الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

فيما سبق

درست اجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة

والآن

١/ أحول الاعداد المركبة من الصورة الديكارتية الى الصورة القطبية والعكس .

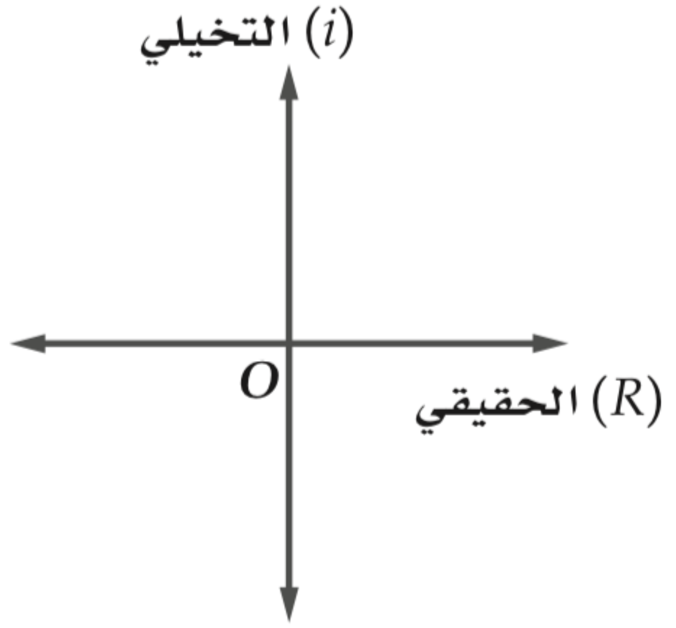
٢|اجد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها ، وأجد جذورها وقواها في الصورة القطبية

لماذا؟

يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

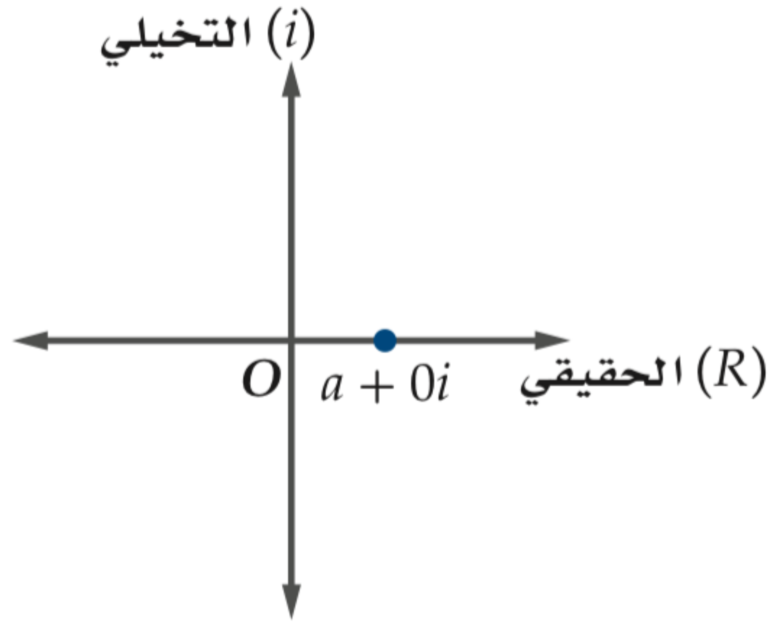
(**إرشاد :** استعملت كلمة المعاوقة بدلًا من كلمة المقاومة؛ لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

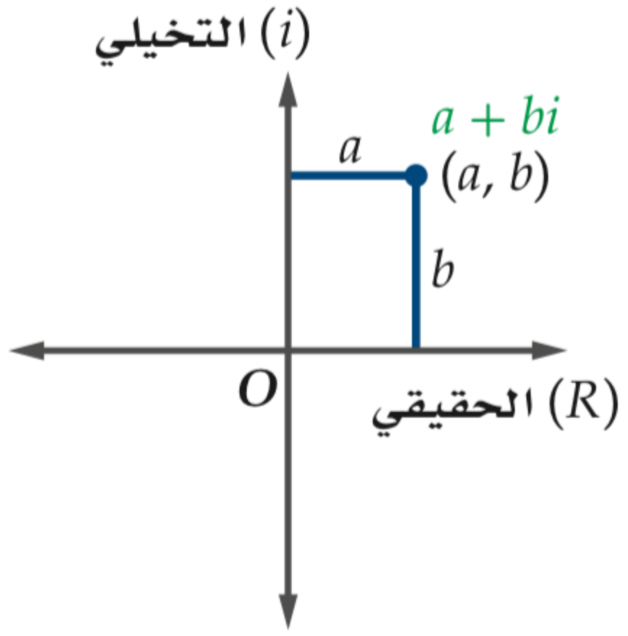
الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي bi. ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيَّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي** ويرمز له بالرمز R، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي** ويرمز له بالرمز i.



المستوى المركب

في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.



