 2$

(6) إذا كان $3x - 4 > 8$ ، فإن $x > 4$

المثال 3

(7) **كرة قدم:** سجل فهد 13 هدفاً لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أن متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3

المثال 4

(8) اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $5x - 2$ عدداً فردياً، فإن x عدد فردي.

المثال 5

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين:

(9) وتر المثلث القائم الزاوية هو أطول أضلاعه.

(10) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإنه لا يمكن أن تكونا منفرجتين معاً.



تدرب وحل المسائل

المثال 1

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

(11) إذا كان $2x > 16$ ، فإن $x > 8$.

(12) $\angle 1$, $\angle 2$ زاويتان غير متكاملتين.

(13) إذا تساوى ميلا مستقيمين، فإن المستقيمين متوازيان.

(14) العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2.

المثال 2

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

(15) إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإن $x > -1$. (16) إذا كان $-2x - 6 > 12$ ، فإن $x < -9$.

المثال 3

(17) **ألعاب حاسوب:** اشترى منصور لعبتي حاسوب بأكثر من 400 ريال، وبعد أسابيع قليلة سأله صديقه كم تكلفة اللعبة الواحدة. فلم يتذكر منصور ذلك. استعمل التقرير غير المباشر؛ لتبين أن إحدى اللعبتين على الأقل كلفت أكثر من 200 ريال.

(18) **جمع التبرعات:** أقامت جمعية خيرية حفلة لجمع التبرعات لمساعدة الفقراء والمحتاجين، وكان سعر تذكرة الدخول للكبار 30 ريالاً، وللأطفال 12.5 ريالاً. إذا بيعت 375 تذكرة، وكان ريعها أكثر من 7300 ريال، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل للكبار.

المثالان 4, 5

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

(20) **المعطيات:** n^2 عدد زوجي.

المطلوب: n عدد زوجي.

(19) **المعطيات:** xy عدد صحيح فردي.

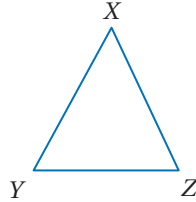
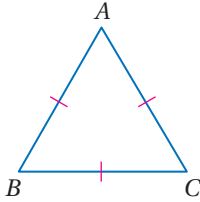
المطلوب: كلاً من x, y عدد صحيح فردي

(22) **المعطيات:** $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.

المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.

(21) **المعطيات:** $XZ > YZ$

المطلوب: $\angle X \neq \angle Y$



(23) اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه لا يمكن أن يكون للمثلث أكثر من زاوية قائمة.

(24) اكتب برهاناً غير مباشر للنظرية 4.10.

(25) اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $\frac{1}{b} < 0$ ، فإن b عدد سالب.

(26) **كرة سلة:** عندما خرج عدنان من الملعب ليدخل زميل له قبيل نهاية الشوط الأول من المباراة كان فريق مدرسته متقدماً بـ 28 نقطة مقابل 26. وعندما عاد مع بداية الشوط الثاني كان الفريق المنافس متقدماً بـ 29 نقطة مقابل 28 نقطة. استنتج أخو عدنان حين علم ذلك أن لاعباً من الفريق المنافس سجّل ثلاث نقاط من رمية واحدة. أثبت صحة أو خطأ استنتاجه باستعمال البرهان غير المباشر ومعلومات الربط مع الحياة.



الربط مع الحياة

هناك أكثر من طريقة لتسجيل ثلاث نقاط في كرة السلة، منها التسجيل من خارج المنطقة، ومنها أن يسجل اللاعب نقطتين ويحصل على رمية حرة نتيجة خطأ من الفريق المنافس ويسجل منها نقطة.



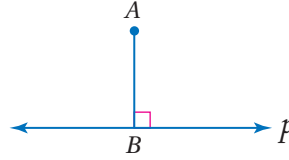
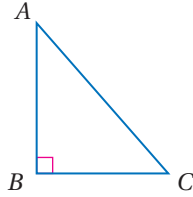
(27) ألعاب إلكترونية: تتضمن لعبة حاسوبية فارساً في رحلة للبحث عن الكنز، وفي نهاية الرحلة يقترّب الفارس من البابين المبيّنين أدناه.



أخبر خادمُ الفارس بأن أحد الإعلانين صحيح والآخر خطأ. استعمل التبرير غير المباشر لتحديد أيّ البابين سيختاره الفارس. وضح إجابتك.

حدّد ما إذا كان إثبات كل عبارة حول أقصر مسافة بين نقطة وخط مستقيم أو مستوًى، يمكن إثباتها باستعمال البرهان المباشر أو البرهان غير المباشر، ثم اكتب برهاناً لكلّ منهما.

- (28) المعطيات:** $\overline{AB}$ عمودي على المستقيم p
المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى المستقيم p .
- (29) المعطيات:** ABC مثلث قائم الزاوية
المطلوب: الوتر $\overline{AC}$ أطول ضلع في المثلث



(30) نظرية الأعداد: في هذه المسألة ستُخمن علاقةً في نظرية الأعداد، وتُثبت صحة تخمينك.

- (a) اكتب عبارة جبرية تمثل "مجموع مكعب العدد n والعدد ثلاثة".
(b) كوّن جدولاً يعطي قيم العبارة لعشر قيم زوجية وفردية مختلفة لـ n .
(c) اكتب تخميناً حول n عندما تكون قيمة العبارة زوجية.
(d) اكتب برهاناً غير مباشر لتخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (31) مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة يمكن إثبات صحتها باستعمال البرهان غير المباشر ثم أثبتها.
- (32) تحدّد:** إذا كان x عدداً نسبياً، فإنه يمكن تمثيله بالصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a, b عددان صحيحان، و $b \neq 0$. ولا يمكن تمثيل العدد غير النسبي في صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهاناً غير مباشر تبين فيه أن ناتج ضرب عدد نسبي لا يساوي الصفر في عدد غير نسبي، هو عدد غير نسبي.

مراجعة المفردات

مجموعة الأعداد الصحيحة هي:
 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$



(33) اكتشف الخطأ: يحاول أسعد ورضوان أن يثبتا العبارة التالية باستعمال البرهان غير المباشر. فهل أي منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

”إذا كان مجموع عددين زوجيًا، فإن العددين زوجيان“.

رضوان

العبارة صحيحة. إذا كان العددين فرديين فإن مجموعهما يكون عددًا زوجيًا. وبما أن الافتراض صحيح عندما تكون النتيجة خطأ، فإن العبارة صحيحة.

أسعد

العبارة صحيحة. إذا كان أحد العددين زوجيًا والآخر صفرًا، فإن المجموع يكون عددًا زوجيًا. وبما أن الافتراض صحيح حتى عندما تكون النتيجة خطأ، فإن العبارة صحيحة.

(34) اكتب: اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الموجودة في السؤال 8، وكتب برهانًا مباشرًا للمعاكس الإيجابي. كيف يرتبط البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة بالبرهان غير المباشر للعبارة الأصلية؟

تدريب على اختبار

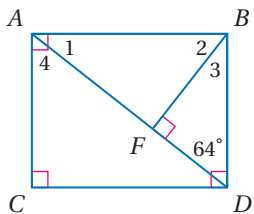
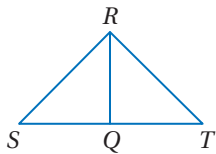
(36) إذا كان $b > a$ ، فأَيُّ مما يأتي يكون صحيحًا دائمًا؟

- A $-a > -b$
- B $3a > b$
- C $a^2 < b^2$
- D $a^2 < ab$

(35) إذا كان طولًا ضلعين في مثلث 12، 7، فأَيُّ مما يأتي لا يمكن أن يكون محيط المثلث؟

- A 29
- B 34
- C 37
- D 38

مراجعة تراكمية



(37) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 3-4)

المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle SQR > m\angle SRQ$

أوجد كلاً من القياسين الآتين: (الدرس 2-3)

$$m\angle 4$$

$$m\angle 1$$

(40) هندسة إحدائية: أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين: (مهارة سابقة)

$$y = 2x + 2$$

$$y = 2x - 3$$

استعد للدرس اللاحق

حلّ كلاً من المتباينات الآتية:

$$3x + 54 < 90$$

$$8x - 14 < 3x + 19$$

$$4x + 7 < 180$$

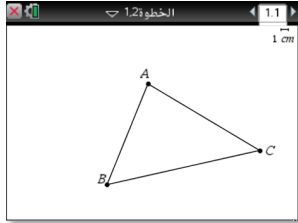




يمكنك استعمال تطبيق الهندسة في الحاسبة TI-nspire؛ لاستكشاف خصائص المثلث.

النشاط 1

أنشئ مثلثاً، ولاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الثالث.



