النظير الضربي للمصفوفة

و أنظمة المعادلات الخطية

قدرات

إذا كان الثوب الواحد يحتاج إلى ٣,٨ متر من القماش و لدينا ٣٢ متر
فكم ثوبًا نستطيع عمله؟

- ٨
- ٩
- ١٠
- ١١

فيما سبق:

درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًّا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها .

المفردات :

مصفوفة الوحدة
identity matrix

النظير الضربي للمصفوفة
inverse matrix

المعادلة المصفوفية
matrix equation

مصفوفة الثوابت
constant matrix

مصفوفة المتغيرات
variable matrix

استعد

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 2 × 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3 × 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}$, $\underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

مثال التحقق من النظير الضربي

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

مثال التحقق من النظير الضربي

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

b) $\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

تحقق من فهمك

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موقعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب A^{-1} .

يمكنك استعمال المحددات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **هو** $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محددة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

مثال

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(a

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة 2×2.

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا نجده كما في الخطوات $4 - 2$.

2) بادل بين موضعي عنصري القطر الرئيس.

3) غيِّر إشارتي عنصري القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 2, 3 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

مثال

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

b) $\underline{Q} = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة 2×2.

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا نجده كما في الخطوات $4 - 2$.

2) بادل بين موضعي عنصري القطر الرئيس.

3) غيِّر إشارتي عنصري القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 2, 3 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.

تحقق من فهمك

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(2A $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2B $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

المعادلات المصفوفية : يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام المعادلتين الآتي:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 9 \\ 3x - 6y &= 3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وَيمكنك كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت
الثوابت في النظام فقط

مصفوفة المتغيرات
المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة المعاملات

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

ثم حل المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تحل بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

$ax = b$		$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	بضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد.	$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$
$1x = \frac{b}{a}$	$\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}$, $\left(\frac{1}{a}\right)a = 1$	$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$
$x = \frac{b}{a}$	$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{X}$, $1x = x$	$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

مثال

سفر: زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زود به سيارته من البنزين 104 لترات، بسعر إجمالي 49 ريالًا. فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟

تحقق من فهمك

3) كتب: أنفقت عائشة في معرض للكتب 112.5 ريالًا لشراء 3 كتب علمية و4 كتب ثقافية. على حين أنفقت فاطمة 157.5 ريالًا لشراء 3 كتب علمية و 10 كتب ثقافية. فإذا كانت الكتب العلمية تُباع بالسعر نفسه x. والكتب الثقافية تُباع بالسعر نفسه y. فما سعر الكتاب العلمي؟

تأكد

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

تأكد

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

3) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

تأكد

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

6) $-2x + y = 9$

$x + y = 3$

تدرب

27) اكتشف الخطأ: أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

تحصيلي

إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؛ فما قيمة x ؟

(A) $\frac{-4}{5}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) 2

(D) 3

تحصيلي

ما النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؟

Ⓐ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ⓑ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ⓒ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ⓓ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$