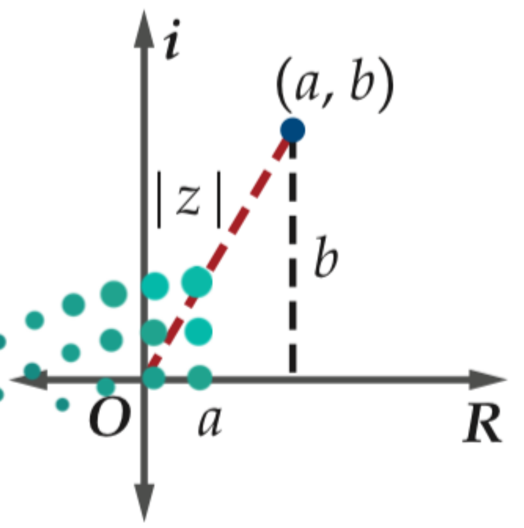


تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب. وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

مفهوم أساسي — القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



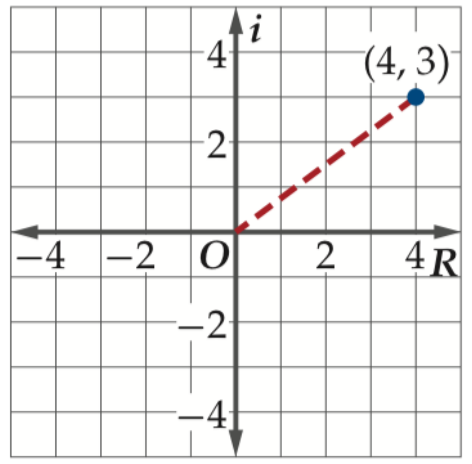
تمثيل الأعداد المركّبة وإيجاد قيمها المطلقة

مثال 1

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركّب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 4 + 3i$

$(a\,, b) = (4\,, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

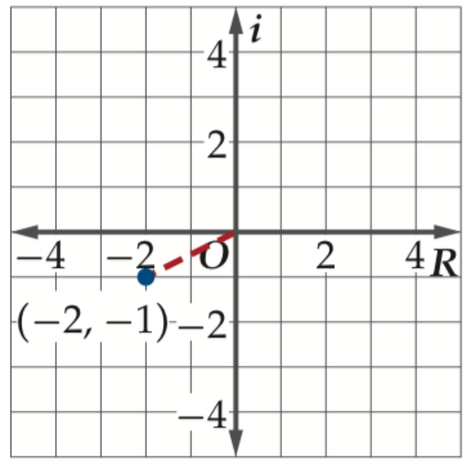
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4\,, b = 3$

$= \sqrt{25} = 5$ بسّط

القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$ تساوي 5.

b) $z = -2 - i$

$(a\,, b) = (-2\,, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ $a = -2\,, b = -1$

$= \sqrt{5} \approx 2.24$ بسّط

القيمة المطلقة للعدد $-2 - i$ تساوي 2.24 تقريبًا.

تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1A) $5 + 2i$

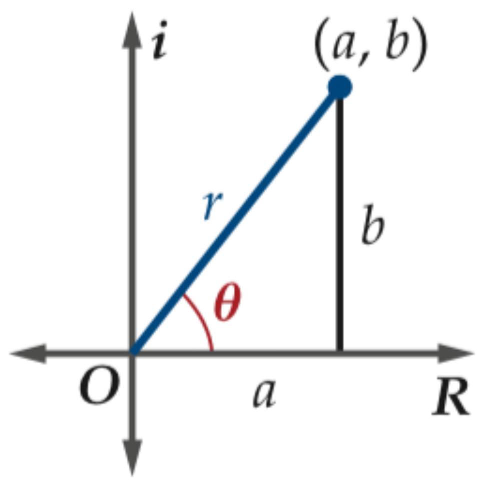
1B) $-3 + 4i$

تدرب

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1) $z = 4 + 4i$

2) $z = -3 + i$



كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x, y لإيجاد قيم a, b.

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$r\cos\theta = a \qquad r\sin\theta = b \qquad \text{اضرب كل طرف في } r$$

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a، b، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

$$z = a + bi \qquad \text{العدد المركب الأصلي}$$

$$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i \qquad a = r\cos\theta ، b = r\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{خُذ العامل المشترك}$$

في حالة العدد المركب، فإن r تمثِّل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

تنبيه!

الصورة القطبية:
يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب

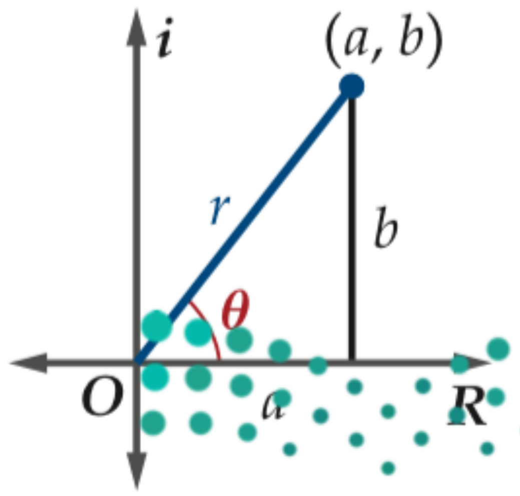
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$،

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



إرشادات للدراسة

السعة: كما في الإحداثيات القطبية، فإن θ ليست وحيدةً، مع أنها تُعطى عادةً في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

الأعداد المركبة بالصورة القطبية

مثال 2

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

(a $-6+8i$

أوجد المقياس r والسعة θ.

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ — صيغ التحويل، $a<0$ — $\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}+\pi$

$=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$ — $a=-6,\ b=8$ — $=\text{Tan}^{-1}(-\frac{8}{6})+\pi\approx 2.21$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6+8i$ هي $10(\cos 2.21+i\sin 2.21)$ تقريبًا.