الخطوة 1: أنشئ مثلثاً بالضغط على المفاتيح **on** **menu**

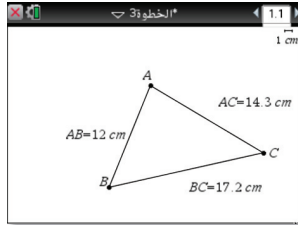
ثم اختر **5: الأشكال الهندسية** واختر منها **2: مثلث**

ثم ارس المثلث واضغط **esc**

الخطوة 2: سمّ رؤوس المثلث، وذلك بوضع المؤشر عند كل نقطة ثم

الضغط على **ctrl** **menu**، ثم اختيار **2: التسمية**، وعلى زر

Shift لجعل الحروف كبيرة ثم سمّ الرؤوس A, B, C



الخطوة 3: • حدد طول كل ضلع من أضلاع المثلث بالضغط على **menu**

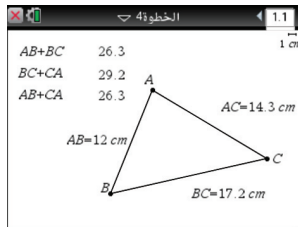
واختَر **6: القياس** واختَر منها **1: الطول**، ولإيجاد

طول كل ضلع: اضغط على رأسين في المثلث، ثم ضع

المؤشر في مكان مناسب لظهور النتيجة ثم اضغط **enter**

• اكتب اسم الضلع بجانب الطول المقيس بالضغط

على **ctrl** **menu**، ثم اختيار **5: النص** ثم اكتب اسم الضلع واضغط **enter**



الخطوة 4: ولحساب مجموع طول ضلعين في المثلث، اضغط

على **ctrl** **menu** واختَر منها **5: النص**، وكتب اسم ضلعين مثل:

$AB + BC$ ، ثم ظلّل النص $AB + BC$ واضغط **ctrl** **menu**

واختَر منها **5: الأشكال الهندسية**، واضغط على الرقم الذي

يمثل طول الضلع AB ، ثم على الرقم الذي يمثل طول الضلع

BC ، وسيظهر مجموع الضلعين، ثم ضع المؤشر في مكان

مناسب لظهور النتيجة ثم اضغط **enter**

تحليل النتائج:

(1) ضع إشارة $<$ أو $>$ أو $=$ داخل $\bigcirc$ ؛ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$$BC + CA \bigcirc AB$$

$$AB + CA \bigcirc BC$$

$$AB + BC \bigcirc CA$$

(2) خَمّن العلاقة بين مجموع طولي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

(3) ضع إشارة $<$ أو $>$ أو $=$ داخل $\bigcirc$ ؛ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$$|BC - CA| \bigcirc AB$$

$$|AB - CA| \bigcirc BC$$

$$|AB - BC| \bigcirc CA$$

(4) كيف يمكنك استعمال ملاحظتك؛ لتحديد مدى طول الضلع الثالث لمثلث إذا علمت طولي

الضلعين الآخرين؟





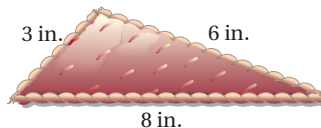
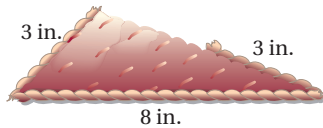
متباينة المثلث

The Triangle Inequality

4-5

لماذا؟

يريد أحد المصممين أن يستعمل قطع الخيوط المجدولة والمتبقية من أحد أعماله لتزيين الوسائد المثلثة الشكل أدناه. ولتقليل الإهدار، أراد المصمم أن يستعمل القطع دون قصها، فاختر ثلاث قطع عشوائيًا وحاول أن يشكّل مثلثًا. والشكلان الآتيان يبيّنان اثنتين من هذه المحاولات.



متباينة المثلث: بما أن المثلث يتكون من ثلاث قطع مستقيمة، فيجب أن تتوافر علاقة خاصّة بين أطوال هذه القطع؛ كي تشكّل مثلثًا.

فيما سبق:

درستُ خصائص المتباينات وتطبيقها على العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه.

والآن:

- أستعمل نظرية متباينة المثلث لأعین الأطوال التي تكون مثلثًا.
- أثبت العلاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.

أضف إلى

مطويتك

نظرية متباينة المثلث

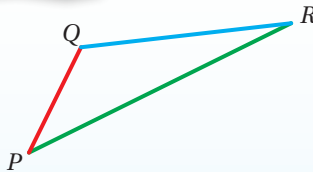
4.11 نظرية

مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

$$PQ + QR > PR$$

$$QR + PR > PQ$$

$$PR + PQ > QR$$



ستبرهن النظرية 4.11 في السؤال 19

ولتوضيح عدم إمكانية رسم مثلث من ثلاث قطع مستقيمة علمت أطوالها، يجب بيان أن إحدى متباينات المثلث الثلاث غير صحيحة.

تعيين الأطوال التي تكون مثلثًا

مثال 1

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضح السبب:

(a) 8 in, 15 in, 17 in

(b) 6 m, 8 m, 14 m

إرشادات للدراسة

إذا كان مجموع أقصر طولين أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأطوال الثلاثة تمثل أطوال أضلاع مثلث.

تحقق من فهمك



(1B) 2 ft, 8 ft, 11 ft

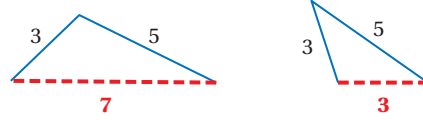
(1A) 15 cm, 16 cm, 30 cm

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 4-5 متباينة المثلث - 115

عندما يُعلم طولاً ضلعين في مثلث، يمكن تحديد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث باستعمال نظرية متباينة المثلث.



مثال 2 من الاختبار

إذا كان طولاً ضلعين في مثلث هما 3 cm ، 7 cm ، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

- A 3 cm
B 4 cm
C 5 cm
D 10 cm

إرشادات للاختبار

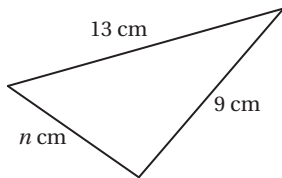
اختبار البدائل

إذا كان الوقت غير كافٍ
يمكنك اختبار كل بديل
لايجاد الإجابة الصحيحة
واستبعاد البدائل
الأخرى.

قراءة الرياضيات

المتباينة المركبة

تقرأ المتباينة المركبة
 $4 < x < 10$ على النحو
التالي: تقع x بين
 4 و 10 أو x أكبر من 4
وأقل من 10



تحقق من فهمك

(2) في الشكل المجاور، أيُّ الأعداد الآتية لا يمكن أن يكون قيمة n ؟

- A 7
B 13
C 10
D 22



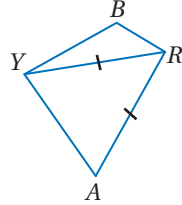
استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين: يمكنك استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال نظرية متباينة المثلث في البرهان



طيران: المسافة الجوية من الرياض إلى ينبع تساوي المسافة الجوية من الرياض إلى أبها، أثبت أن الطيران المباشر من الرياض إلى ينبع مروراً بمدينة بريدة يقطع مسافة أكبر من المسافة المقطوعة عند الطيران من الرياض إلى أبها دون توقف.

ارسم شكلاً تقريبياً يمثل المسألة، وضع عليه رموز أسماء المدن، وارسم القطعة $\overline{YA}$ لتشكّل $\triangle YRA$.

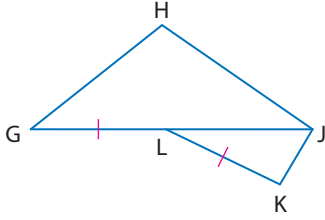


المعطيات: $RY = RA$

المطلوب: $RB + BY > RA$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)



تحقق من فهمك

(3) اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$



الربط مع الحياة

يختلف الطيران المباشر عن الطيران من دون توقف، ففي حالة الطيران المباشر لا يغير المسافرون الطائرة، ولكن قد تحط الطائرة في مطار واحد أو أكثر قبل وصولها لغايتها.

تأكد

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكناً فوضّح السبب.

(3) 6 m, 14 m, 10 m

(2) 3 in, 4 in, 8 in

(1) 5 cm, 7 cm, 10 cm

المثال 1

(4) اختيار من متعدد: إذا كان طولاً ضلعين في مثلث 5 m, 9 m، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث فيه؟

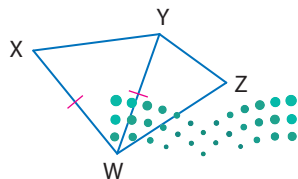
6 m D

14 m C

4 m B

5 m A

المثال 2



(5) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$

المثال 3

المثال 1 حدد ما إذا كانت كلٌّ من القياسات الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضح السبب.

11 mm, 21 mm, 16 mm (7)

4 ft, 9 ft, 15 ft (6)

$2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m (9)

9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm (8)

المثال 2 اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث علم طولاً ضلعين من أضلاعه في كلٍّ مما يأتي:

5 m, 11 m (11)

4 ft, 8 ft (10)

$\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km (13)

2.7 cm, 4.2 cm (12)

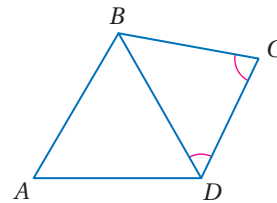
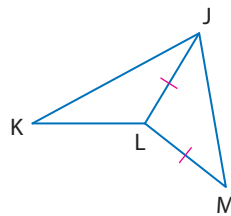
المثال 3 برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لكلٍّ مما يأتي:

(15) المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{LM}$

(14) المعطيات: $\angle BCD \cong \angle CDB$

المطلوب: $KJ + KL > LM$

المطلوب: $AB + AD > BC$



جبر: حدّد القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(17) Triangle XYZ with side lengths: $XZ = x + 13$, $XY = 4x - 1$, $YZ = 2x + 7$.

(16) Triangle ABC with side lengths: $AB = 2x + 22$, $AC = x + 5$, $BC = 5x - 7$.



(18) **قيادة:** يُريد توفيق أن يسلك المسار الأقصر من بيته إلى المجمع الرياضي، ويمكنه أن يسلك الطريق 1 أو الطريق 2 ثم الطريق 3.

