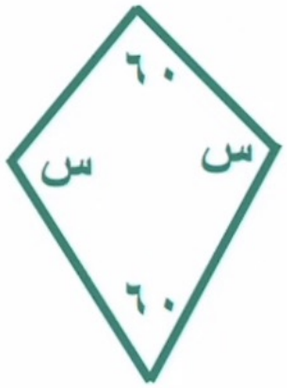
المحددات و قاعدة كرامر

قدرات

في الشكل التالي،
أوجد قيمة س؟



أ ٧٠

ب ٩٠

ج ١٢٠

د ١٧٠

فيما سبق:

درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًّا.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أحسب المحدِّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:

المحدِّدة
determinant

محدِّدة الدرجة الثانية
second-order determinant

محدِّدة الدرجة الثالثة
third-order determinant

قاعدة الأقطار
diagonal rule

مصفوفة المعاملات
coefficient matrix

قاعدة كرامر
Cramer's Rule

استعد

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، قام عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، تأكد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. وأنه من الممكن بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدِّدات لحساب مساحتها.

المحدِّدات: كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدِّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة هو: جميع عناصر المصفوفة التي تمتد من الزاوية اليسرى العلوية للزاوية اليمنى السفلى. أو جميع العناصر a_{ij} بحيث $i=j$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

محدِّدة الدرجة الثانية

التعبير اللفظي: يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرمـــوز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

مثال محدِّدة الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

تحقق من فهمك

(1A $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

(1B $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة 3 × 3 **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حساب محدِّدة المصفوفة 3 × 3

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة **3** من ناتج الخطوة **2** .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال حساب محدِّدة المصفوفة 3 × 3

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & -3 \\ 9 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

تحقق من فهمك

(2A

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

تحقق من فهمك

(2B

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

تستعمل المحدِّدات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

مفهوم أساسي

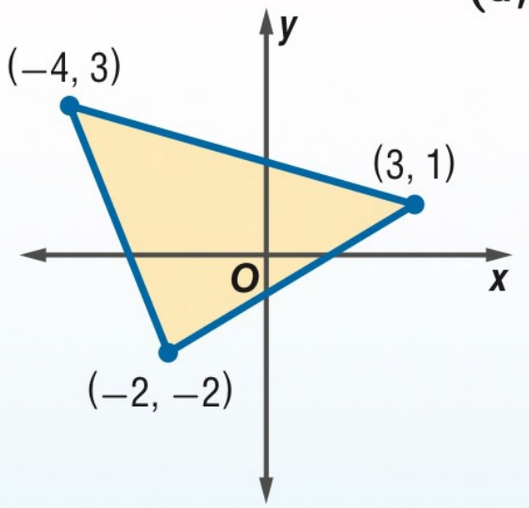
أضف إلى

مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

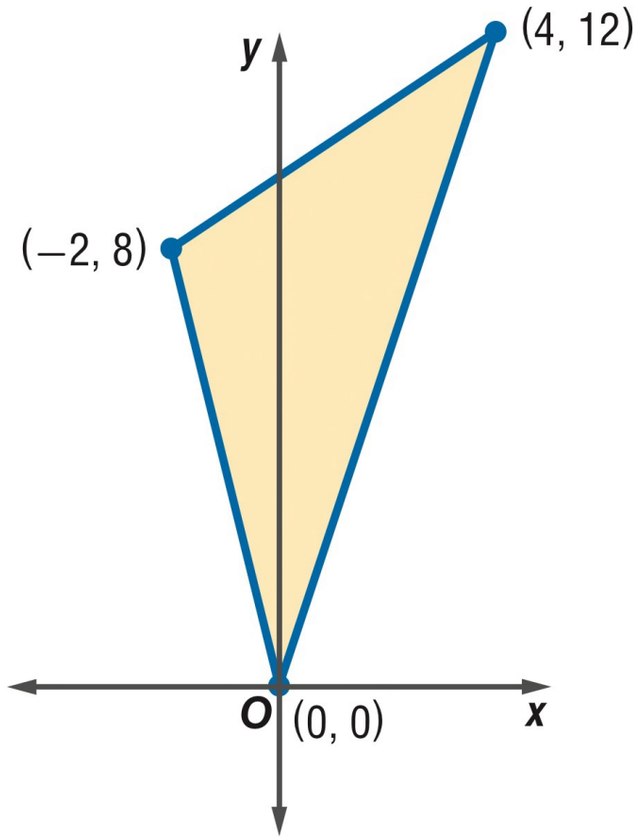
مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال حساب مساحة المثلث باستعمال المحدِّدات

عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحدِّدات لإيجاد مساحة الإقليم.



تحقق من فهمك

3) خرائط: يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: (11, 9) ,(6, 4) ,(3, 15)، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة 0.5km. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحدِّدات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحدِّدة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحدِّدة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

قاعدة كرامر

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مثال حل نظام من معادلتين

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $5x - 6y = 15$

$3x + 4y = -29$

تحقق من فهمك

(4A $7x + 3y = 37$

$-5x - 7y = -41$

تحقق من فهمك

(4B $8x - 5y = 70$

$9x + 7y = 3$

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell\ell z = p \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

حل نظام من ثلاث معادلات

مثال

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$4x + 5y - 6z = -14$$
$$3x - 2y + 7z = 47$$
$$7x - 6y - 8z = 15$$

تحقق من فهمك

(5A $3x + 5y + 2z = -7$

$-4x + 3y - 5z = -19$

$5x + 4y - 7z = -15$

تحقق من فهمك

(5B

$$6x + 5y + 2z = -1$$

$$-x + 3y + 7z = 12$$

$$5x - 7y - 3z = -52$$

تأكد

أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

تأكد

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

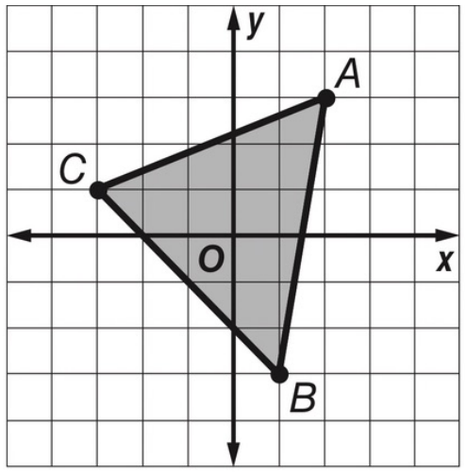
12) $4x - 5y = 39$

$3x + 8y = -6$

تدرب

35) إجابة قصيرة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2، بحيث تكون جميع عناصرها أعدادًا سالبةً ومحدِّدتها تساوي 20.

36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة

تحصيلي

ما قيمة x التي تجعل محدد المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ يساوي 42 ؟

(A) 3

(B) 1

(C) -4

(D) -9

تحصيلي

ما قيمة k التي تجعل المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} k & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؟

(A) 3

(B) 1

(C) -4

(D) -9

تحصيلي

قيمة المحددة $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ تساوي ..

Ⓐ 164

Ⓑ 42

Ⓒ 80

Ⓓ -164

تحصيلي

أوجد مساحه مثلث إحداثيات رؤوسه ..

$$A(0,0)\ ,\ B(-2,8)\ ,\ C(4,12)$$

(A) 56

(B) 28

(C) 20

(D) 14