(b $4+\sqrt{3}i$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ — صيغ التحويل، $a>0$ — $\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$

$=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}$ — $a=4,\ b=\sqrt{3}$ — $=\text{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\sqrt{19}\approx 4.36$ — بسّط — ≈ 0.41

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $4+\sqrt{3}i$ هي $4.36(\cos 0.41+i\sin 0.41)$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

$9 + 7i$ (2A

$-2 - 2i$ (2B

تدرب

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

8) $4 + 4i$

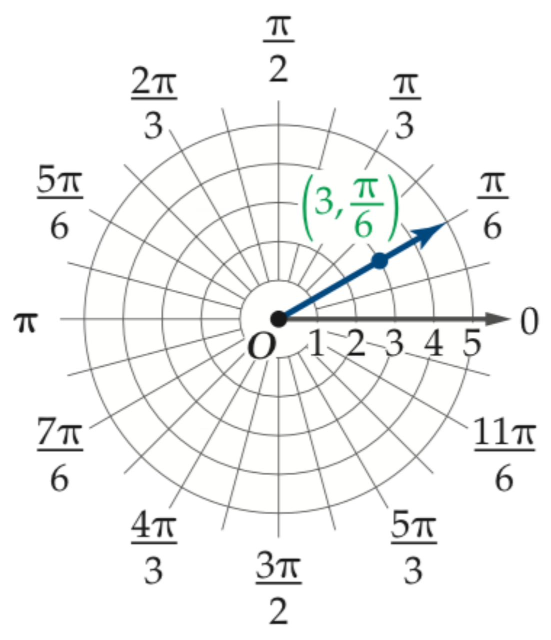
9) $-2 + i$

مثال 3

مثِّل العدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.

عيِّن الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.



ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بسِّط.

$3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	الصورة القطبية
$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$	بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام
$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$	خاصية التوزيع

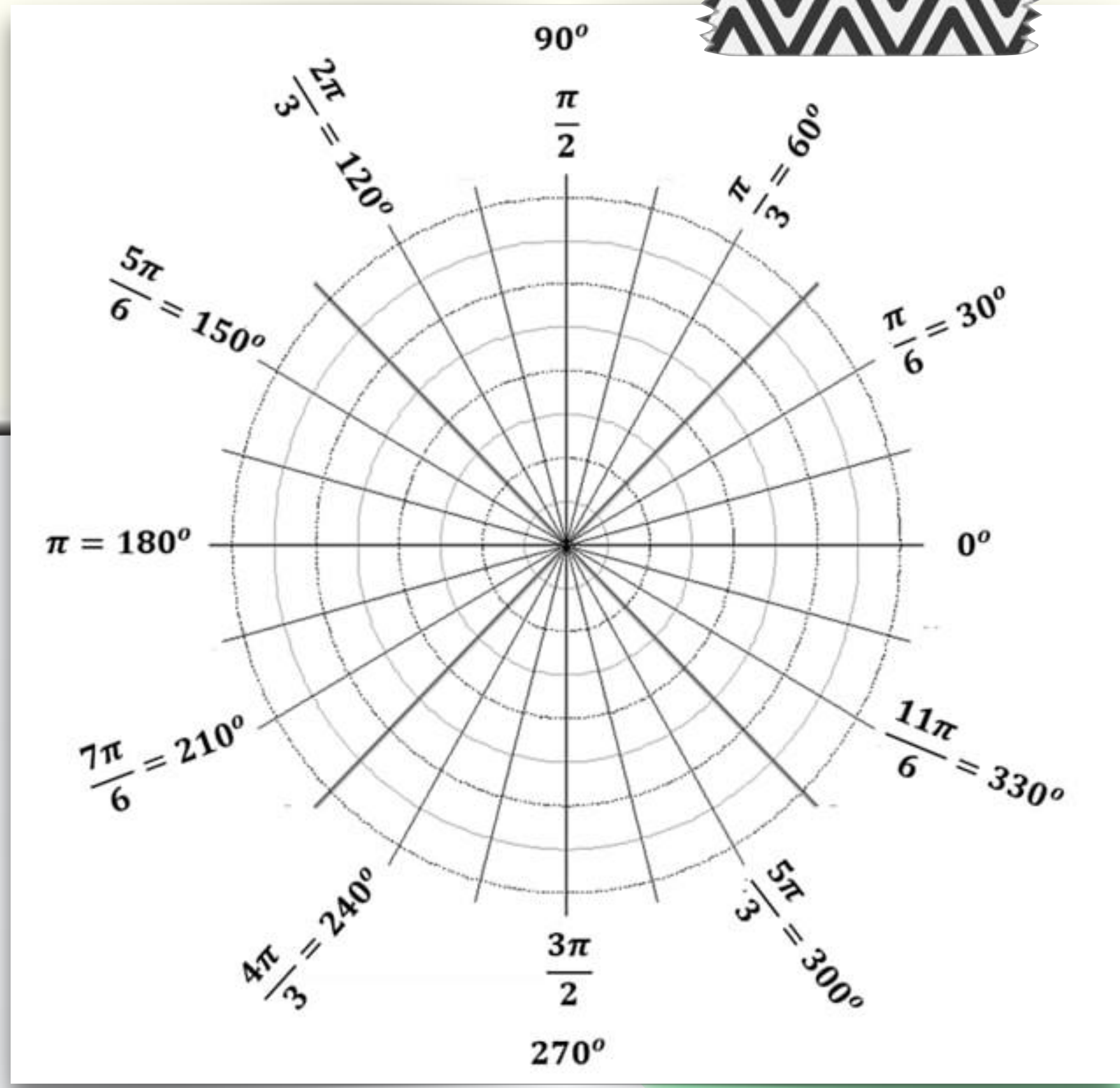
فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