(a) أيُّ المسارين أقصر من بيت توفيق إلى المجمع الرياضي؟ وضح إجابتك.

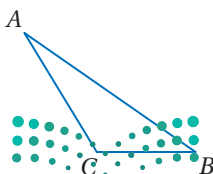
(b) افترض أن توفيقاً يقود سيارته بسرعة قريبة جداً من السرعة القصوى المسموح بها ولا تتعدها. إذا كانت السرعة القصوى على الطريق 1 تساوي 60 km/h، وعلى كلٍّ من الطريقين 2، 3 تساوي 100 km/h، فأَيُّ المسارين سيستغرق وقتاً أقل؟ وضح إجابتك.

(19) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)

(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{CD}$ ، على أن تكون C بين B ، D ويكون $\overline{CD} \cong \overline{AC}$).



إذا كانت كل مجموعة تمثل أطوال أضلاع مثلث، فاكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل من الأسئلة الآتية:

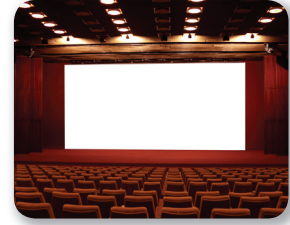
(21) $8, x, 12$

(20) $x, 4, 6$

(23) $x + 2, x + 4, x + 6$

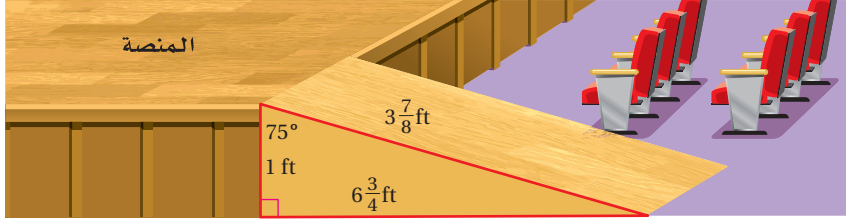
(22) $x + 1, 5, 7$

(24) **مسرح:** يصمم عبد الرحمن و خليل منحدرًا للصعود إلى منصة المسرح، فخطَّط عبد الرحمن المنحدر كما في الشكل أدناه، ولكن خليلًا كان قلقًا بشأن القياسات ويريد أن يتحقق منها قبل البدء في قص الخشب، فهل يوجد ما يبرر هذا القلق؟ وضح إجابتك.



الربط مع الحياة

تصمم المسارح وفق نظام هندسي دقيق يُراعى فيه إمكانية مشاهدة جميع الحضور للمنصة، وسماع الصوت بوضوح دون صدى.



تقدير: حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي، وذلك دون استعمال الآلة الحاسبة. وضح إجابتك.

(26) $\sqrt{99} \text{ cm}, \sqrt{48} \text{ cm}, \sqrt{65} \text{ cm}$

(25) $\sqrt{8} \text{ ft}, \sqrt{2} \text{ ft}, \sqrt{35} \text{ ft}$

(27) حدّد ما إذا كانت النقاط $X(1, -3), Y(6, 1), Z(2, 2)$ تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

(28) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين أضلاع مثلثين وزواياهما.

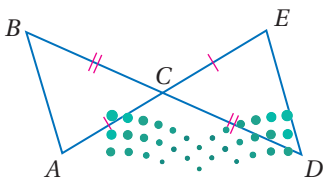
(a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات في كل مثلثين منها زوجان من الأضلاع المتطابقة فقط، وضع إشارات على كل ضلعين متطابقين، وسمّ كل زوج من المثلثات ABC, DEF ، حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$.

(b) **جدوليًا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم أوجد بالقياس قيمة كل من $BC, m\angle A, EF, m\angle D$ ، وسجلها في الجدول.

أزواج المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1				
2				
3				

(c) **لفظيًا:** خَمّن العلاقة بين الزاويتين المقابلتين للضلعين غير المتطابقين في كل زوج من المثلثات التي فيها زوجان من الأضلاع المتطابقة.

مسائل مهارات التفكير العليا



(29) **تحّد:** ما مدى القيم الممكنة لمحيط الشكل $ABCDE$ ، إذا كان $AC = 7, DC = 9$ ؟ وضح إجابتك.

(30) **تبرير:** ما مدى طول كل من الضلعين المتطابقين في مثلث طول قاعدته 6 cm ؟ وضح إجابتك.

31 مسألة مفتوحة: طول أحد أضلاع مثلث 5 سم. ارسم مثلثًا يكون الضلع الذي طوله 5 سم أقصر أضلاعه، ومثلثًا آخر يكون الضلع الذي طوله 5 سم أطول أضلاعه. مضمّنًا رسمك أطوال الأضلاع المثلث وقياسات زواياه.

32 اكتب: اشرح الطريقة التي تستعملها لإيجاد أصغر قيمة وأكبر قيمة لطول ضلع مثلث إذا علمت طولي الضلعين الآخرين.

تدريب على اختبار

34 أيُّ معادلة مما يأتي تمثل العبارة:
"ناتج طرح 7 من $14w$ يساوي z ؟"

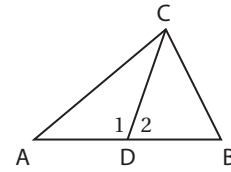
A $7 - 14w = z$

B $z = 14w + 7$

C $7 - z = 14w$

D $z = 14w - 7$

33 إذا كانت $\overline{DC}$ قطعةً متوسطةً في $\triangle ABC$ وكان $m\angle 1 > m\angle 2$ ، فأَيُّ عبارة مما يأتي غير صحيحة؟



- A** $AD = BD$ **C** $AC > BC$
B $m\angle ADC = m\angle BCD$ **D** $m\angle 1 > m\angle B$

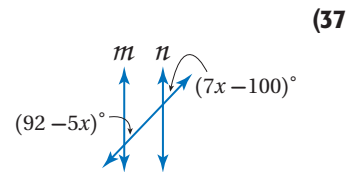
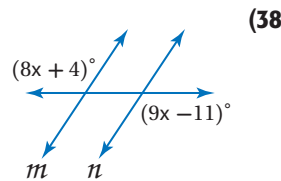
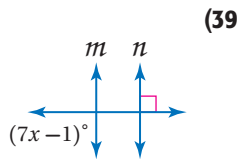
مراجعة تراكمية

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي : (الدرس 4-4)

35 إذا كان $4y + 17 = 41$ ، فإن $y = 6$

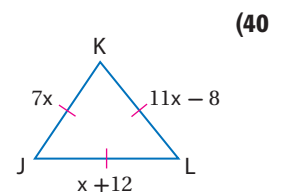
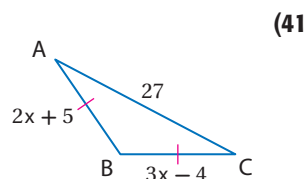
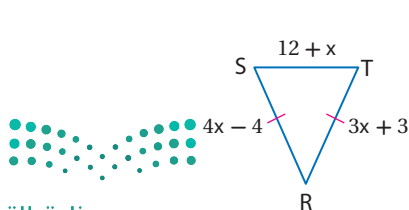
36 إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين، وكانت الزاويتان المتبادلتان داخليًا متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان.

أوجد قيمة x ، على أن يكون $n \parallel m$ في كلٍّ مما يأتي، واذكر المسألة أو النظرية التي استعملتها : (مهارة سابقة)



استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x ، وأطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث مما يأتي:



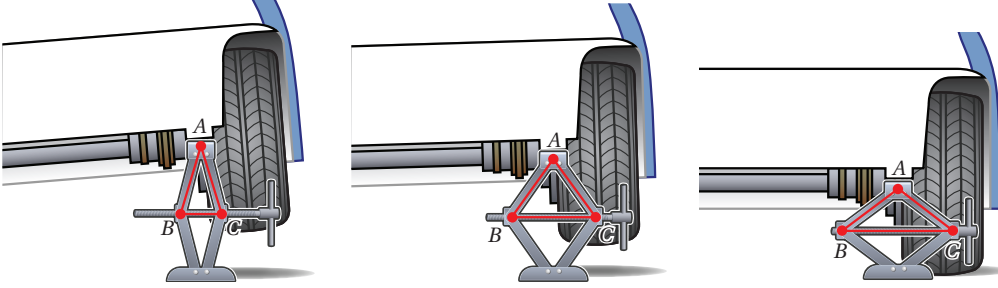
المتباينات في مثلثين

Inequalities in Two Triangles

4-6

لماذا؟

تُستعمل الرافعة عند تغيير إطارات السيارات، والرافعة المبنية أدناه واحدة من الرافعات البسيطة التي ما زالت تُستعمل حتى يومنا هذا. لاحظ أنه عندما تُنزل الرافعة فإن ساقَي $\triangle ABC$ يظلان متطابقين، في حين تزداد الزاوية A اتساعاً ويزداد طول الضلع BC المقابل $\angle A$



متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS): الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوع من المثلثات وتوضح النظريتين الآتيتين:

فيما سبق:

درست المتباينات في المثلث الواحد.

والآن:

- أطبق متباينة SAS أو عكسها؛ لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين.
- أثبت صحة العلاقات باستعمال متباينة SAS أو عكسها.

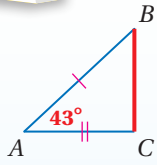
أضف إلى

مطوبتك

نظريتان

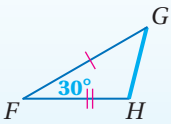
المتباينات في مثلثين

4.12 متباينة SAS

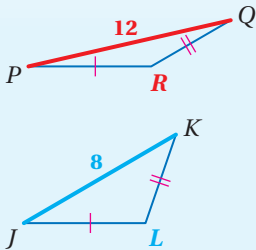


إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, $\overline{AC} \cong \overline{FH}$, $m\angle A > m\angle F$, فإن $BC > GH$.



4.13 عكس متباينة SAS (SSS)



إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

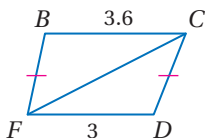
مثال: إذا كان: $\overline{PR} \cong \overline{JL}$, $\overline{QR} \cong \overline{KL}$, $PQ > JK$, فإن $m\angle R > m\angle L$.

ستبرهن النظرية 4.12 في الصفحة التالية، وستبرهن النظرية 4.13 في السؤال 18

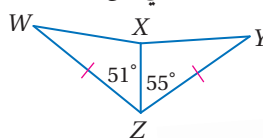
مثال 1

استعمال متباينة SAS وعكسها

قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

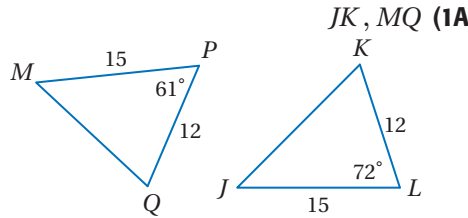
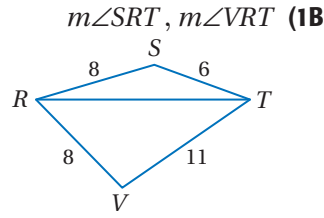


$m\angle FCD$, $m\angle BFC$ (b)



WX , XY (a)

قارن بين القياسات المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين :



إرشادات للدراسة

متباينة SAS, SSS

تُعرف المتباينة SAS

باسم متباينة الرافعة،

وعكسها يُعرف

بالمتباينة SSS.

برهان

متباينة SAS

المعطيات: في المثلثين ABC, DEF ،

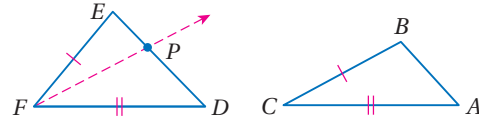
$$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, m\angle F > m\angle C$$

المطلوب: $DE > AB$

البرهان:

تعلم أن: $\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، وتعلم أيضًا أن: $m\angle F > m\angle C$.

ارسم نصف المستقيم FP ، على أن يكون $\overline{PF} \cong \overline{BC}$ ، $m\angle DFP = m\angle C$ ، وهذا سيقودنا إلى حالتين هما :
الحالة 1 تقع على $\overline{DE}$ ، وعندها يكون $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بحسب SAS ، لذا يكون $PD = BA$ ؛ لأن
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، وبحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة،

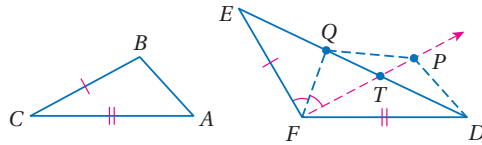


ومسألة جمع قياسات القطع المستقيمة يكون $DE = EP + PD$ ؛ لذا يكون $DE > PD$ بناءً على

تعريف المتباينة، وبالتعويض يكون $DE > AB$

الحالة 2 لا تقع على $\overline{DE}$

وعندئذٍ سمِّ نقطة تقاطع $\overline{ED}$ ، $\overline{FP}$ بالحرف T ، وارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{FQ}$ على أن تكون Q على $\overline{DE}$ ، وتكون $\angle EFQ \cong \angle QFP$ ، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{PD}$ ، $\overline{PQ}$.



معطى

$$\overline{FP} \cong \overline{BC}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

خاصية التعدي للتطابق

$$\overline{FP} \cong \overline{EF}$$

خاصية الانعكاس للتطابق

$$\overline{QF} \cong \overline{QF}$$

شرط تحديد النقطة Q

$$\angle EFQ \cong \angle QFP$$

مسألة SAS

$$\triangle EFQ \cong \triangle PFP$$

تطابق العناصر المتناظرة

$$\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$$

تعريف التطابق

$$EQ = PQ$$

شرط تحديد النقطة

$$m\angle DFP = m\angle C$$

مسألة SAS

$$\triangle FPD \cong \triangle CBA$$

تطابق العناصر المتناظرة

$$\overline{PD} \cong \overline{BA}$$

تعريف التطابق

$$PD = BA$$

متباينة المثلث

$$QD + PQ > PD$$

بالتعويض

$$QD + EQ > PD$$

مسألة جمع أطوال القطع المستقيمة

$$ED = QD + EQ$$

بالتعويض

$$ED > PD$$

بالتعويض

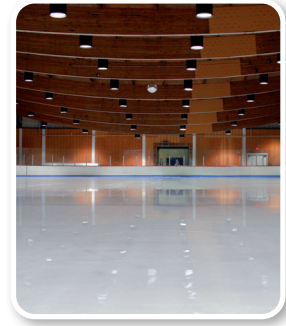
$$ED > BA$$



يمكنك استعمال متباينة SAS لحل مسائل من واقع الحياة.

استعمال متباينة SAS

مثال 2 من واقع الحياة



الربط مع الحياة

ظهرت رياضة التزلج على الجليد في منتصف القرن التاسع عشر، ونُظِّمت أول بطولة لها عام 1891م، وهي رياضة مشهورة في البلاد الباردة، مثل كندا والدول الاسكندنافية.

إرشادات لحل

رسم شكل توضيحي

ارسم شكلاً لمساعدتك على فهم المسألة اللفظية وتوضيحها بصورة صحيحة.

افهم:

خطط:

حل:

تحقق:

تحقق من فهمك



التزلج على الجليد: في إحدى صالات التزلج، انطلق اثنان من المتزلجين على الجليد من المكان نفسه، فقطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف 35° في اتجاه الشمال الغربي قاطعاً 15 m، بينما قطع المتزلج B مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف 40° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعاً 15 m، أيهما كان الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك.

(2) **التزلج على الجليد:** انطلقت مجموعتان من المتزلجين من المكان نفسه، فقطعت المجموعة A مسافة 4 mi في اتجاه الشرق، ثم انحرفت 70° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعةً مسافة 3 mi، وقطعت المجموعة B مسافة 4 mi في اتجاه الغرب، ثم انحرفت 75° في اتجاه الشمال الغربي قاطعةً 3 mi، أي مجموعة كانت الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك.

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 6-4 المتباينات في مثلثين - 123

لإثبات أن الزاوية المحصورة في مثلث أكبر من الزاوية المحصورة في مثلث آخر، استعمال عكس متباينة SAS في الحل.

إرشادات للدراسة

استعمال حقائق إضافية

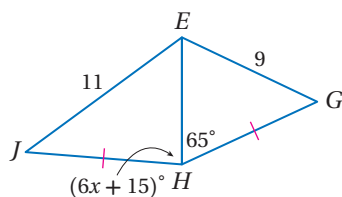
- عند إيجاد مدى القيم الممكنة للمتغير x ، قد تحتاج إلى استعمال إحدى الحقائق الآتية:
- قياس أي زاوية في المثلث يكون أكبر من 0 وأقل من 180 دائماً.
- طول أي قطعة مستقيمة يكون أكبر من 0 دائماً.

مثال 3

استعمال الجبر في العلاقات بين مثلثين

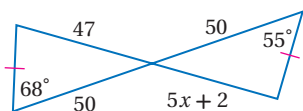
جبر: أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x .

الخطوة 1:



الخطوة 2:

الخطوة 3:



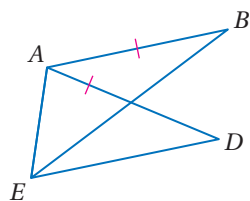
تحقق من فهمك

(3) أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x .

إثبات العلاقات في مثلثين: يمكنك استعمال متباينة SAS وعكسها لإثبات صحة العلاقات في مثلثين.

مثال 4

إثبات علاقات المثلث باستعمال متباينة SAS



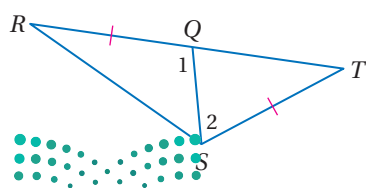
اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

العبارة	المبررات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)



تحقق من فهمك

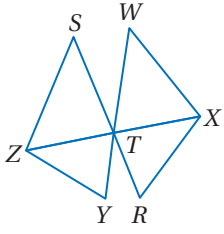
(4) اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

إثبات علاقات باستعمال عكس متباينة SAS

مثال 5



اكتب برهاناً تسلسلياً.

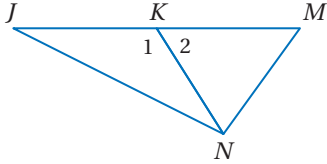
المعطيات: T نقطة منتصف $\overline{ZX}$.

$$\overline{ST} \cong \overline{WT}$$

$$SZ > WX$$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$

البرهان التسلسلي:



تحقق من فهمك

(5) اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في $\triangle JMN$.

$$JN > NM$$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

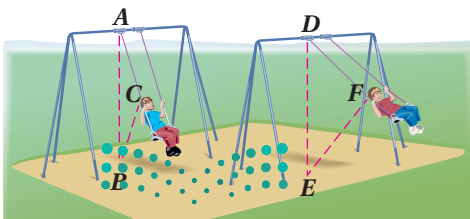
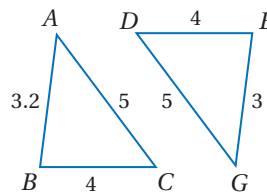
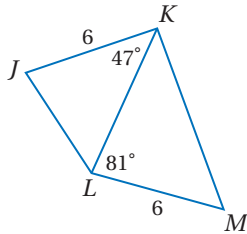
تأكد

قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

المثال 1

(2) JL, KM

(1) $m\angle ACB, m\angle GDE$



(3) أراجيح: يتغير موضع الأرجوحة تبعاً لقوة دفعها.