تمثيل الصورة القطبية للعدد المركب وتحويلها للصورة الديكارتية

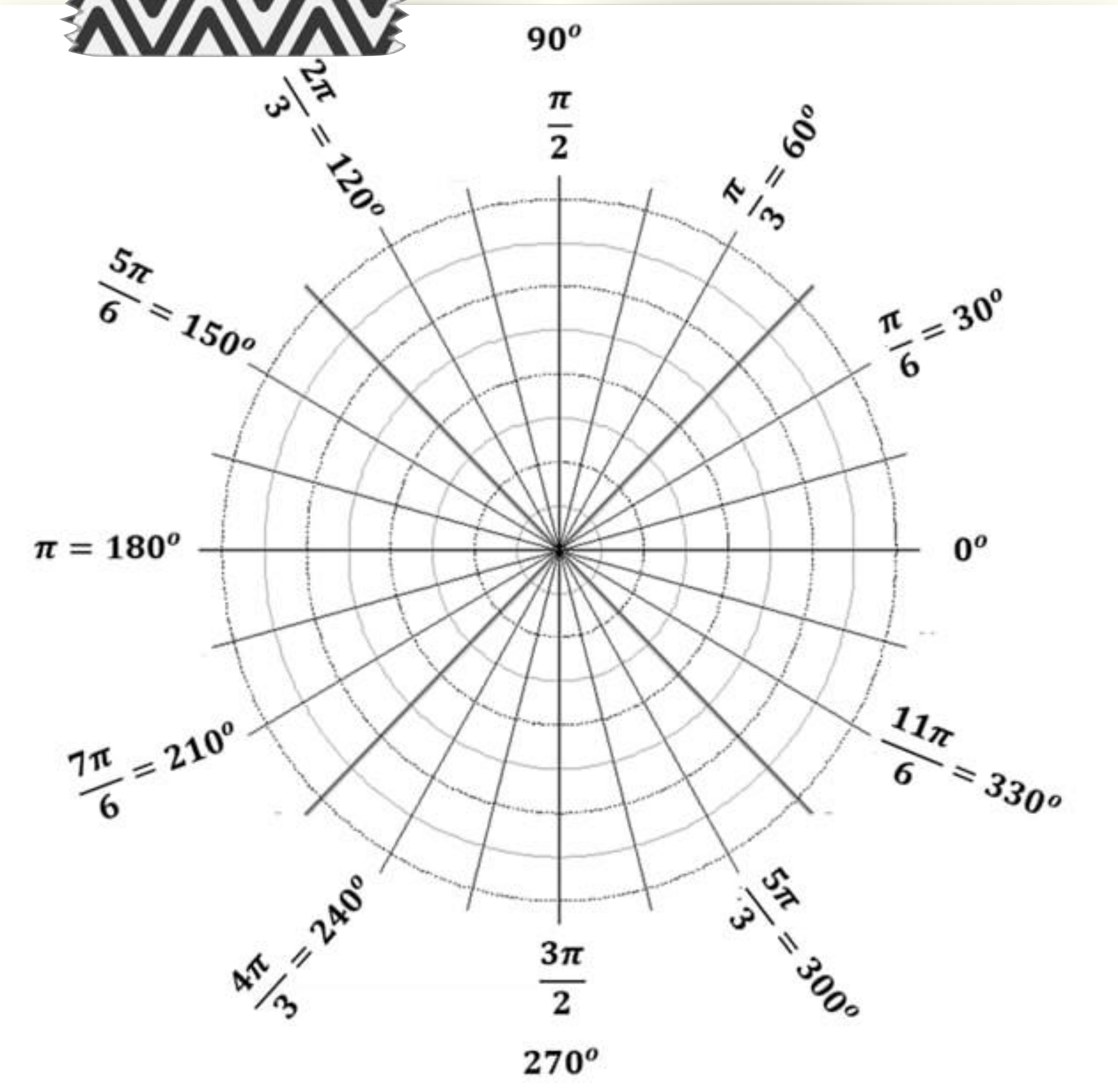
تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

(3A $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$



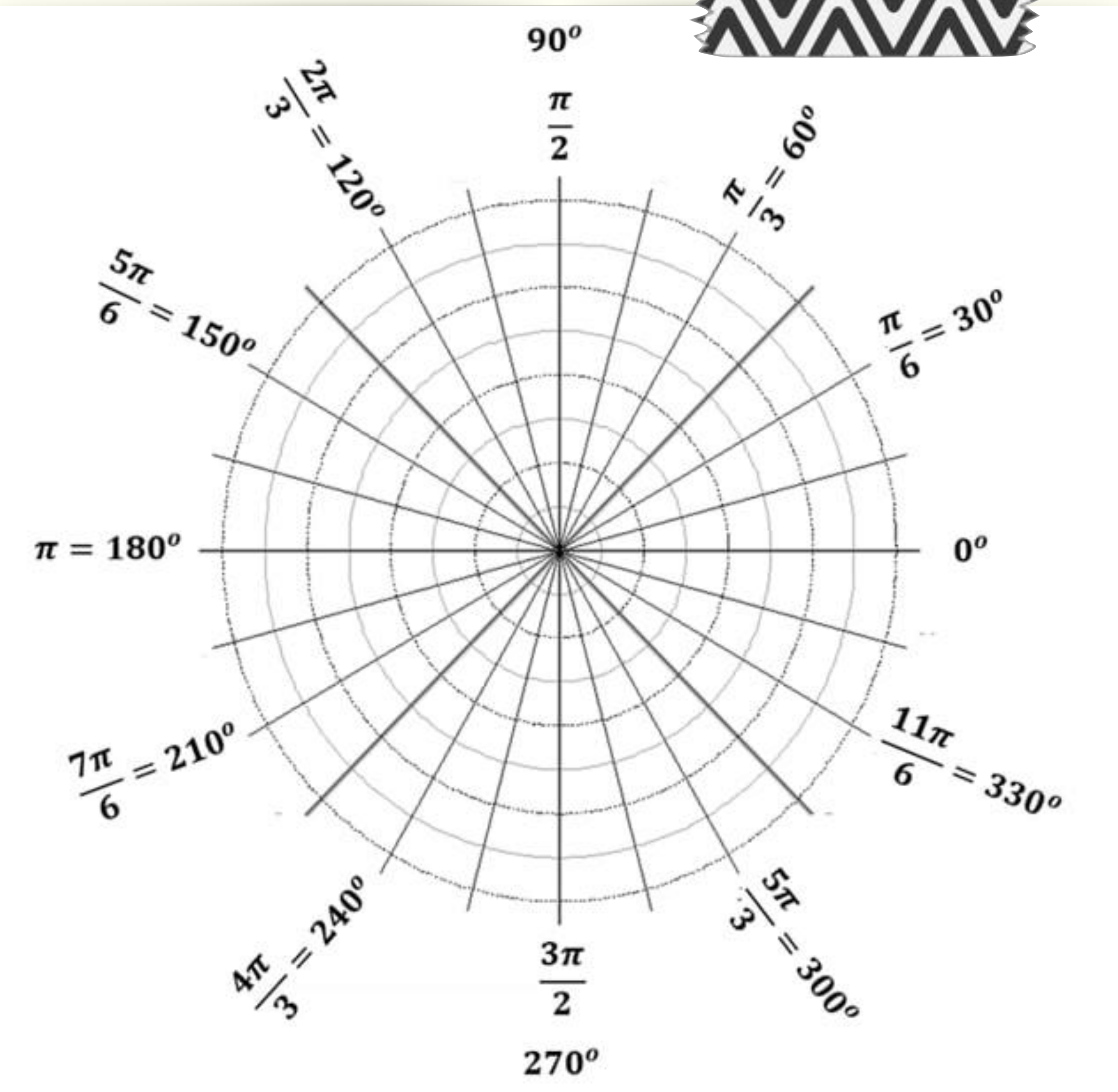
(3B $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$