المثال 2

(a) أي الأزواج متطابق من هذه القطع المستقيمة؟

(b) أيهما أكبر: قياس $\angle A$ أم قياس $\angle D$ ؟

وضح إجابتك.

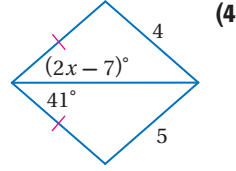
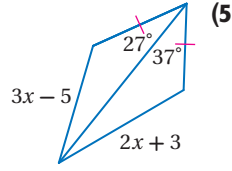
وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 6-4 المتباينات في مثلثين - 125

المثال 3

اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل مما يأتي:



المثالان 4, 5

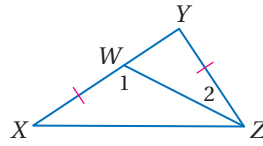
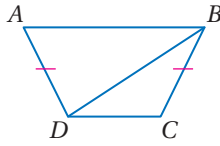
برهان اكتب برهاناً ذا عمودين في كل من السؤالين 6, 7:

(7) المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
 $DC < AB$

(6) المعطيات: $\triangle YZX$
 $\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$

المطلوب: $ZX > YW$



تدرب وحل المسائل

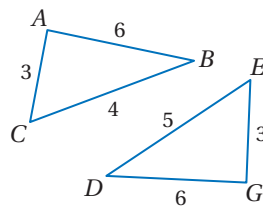
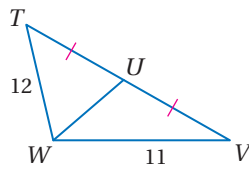
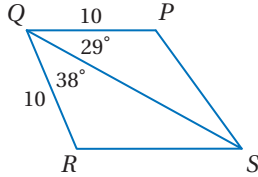
المثال 1

قارن بين القياسين المحددين في كل من الأسئلة الآتية:

(10) PS, SR

(9) $\angle TUW, \angle VUW$

(8) $\angle BAC, \angle DGE$



المثال 2

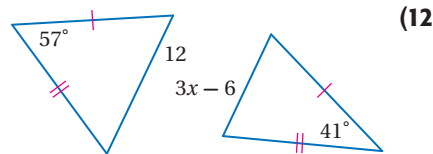
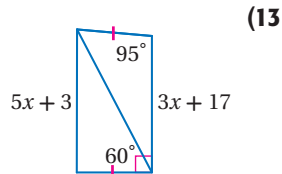
(11) **رحلة برية:** أقام باسم وعثمان مخيماً في الصحراء، وقرّرا أن يقوموا برحلة برية، فانطلق باسم من المخيم وسار 5 km في اتجاه الشرق، ثم انعطف 15° جهة الجنوب الشرقي وسار 2 km أخرى، وانطلق عثمان من المخيم وسار 5 km في اتجاه الغرب، ثم انعطف 35° جهة الشمال الغربي وسار 2 km أخرى.

(a) أيهما أقرب إلى المخيم؟ وضح إجابتك، وارسم شكلاً توضيحياً.

(b) افترض أن عثمان انعطف 10° في اتجاه الجنوب الغربي بدلاً من 35° في اتجاه الشمال الغربي، فأيهما يكون أبعد عن المخيم؟ وضح إجابتك، وارسم شكلاً توضيحياً.

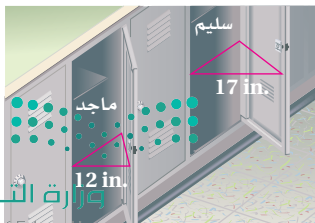
المثال 3

اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل من السؤالين الآتيين:



(14) **خزائن:** خزانتا سليم وماجد مفتوحتان، كما في الشكل المجاور.

أي بابي الخزانين يشكل زاوية قياسها أكبر؟ وضح إجابتك.

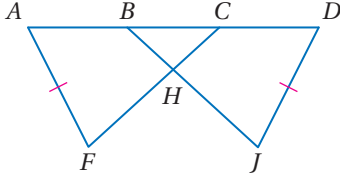


المثالان 4, 5 برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(16) **المعطيات:** $\overline{AF} \cong \overline{DJ}$, $\overline{FC} \cong \overline{JB}$

$AB > DC$

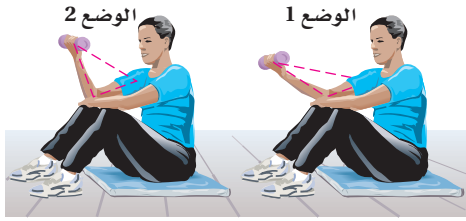
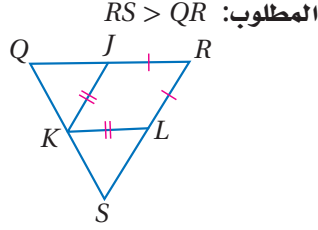
المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$



(15) **المعطيات:** $\overline{LK} \cong \overline{JK}$, $\overline{RL} \cong \overline{RJ}$

K نقطة منتصف $\overline{QS}$

$m\angle SKL > m\angle QKJ$



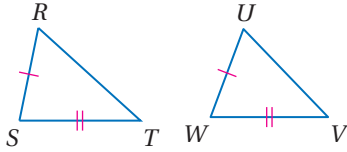
(17) **تمرين:** يقوم عبد الله بتمرين العضلة ذات الرأسين .

(a) أيُّهما أكبر: المسافة من قبضة اليد إلى الكتف في الوضع 1، أم المسافة نفسها في الوضع 2؟ وضح إجابتك بالقياس.

(b) أيُّهما أكبر: قياس الزاوية المتكونة عند المرفق

في الوضع 1، أم المتكونة في الوضع 2؟ وضح إجابتك مستعملًا القياسات التي أوجدتها في الفرع a وعكس متباينة SAS.

(18) **برهان:** استعمل البرهان غير المباشر؛ لإثبات النظرية 4.13 (عكس متباينة SAS).



المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$

$\overline{ST} \cong \overline{WV}$

$RT > UV$

المطلوب: $m\angle S > m\angle W$

(19) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف مجموع زوايا مضلع.

(a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مضلعات: ثلاثي، رباعي، خماسي. وسمّ المضلع الثلاثي ABC ، والرباعي $FGHJ$ ، والخماسي $PQRST$.

(b) **جدوليًا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك وأكمّله مستعملًا المنقلة لقياس كل زاوية.

عدد الأضلاع	قياسات الزوايا				مجموع قياسات الزوايا
3	$m\angle A$		$m\angle C$		
	$m\angle B$				
4	$m\angle F$		$m\angle H$		
	$m\angle G$		$m\angle J$		
5	$m\angle P$		$m\angle S$		
	$m\angle Q$		$m\angle T$		
	$m\angle R$				

(c) **لفظيًا:** خمن العلاقة بين عدد أضلاع المضلع ومجموع قياسات زواياه.

(d) **منطقيًا:** ما نوع التبرير الذي استعملته في الفرع c؟ وضح إجابتك.

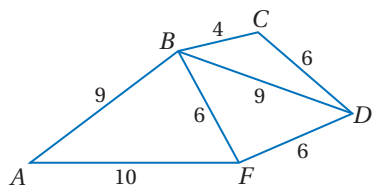


(e) **جبريًا:** اكتب عبارة جبرية؛ لإيجاد مجموع قياسات زوايا مضلع عدد أضلاعه n .



الربط مع الحياة

تمارين اللياقة تزيد القوة والقدرة على التحمل، وينصح معظم خبراء اللياقة الأشخاص المبتدئين بالتدريب ثلاث جلسات في الأسبوع، بحيث تتراوح مدة الجلسة الواحدة من 20 دقيقة إلى ساعة كاملة (متضمنة فترة الإحماء والاسترخاء) على أن يفصل ما بين الجلسة والأخرى يوم واحد على الأقل.

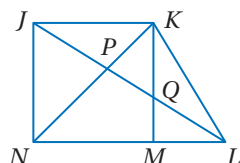


استعمل الشكل المجاور لكتابة متباينة تربط بين قياس كل زوج من الزوايا في السؤالين الآتيين:

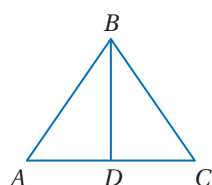
$m\angle BDC, m\angle FDB$ (20)

$m\angle ABF, m\angle FDB$ (21)

مسائل مهارات التفكير العليا



(22) **تحديد:** في الشكل المجاور، إذا كان: $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$ ، $m\angle LJN > m\angle KJL$ ، فأَيُّ الزاويتين هي الأكبر: $\angle LKN$ أم $\angle LNK$ ؟ وضح إجابتك.



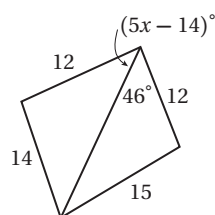
(23) **تبرير:** إذا كانت $\overline{BD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$ كما في الشكل المجاور، وكان $AB < BC$ ، فهل تكون $\angle BDC$ حادة دائماً، أو أحياناً، أو لا تكون حادة أبداً؟ وضح إجابتك.

(24) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متباينة SAS والمسألة SAS لتطابق المثلثات.

تدريب على اختبار

(26) إذا كان طول ضلع مربع $x+3$ ، فإن طول قطره يساوي:

$2x+6$ C x^2+1 A
 $x^2\sqrt{2}+6$ D $x\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ B



(25) أيُّ متباينة مما يأتي تصف مدى القيم الممكنة لـ x ؟

$x > 6$ A
 $0 < x < 14$ B
 $2.8 < x < 12$ C
 $12 < x < 15$ D

مراجعة تراكمية

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث عُلم طولاً ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-5)

3 m, 9 m (29)

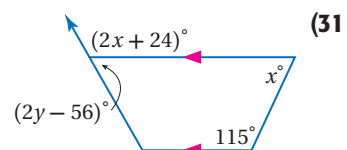
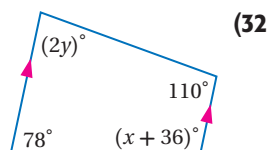
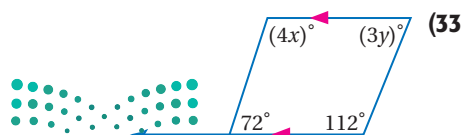
5 ft, 10 ft (28)

3.2 cm, 4.4 cm (27)

(30) **رحلات:** سأل عليّ صديقه ماجداً عن تكلفة الرحلة التي قام بها مع صديقه، فلم يتذكر ماجد تكلفة الشخص الواحد، ولكنه تذكر أن التكلفة الكلية كانت أكثر من 500 ريال. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن تكلفة الشخص الواحد كانت أكثر من 250 ريالاً. (الدرس 4-4)

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة كلٍّ من x و y في الأسئلة الآتية، موضّحاً إجابتك :



المفردات الأساسية

- العمود المنصف (ص 81)
- المستقيمت المتلاقية (ص 82)
- نقطة التلاقي (ص 82)
- مركز الدائرة الخارجية للمثلث (ص 82)
- مركز الدائرة الداخلية للمثلث (ص 85)
- القطعة المتوسطة (ص 91)
- مركز المثلث (ص 91)
- ارتفاع المثلث (ص 93)
- ملتقى ارتفاعات المثلث (ص 93)
- التبرير غير المباشر (ص 107)
- البرهان غير المباشر (ص 107)
- البرهان بالتناقض (ص 107)

اختبار المفردات

بين ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

- 1) مركز المثلث هو النقطة التي تتقاطع عندها الارتفاعات .
- 2) نقطة تلاقي القطع المتوسطة لمثلث تُسمى مركز الدائرة الداخلية.
- 3) نقطة التلاقي هي النقطة التي تتقاطع عندها ثلاثة خطوط أو أكثر.
- 4) مركز الدائرة الخارجية لمثلث يكون على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.
- 5) لإيجاد مركز المثلث، ارسم منصفات الزوايا أولاً.
- 6) لتبدأ برهاناً بالتناقض، أولاً افترض أن ما تحاول أن تثبته صحيح.
- 7) يستعمل البرهان بالتناقض التبرير غير المباشر.
- 8) القطعة المتوسطة لمثلث تصل نقطة منتصف ضلع المثلث بمنتصف ضلع آخر للمثلث.
- 9) مركز الدائرة الداخلية لمثلث هو نقطة تتقاطع عندها منصفات زوايا المثلث.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

قطع مستقيمة خاصة في المثلثات: (الدرس 4-1, 4-2)

- القطع المستقيمة الخاصة بالمثلثات هي الأعمدة المنصفة ومنصفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات.
- نقاط تقاطع المستقيمت الخاصة في مثلث تُسمى نقاط التلاقي.
- نقاط التلاقي في مثلث، هي مركز الدائرة الخارجية ومركز الدائرة الداخلية ومركز المثلث ومُلْتَقَى الارتفاعات.

البرهان غير المباشر: (الدرس 4-4)

- كتابة برهان غير مباشر:
- (1) افترض أن النتيجة غير صحيحة.
- (2) بين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.
- (3) بما أن النتيجة الخطأ تؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فإن النتيجة الأصلية ستكون صحيحة.

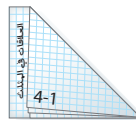
متباينات المثلث: (الدروس 4-3, 4-5, 4-6)

- متباينة الزاوية الخارجية: قياس الزاوية الخارجية لمثلث، يكون أكبر من أي من الزاويتين الداخليتين البعديتين عنها.
- الزاوية الكبرى في مثلث تقابل الضلع الأطول، والزاوية الصغرى تقابل الضلع الأقصر.
- مجموع طولي أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث.
- المتباينة SAS: (نظرية الرافعة) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.
- المتباينة SSS: (عكس نظرية الرافعة) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

منظم أفكار

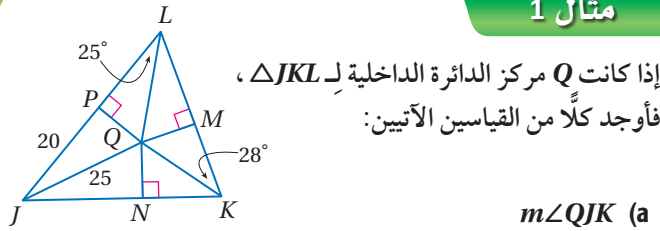
المطويات

تأكد من أن المفاهيم الأساسية قد دُوِّنت في مطويتك.



مراجعة الدروس

4-1 المنصفات في المثلث (ص 81-89)



نظرية مجموع قياسات

$$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180^\circ$$

زوايا المثلث

عوض

$$2(25^\circ) + 2(28^\circ) + m\angle NJP = 180^\circ$$

بسّط

$$106^\circ + m\angle NJP = 180^\circ$$

اطرح 106 من الطرفين

$$m\angle NJP = 74^\circ$$

وبما أنّ $\overrightarrow{JQ}$ ينصف $\angle J$ ، إذن $2m\angle QJK = m\angle NJP$ ؛ أي أنّ $m\angle QJK = \frac{1}{2} m\angle NJP$ ؛ إذن: $m\angle QJK = \frac{1}{2} \times 74^\circ = 37^\circ$.

QP (b)

نظرية فيثاغورس

$$a^2 + b^2 = c^2$$

عوض

$$(QP)^2 + 20^2 = 25^2$$

$$20^2 = 400, 25^2 = 625$$

$$(QP)^2 + 400 = 625$$

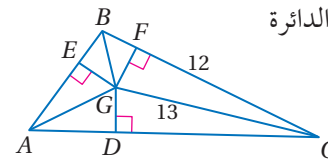
اطرح 400 من الطرفين

$$(QP)^2 = 225$$

بسّط

$$QP = 15$$

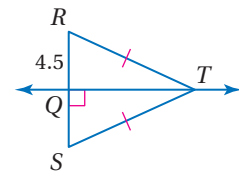
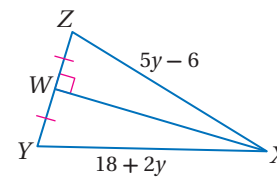
(10) أوجد EG إذا كانت G مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$.



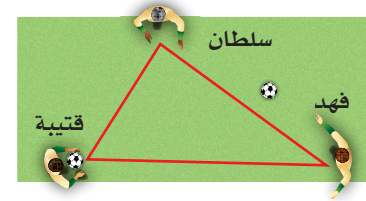
أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:

XZ (12)

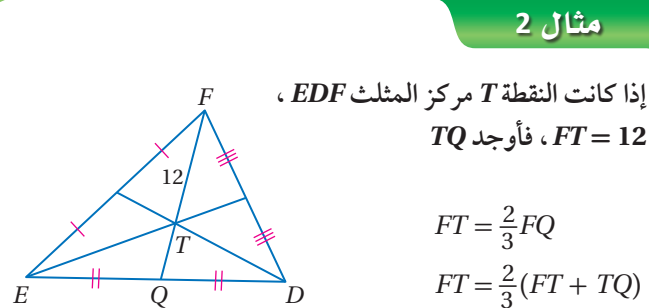
RS (11)



(13) كرة قدم: يقوم قتيبة وفهد وسلمان بعملية إحماء قبل بدء مباراة كرة قدم، حيث يتطلب أحد تدريبات الإحماء أن يشكّل اللاعبون الثلاثة مثلثاً، ويقف اللاعب الرابع في الوسط. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع، بحيث يكون على مسافات متساوية من اللاعبين الثلاثة؟



4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (ص 91-98)



$$FT = 12$$

خاصية التوزيع

$$12 = 8 + \frac{2}{3} TQ$$

اطرح 8 من الطرفين

$$4 = \frac{2}{3} TQ$$

اضرب الطرفين في $\frac{3}{2}$

$$6 = TQ$$

(14) رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0)$, $E(0, 7)$, $F(6, 3)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$.

(15) احتفالات: تُريد حفصة أن تعلق 4 مثلثات متطابقة في

سقف غرفة الصف، بحيث تكون موازية لأرضية الغرفة.

فرسمت نموذجاً لأحد المثلثات على مستوى إحداثي،

فكانت إحداثيات رؤوسه هي $(0, 4)$, $(3, 8)$, $(6, 0)$.