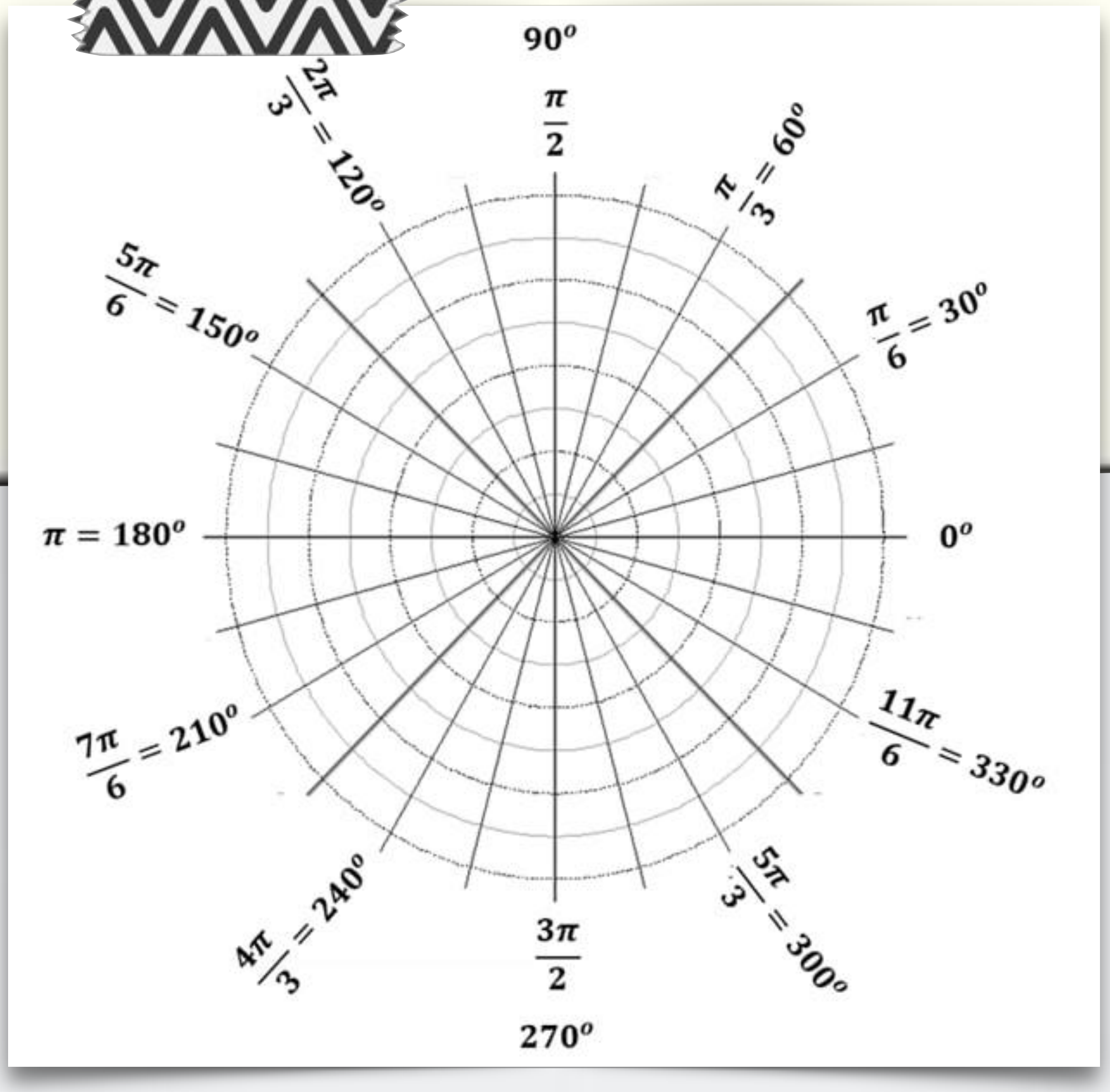
تدرب

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3)

(14 $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



(15 $\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$



مقطع توضيحي

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$	الصورة القطبيّة للعددين المركبين z_1 ، z_2
$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$	فك الأقواس
$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$	جمّع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدل i^2 بـ -1
$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$	أخرج i عاملًا مشتركًا
$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	متطابقتا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع

مفهوم أساسي ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

بسمة math

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

مثال 4

أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$ العبارة المعطاة

$$=2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$ صيغة الضرب

$$=8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$ بسّط

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

$$8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$ الصورة القطبية

$$=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$ أوجد قيم الجيب وجيب التمام

$$=4\sqrt{3}-4i$$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$، والصورة الديكارتية $4\sqrt{3}-4i$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(4B $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

مثال 5

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي $150\ V$، وكانت معاوقتها Z تساوي Ω $(3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j\sin(-0.46)])$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

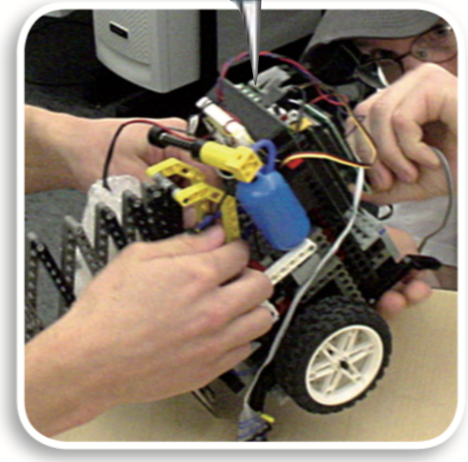
اكتب العدد 150 على الصورة القطبية.

$$150 = 150\ (\cos 0 + j \sin 0) \qquad r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150,\ \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{0}{150} = 0$$

حُلّ $I \cdot Z = V$ بالنسبة لـ I.

$I \cdot Z = V$	المعادلة الأصلية
$I = \dfrac{V}{Z}$	اقسم كل طرف على Z
$I = \dfrac{150\ (\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$	$V = 150 (\cos 0 + j \sin 0)$, $Z = 3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j\sin(-0.46)]$
$I = \dfrac{150}{3\sqrt{5}} \{\cos[0 - (-0.46)] + j \sin[0 - (-0.46)]\}$	صيغة القسمة
$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$	بسِّط

أي أن شدة التيار تساوي $10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ أمبير تقريبًا.



الربط مع الحياة

مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغِل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.

تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية $120\,V$ ، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير ، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية.

تدرب

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 5 , 4)

18) $6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

20) $3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$

يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

$$z \cdot z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta)$$ اضرب

$$z^2 = r^2[\cos (\theta + \theta) + i \sin (\theta + \theta)]$$ صيغة الضرب

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$ بسّط

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta)$$ اضرب

$$z^3 = r^3[\cos (2\theta + \theta) + i \sin (2\theta + \theta)]$$ صيغة الضرب

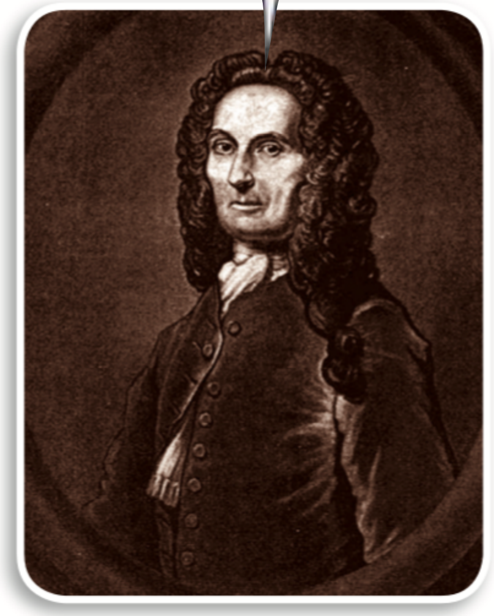
$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$ بسّط

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n .

نظرية

نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:
$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.



تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر
(1667 م – 1754 م)
رياضي فرنسي عُرف بالنظرية المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات هو *Doctrine of Chances*. ويُعد ديموافر من الرياضيين الروّاد في الهندسة التحليلية والاحتمالات.

بسمة math

مثال 6

نظرية ديموافر

أوجد $(4+4\sqrt{3}i)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

أولًا: اكتب $4+4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

صيغ التحويل

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \theta=\operatorname{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$$

$a=4\,,\,b=4\sqrt{3}$

$$=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2} \qquad =\operatorname{Tan}^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$$

بسّط

$$=\sqrt{16+48} \qquad =\operatorname{Tan}^{-1}\sqrt{3}$$

بسّط

$$=8 \qquad =\frac{\pi}{3}$$

فتكون الصورة القطبية للعدد $4+4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$(4+4\sqrt{3}i)^6=\left[8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6$	الصورة القطبيّة
$=8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	نظرية ديموافر
$=262144\,(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$	بسّط
$=262144(1+0i)$	أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام
$=262144$	بسّط

أي أن $(4+4\sqrt{3}i)^6=262144$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