إذا كان كل مثلث سيعلق في السقف بخيط، فما إحداثيات

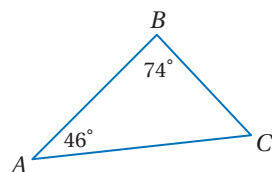
النقطة التي سيربط الخيط عندها بالمثلث؟

4-3

المتباينات في المثلث (ص 98-91)

مثال 3

اكتب زوايا $\triangle ABC$ ، مرتبة من الأصغر إلى الأكبر.



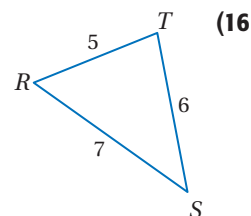
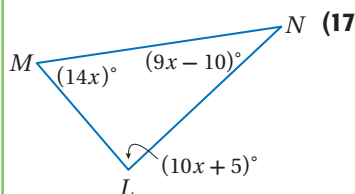
(a) أولاً: أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع

$$m\angle C = 180^\circ - (46^\circ + 74^\circ) = 60^\circ$$

قياسات الزوايا. لذا فالزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$.

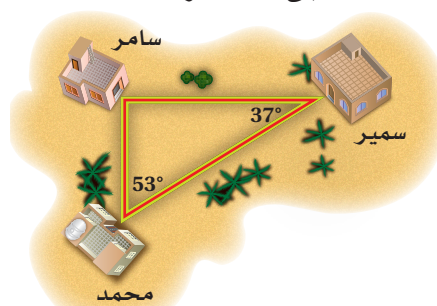
(b) والأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$.

اكتب زوايا كل مثلث مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين:



(18) **جيران:** يسكن سمير ومحمد وسامر عند تقاطعات ثلاثة

شوارع تشكّل المثلث المبين أدناه، إذا أرادوا الالتقاء عند أحدهم، فأَي الطريقين أقصر: اصطحاب سمير لمحمد وذهابهما معاً إلى بيت سامر. أم اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معاً إلى بيت سمير؟



4-4

البرهان غير المباشر (ص 113-107)

مثال 4

اكتب الافتراض الضروري للبدء في برهان غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

$$\overline{XY} \neq \overline{JK} \quad (a)$$

الافتراض هو: $\overline{XY} \cong \overline{JK}$

$$(b) \text{ إذا كان } 3x < 18, \text{ فإن } x < 6$$

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي:

$$x < 6, \text{ ونفيها هو } x \geq 6; \text{ لذا فالافتراض هو } x \geq 6$$

$$(c) \angle 2 \text{ زاوية حادة.}$$

الافتراض هو: $\angle 2$ ليست زاوية حادة.

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

$$(19) m\angle A \geq m\angle B$$

$$(20) \triangle FGH \cong \triangle MNO$$

$$(21) \triangle KLM \text{ قائم الزاوية.}$$

$$(22) \text{ إذا كان } 3y < 12, \text{ فإن } y < 4.$$

(23) اكتب برهاناً غير مباشر لتبين أنه إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإنه لا يمكن أن تكون أيٌّ منهما قائمة.

(24) **مطالعة:** اشترى محمود كتابين بأكثر من 180 ريالاً، استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن ثمن أحدهما على الأقل أكثر من 90 ريالاً.



4-5

متباينة المثلث (ص 120-115)

مثال 5

حدّد ما إذا كانت القياسات (7, 10, 9) يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب. اختبر كل متباينة.

$$10 + 9 > 7 \quad 7 + 9 > 10 \quad 7 + 10 > 9$$

$$19 > 7 \quad 16 > 10 \quad 17 > 9$$

بما أن مجموع طولَي أيّ ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث، إذن القطع المستقيمة التي أطوالها 7, 10, 9 تشكّل مثلثًا.

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

$$5, 6, 9 \quad (26) \quad 3, 4, 8$$

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث علم طولاه ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

$$10.5 \text{ cm}, 4 \text{ cm} \quad (28) \quad 5 \text{ ft}, 7 \text{ ft} \quad (27)$$

(29) **درّاجات:** يركب خالد دراجته لزيارة صديقه وليد، وبما أن الطريق المباشر مغلق، فقد سلك طريقًا فرعيًا طوله 2 km، ثم انعطف وسلك طريقًا آخر طوله 3 km حتى وصل منزل وليد. إذا كانت الطرق الثلاثة تشكّل مثلثًا رأسان من رؤوسه هما منزل وليد وخالد، فاكتب متباينة تمثل مدى المسافة الممكنة بين منزليهما.

4-6

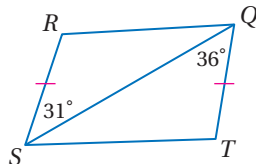
المتباينات في مثلثين (ص 128-121)

مثال 6

قارن بين كل قياسين فيما يأتي :

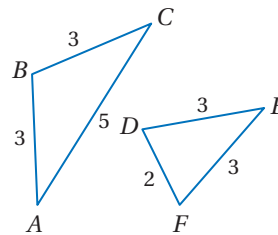
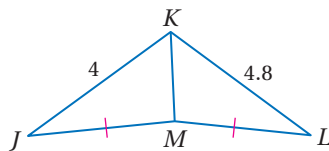
(a) RQ, ST

بما أن: $\overline{RS} \cong \overline{TQ}$, $\overline{QS} \cong \overline{QS}$, $m\angle SQT > m\angle RSQ$ في المثلثين STQ, QRS ، إذن $RQ < ST$ بحسب نظرية المفصلة.



(b) $m\angle KML, m\angle KMJ$

بما أن: $\overline{JM} \cong \overline{LM}$, $\overline{KM} \cong \overline{KM}$, $LK > JK$ ، إذن $\angle KML > \angle KMJ$ بحسب عكس نظرية المفصلة.

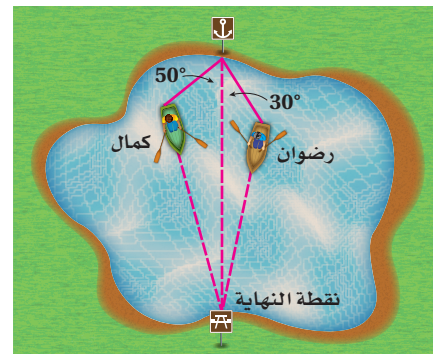


(30) مستعملًا المثلثين المجاورين،

قارن بين القياسين

$$m\angle ABC, m\angle DEF$$

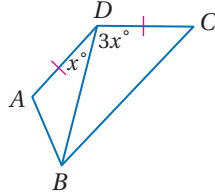
(31) **تجديف:** يُجَدِّفُ كلٌّ من رضوان وكمال في بركة متجهين إلى نقطة محددة، ولأنه ليس لهما خبرة في التجديف فقد انحرفا عن المسار مدة 4 دقائق، قطع كل منهما فيها مسافة 50 m، ثم استعدادا مسارهما الصحيح، كما في الشكل. أيهما أقرب إلى نقطة النهاية عند هذه اللحظة؟



(13 اختيار من متعدد): إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما 5 ، 11 ، فأَيُّ متباينة مما يأتي تمثل مدى طول الضلع الثالث؟

- A $6 < x < 10$ B $5 < x < 11$
C $6 < x < 16$ D $x < 5$ أو $x > 11$

(14) قارن بين AB , BC في الشكل أدناه.



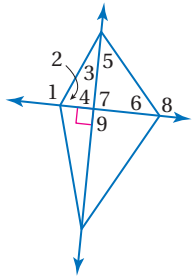
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

(15) إذا كان 8 عاملاً للعدد n ، فإن 4 عامل للعدد n .

(16) $m\angle M > m\angle N$

(17) إذا كان $3a + 7 \leq 28$ ، فإن $a \leq 7$.

استعمل الشكل المجاور، لتحديد أي زاوية لها أكبر قياس في كلٍّ من المجموعات الآتية:



(18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$

(19) $\angle 9, \angle 8, \angle 3$

(20) $\angle 4, \angle 3, \angle 2$

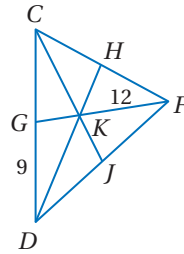
أوجد متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في المثلث الذي عُلِمَ طولاً ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(21) 10 ft, 16 ft

(22) 23 m, 39 m

(1 حدائق): يزرع ماجد ورداً في حوض دائري داخل منطقة مثلثة الشكل محدودة بثلاثة طرق للمشاة، أيُّ نقطة من نقاط التلاقي في المثلث سيستعملها مركزاً لأكبر دائرة يمكن رسمها داخل المثلث؟

النقطة K مركز $\triangle CDF$ ، $DK = 16$. أوجد كلَّ طولٍ مما يأتي:



(2) KH

(3) CD

(4) FG

(5 برهان): اكتب برهاناً غير مباشر.

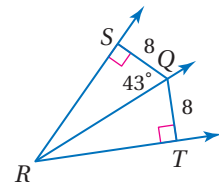
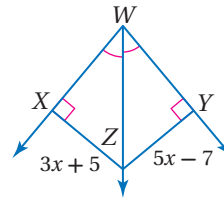
المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

المطلوب: $x \geq 9$

أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

(7) XZ

(6) $m\angle TQR$



(8 اختيار من متعدد): إذا كان طولاً ضلعين في مثلث هما 3.1 cm و 4.6 cm ، فما أصغر عددٍ صحيحٍ يمكن أن يكون طولاً للضلع الثالث؟

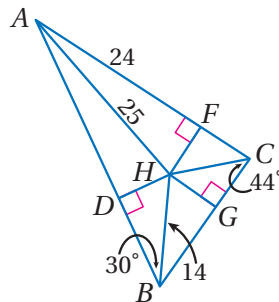
A 1.6 cm

B 2 cm

C 7.5 cm

D 8 cm

إذا كانت H مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، فأوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:



(9) DH

(10) BD

(11) $m\angle HAC$

(12) $m\angle DHG$



استبعاد البدائل غير المعقولة

يمكنك استبعاد البدائل غير المعقولة؛ لتحديد الإجابة الصحيحة عند حل أسئلة الاختيار من متعدد.