6A) $(1+\sqrt{3}i)^4$

6B) $(2\sqrt{3}-2i)^8$

تدرب

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

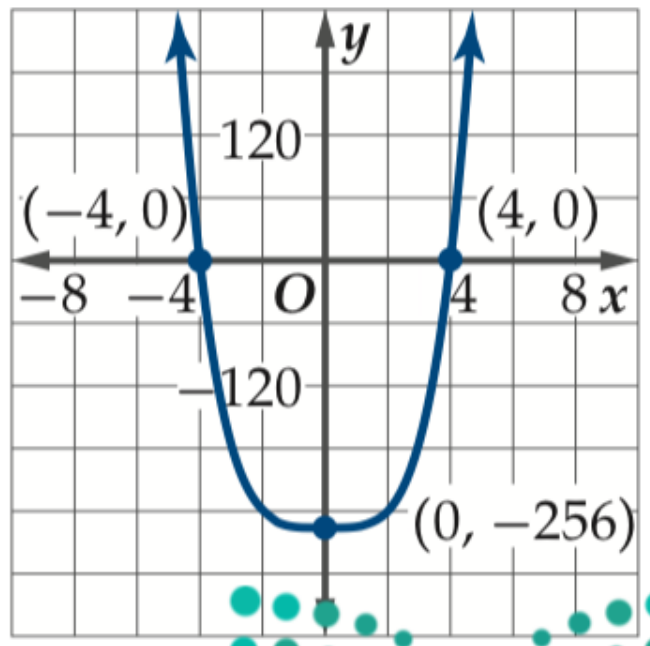
28) $(2+2\sqrt{3}i)^6$

29) $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$

مراجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر
كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما $4, -4$. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4 , -4$، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.



درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$.
وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n - 1$ ، وعندما يساوي العدد k n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$ وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$

جذور العدد المركب

مثال 3

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4-4i$.

أولًا: اكتب $-4-4i$ على الصورة القطبية.

$$-4-4i=\sqrt{32}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$r=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{32}\,,\ \theta=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{-4}{-4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$

والآن اكتب الصيغة للجذور الرباعية.

$$(\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

$\theta=\frac{5\pi}{4},\ n=4,\ r^{\frac{1}{n}}=(\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}$

$$=\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right]$$

بسّط

math بسمة

جذور العدد المركب

مثال 3

ثانيًا: لإيجاد الجذور الرباعية، عوّض $k = 0, 1, 2, 3$.

$k=0$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الأول

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16}+i\sin\frac{5\pi}{16}\right)\approx 0.86+1.28i$$

$k=1$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الثاني

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16}+i\sin\frac{13\pi}{16}\right)\approx -1.28+0.86i$$

$k=2$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الثالث

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16}+i\sin\frac{21\pi}{16}\right)\approx -0.86-1.28i$$

$k=3$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الرابع

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16}+i\sin\frac{29\pi}{16}\right)\approx 1.28-0.86i$$

الجذور الرباعية للعدد $-4-4i$ هي $0.86+1.28i,\ -1.28+0.86i,\ -0.86-1.28i,\ 1.28-0.86i$

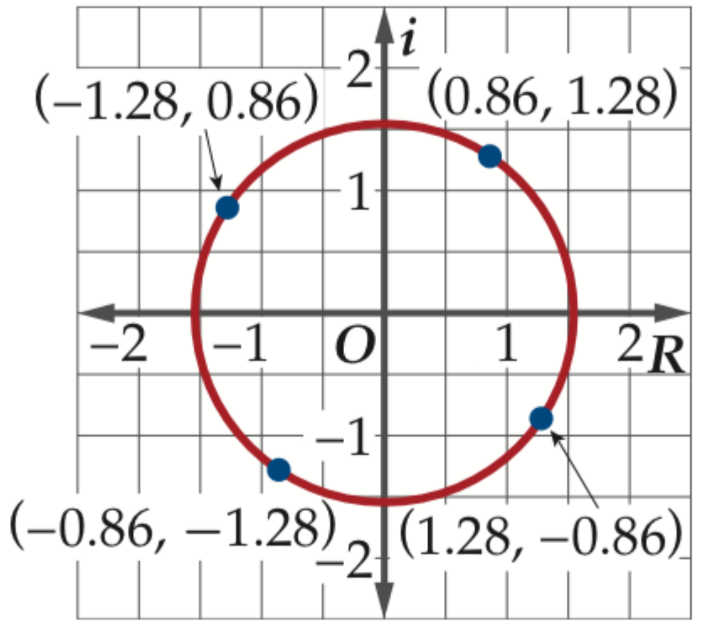
مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8



لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته $(\sqrt[8]{32} \approx 1.54)$، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.

تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

الجذور النونية للعدد الواحد

مثال 8

أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

أولًا: اكتب 1 على الصورة القطبية.

$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ $\qquad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 , \theta = \text{Tan}^{-1} \frac{0}{1} = 0$

والآن اكتب الصيغة للجذور الثمانيَّة.

$1\left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{8} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{8}\right)$ $\qquad \theta = 0, n = 8, r^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$

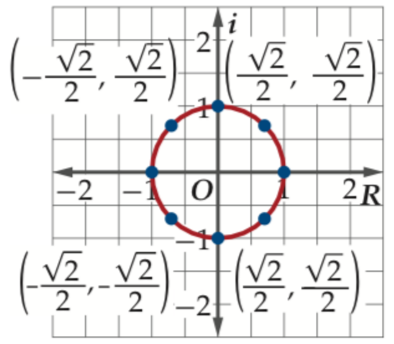
$= \cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4}$ $\qquad$ بسِّط

ثانيًا: افترض أن $k = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1 .

$k = 0 \qquad \cos \frac{(0)\pi}{4} + i \sin \frac{(0)\pi}{4}$

$= \cos 0 + i \sin 0 = 1$ $\qquad$ الجذر الأول

لاحظ أن مقياس كل جذر هو 1، ويمكن إيجاد سعة الجذر الحالية بإضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى سعة الجذر السابق.