طرائق استبعاد البدائل غير المعقولة

الخطوة 1

اقرأ نص السؤال بعناية؛ لتحديد المطلوب إيجاد بالضبط.

- ما المطلوب حله؟
- هل الجواب عدد صحيح أم كسر اعتيادي أم كسر عشري؟
- هل تحتاج إلى استعمال رسم أو جدول؟
- ما وحدات القياس المطلوبة للإجابة (إن وجدت)؟

الخطوة 2

تفحص كل بديل بعناية وقدّر معقوليته.

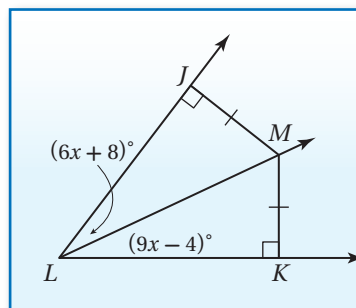
- استبعد أي بديل يبدو أنه غير صحيح.
- استبعد أي بديل ليس ضمن الصيغة المناسبة للإجابة الصحيحة.
- استبعد أي بديل لا يتضمن وحدات القياس الصحيحة.

الخطوة 3

حل السؤال، واختر الإجابة الصحيحة من بين البدائل المتبقية، ثم تحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعطيات في حلّها.



ما قياس $\angle KLM$ ؟

- A 32°
- B 44°
- C 78°
- D 94°



اقرأ السؤال وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180° ، فإن $m\angle KLM + m\angle LMK$ يجب أن يساوي 90° ، وإلا زاد المجموع على 180° ، وبما أن البديل D هو قياس لزاوية منفرجة، فإنه يُستبعد لعدم معقوليته؛ وعليه فالجواب الصحيح يكون A أو B أو C.

حل المسألة. بحسب عكس نظرية منصف الزاوية التي تنص على أنه: "إذا وقعت نقطة داخل زاوية، وكانت على بعدين متساويين من ضلعيها، فإن هذه النقطة تقع على منصف الزاوية"، وبما أن النقطة M على بُعدين متساويين من ضلعي الزاوية LK, LJ ، فإنها تقع على منصف $\angle L$ ؛ لذا $\angle JLM$ يجب أن تطابق $\angle KLM$ ؛ والآن اكتب معادلة لإيجاد قيمة x وحلها.

$$6x + 8 = 9x - 4$$

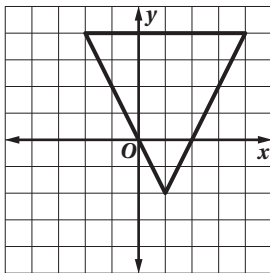
$$-3x = -12$$

$$x = 4$$

إذن $m\angle KLM = [9(4) - 4]^\circ = 32^\circ$ ، والبديل A يمثل الإجابة الصحيحة.

تمارين ومسائل

3 ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



- A $(-\frac{3}{4}, -1)$ B $(-\frac{4}{3}, 1)$
C $(1, \frac{5}{2})$ D $(1, \frac{9}{4})$

4 إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، وكان $m\angle A = 94^\circ$ ، فأَيُّ مما يأتي يجب أن تكون صحيحة؟

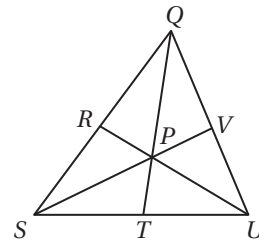
- A $m\angle B = 94^\circ$
B $m\angle B = 47^\circ$
C $AB = BC$
D $AB = AC$

5 أيُّ مما يأتي يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

- A 1.9, 3.2, 4 B 1.6, 3, 3.4
C 3, 7.2, 7.5 D 2.6, 4.5, 6

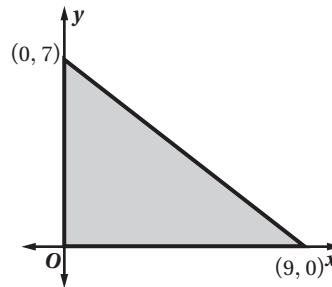
اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

1 النقطة P مركز المثلث QUS ، إذا كان $QP = 14$ cm، فما طول $\overline{QT}$ ؟



- A 7 cm B 12 cm
C 18 cm D 21 cm

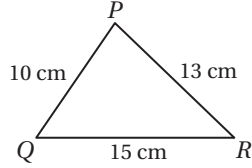
2 كم وحدة مربعة مساحة المثلث في الشكل أدناه؟



- A 8 B 27.4
C 31.5 D 63

أسئلة الاختيار من متعدد

(4) ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$ ؟



$m\angle R < m\angle Q < m\angle P$ A

$m\angle R < m\angle P < m\angle Q$ B

$m\angle Q < m\angle P < m\angle R$ C

$m\angle P < m\angle Q < m\angle R$ D

(5) ما الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر للعبارة "الزاوية S ليست زاوية منفرجة"؟

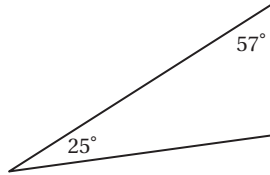
A $\angle S$ زاوية قائمة

B $\angle S$ زاوية منفرجة

C $\angle S$ زاوية حادة

D $\angle S$ ليست زاوية حادة

(6) صنّف المثلث أدناه تبعاً لقياسات زواياه.



A حادّ الزوايا

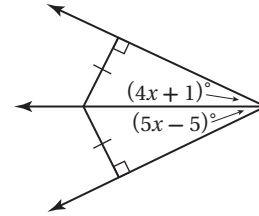
B متطابق الزوايا

C منفرج الزاوية

D قائم الزاوية

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم حدّد رمز الإجابة الصحيحة:

(1) أوجد قيمة x .



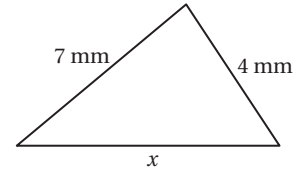
3 A

4 B

5 C

6 D

(2) أيُّ مما يأتي لا يمكن أن يكون قيمة لـ x ؟



8 mm A

9 mm B

10 mm C

11 mm D

(3) أيُّ مما يأتي أفضل وصف لأقصر مسافة من أحد رؤوس مثلث إلى الضلع المقابل له؟

A ارتفاع

B عمود منصف

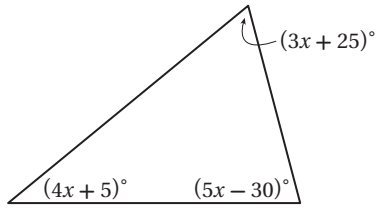
C قطعة متوسطة

D قطعة مستقيمة



- (11) خرج كل من حمزة وهاني مع فرقة الكشافه وخيموا في الصحراء، فترك حمزة المخيم وسار 2 km في اتجاه الشرق. ثم انعطف 20° في اتجاه الجنوب الشرقي. وسار 4 km أخرى. وأما هاني فسار 2 km في اتجاه الغرب، ثم انعطف 30° في اتجاه الشمال الغربي، وسار 4 km أخرى. أيهما أبعد عن المخيم؟

- (12) أوجد قيمة x في المثلث أدناه.



أسئلة ذات إجابات مطولة

- (13) إذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-3, 1)$, $B(0, 2)$, $C(3, 4)$ فأجب عن الأسئلة التالية مبيناً خطوات الحل:

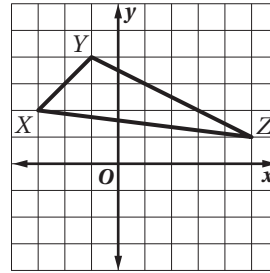
- (a) ارسم هذا المثلث في المستوى الإحداثي.
(b) أوجد أطوال أضلاعه (قرب إلى أقرب جزء من عشرة).
(c) صنّف المثلث من حيث أضلاعه وزواياه.
(d) قارن بين $m\angle A$, $m\angle C$.

أسئلة ذات إجابات قصيرة

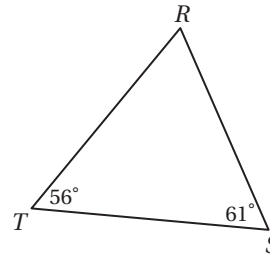
أجب عن الأسئلة الآتية:

- (7) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث هما 15 cm, 9 cm، فما أصغر عدد صحيح من الستمترات يمكن أن يكون طولاً للضلع الثالث؟

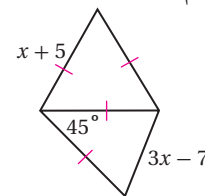
- (8) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



- (9) اكتب أضلاع المثلث أدناه مرتبةً تبعاً لأطوالها من الأقصر إلى الأطول:



- (10) اكتب متباينة تصف قيم x الممكنة.



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع الإجابة عن ...
3-1, 4-3	3-2	4-6	4-6	4-3	4-2	4-5	3-1	4-4	4-3	4-2	4-5	4-1	فعد إلى الدرس...