الجذر الثاني $\qquad \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر الثالث $\qquad \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

الجذر الرابع $\qquad \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر الخامس $\qquad \cos \pi + i \sin \pi = -1$

الجذر السادس $\qquad \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر السابع $\qquad \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$

الجذر الثامن $\qquad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذور الثُّمانيَّة للعدد 1 هي $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
كما هو موضح في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

تدرب

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:

33) الجذور السداسية للعدد i

34) الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$

تدرب

42) **اكتشف الخطأ:** يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمُ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

57) ما المسافة بين النقطة $\left(-3,\frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6,\frac{\pi}{4}\right)$؟

A 3.97

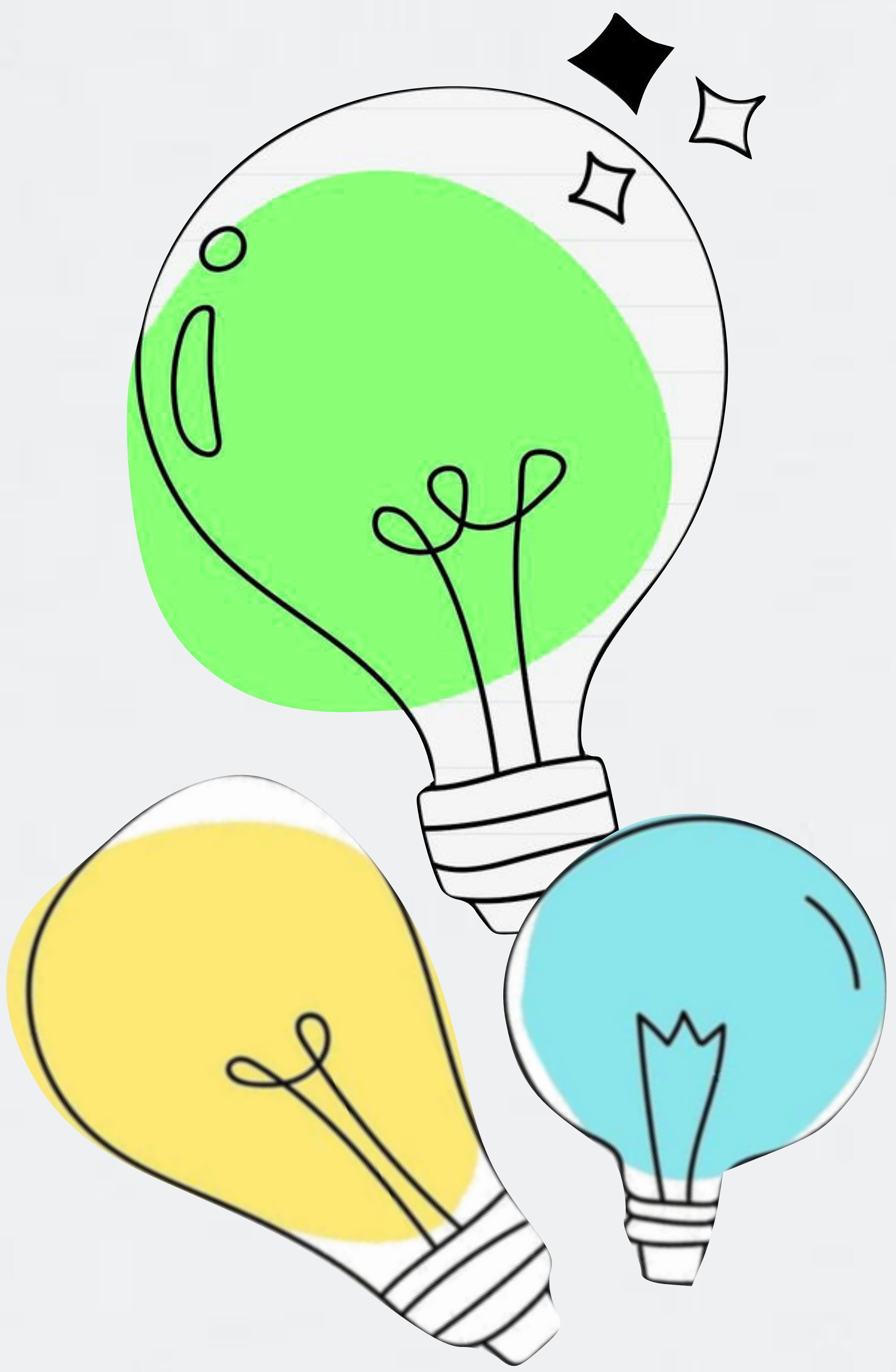
B 4.97

C 5.97

D 6.97

بسمة math

مسابقات



Wordwall

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

مقطع توضيحي

الصورة القطبية والمركبة

المستوى المركب

هو مستوى يحوي محورين ، محور أفقي للجزء الحقيقي و محور رأسي للجزء التخيلي

الصورة القطبية للعدد المركب

هي احدى طرق كتابة العدد المركب

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

المقياس

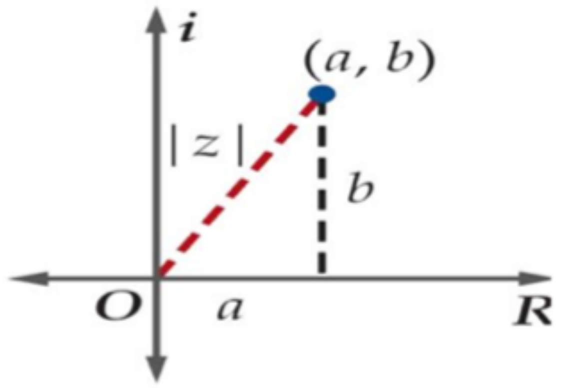
القيمة المطلقة للعدد المركب وهو يمثل r

الجذور النونية للعدد ا

جذور تقع على دائرة الوحدة لها المقياس نفسه ويساوي ا

القيمة المطلقة للعدد المركب

$$|z| = |a + bi|$$



السعة

هي الزاوية بين الاتجاه الموجب للمحور R والقطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة الأصل و النقطة التي تمثل العدد المركب حيث

$-2\pi \le \theta \le 2\pi$

نظرية ديموافر

القوة النونية للعدد المركب

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$$

الواجب المنزلي