الدوال

تمهيد

مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد:

1) $x > -3$ **2)** $x \leq -2$

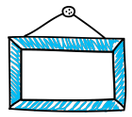
حل كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

7) $y - 3x = 2$ **8)** $y + 4x = -5$

تمهيد

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

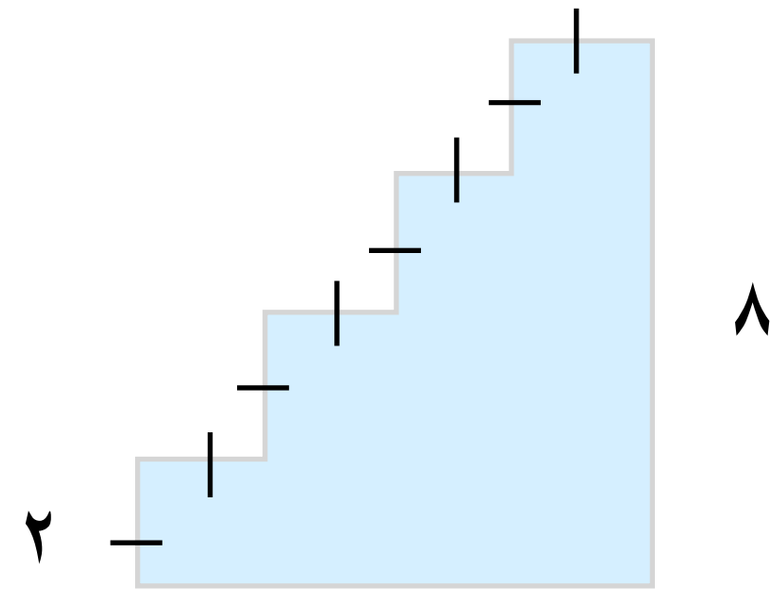
14) $3y - 4, y = 2$ **15)** $2b + 7, b = -3$



قدرات

اوجد محيط الشكل ؟

٣٠ ٣٢ ٣٦ ٣٨



فيما سبق:

درستُ مجموعات الأعداد ورموزها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات:

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

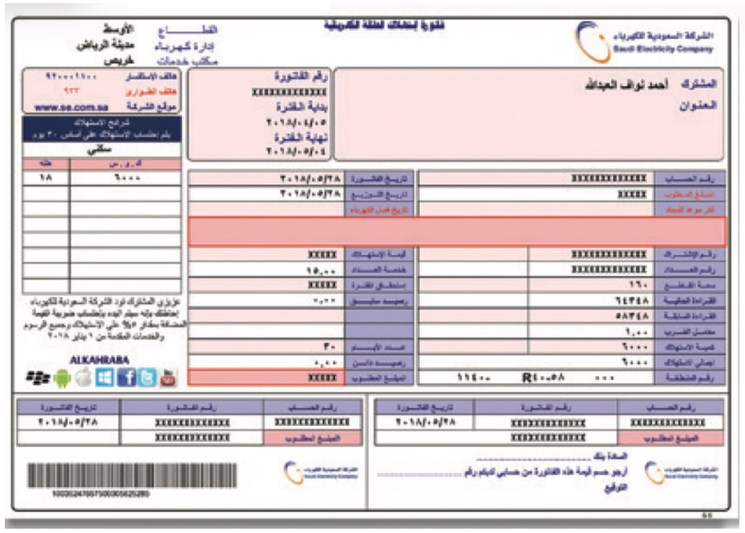
المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function

لماذا

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

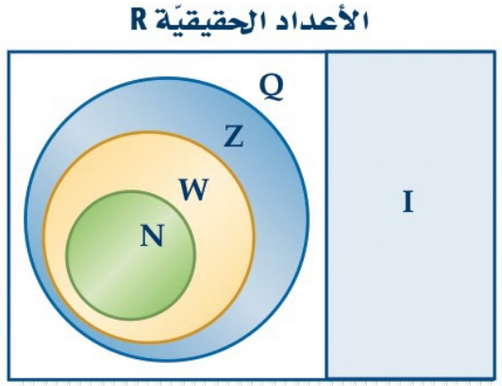


وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية : تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي

الأعداد الحقيقية

الرمز	المجموعة	أمثلة
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3\ldots$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4\ldots$



يمكنك وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في .

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

- الأعداد x حيث...
- x لها هذه الخصائص...
- x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

استعمال الصفة المميزة

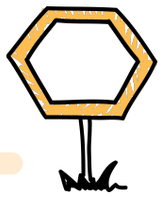
مثال

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, \ldots\}$

b) $x < 7$

c) $-2 < x < 7$



تحقق من فهمك

(1A $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots.\}$

(1B $x \leq -3$

(1C $-1 \leq x \leq 5$

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

قراءة الرياضيات

غير محدودة:

تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقُّف).

استعمال رمز الفترة

مثال اكتب كلًا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

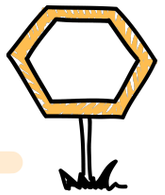
a) $-8 < x \leq 16$

b) $x < 11$

c) $x \leq -16$ أو $x > 5$

إرشادات للدراسة

الرمزان ∪ ، ∩:
يُقرأ الرمز "∪" (اتحاد)، ويعني: جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين.
يُقرأ الرمز "∩" (تقاطع)، ويعني: جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.



تحقق من فهمك

(2A $-4 \leq y < -1$

(2B $a \geq -3$

(2C $x < -2$ أو $x > 9$

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة بين مجموعتين من الأعداد الحقيقية هي:

1) **لفظيًّا:** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.
مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًّا:** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).
مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًّا:** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.

4) **جبريًّا:** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي

الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

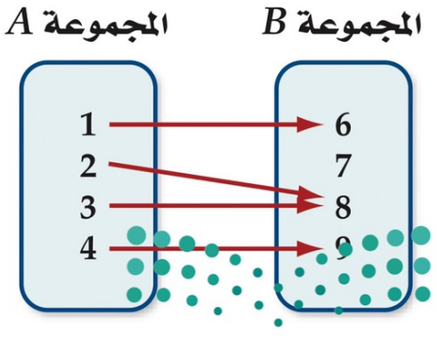
مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثَّلة في المخطط المجاور تمثِّل دالةً.

حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.

وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.

المدى $= \{6, 8, 9\}$.



وزارة التعليم

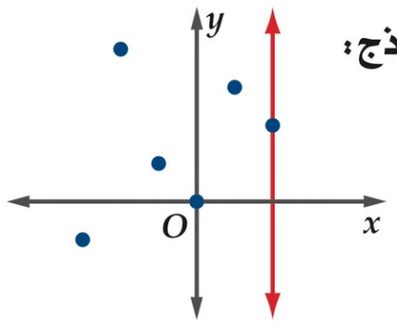
كما يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسيًّا لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي

اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



إرشادات للدراسة

جدوليًّا:

إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن إحدى قيم x ترتبط بأكثر من قيمة من قيم y ، كما يوضح الجدول أدناه:

x	y
−2	−4
3	−1
3	4
5	6
7	9

تحديد العلاقات التي تمثّل دوال

مثال في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

a) تمثل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y:
لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لـ y بأكثر من قيمة لـ x كما في المثال 3b.

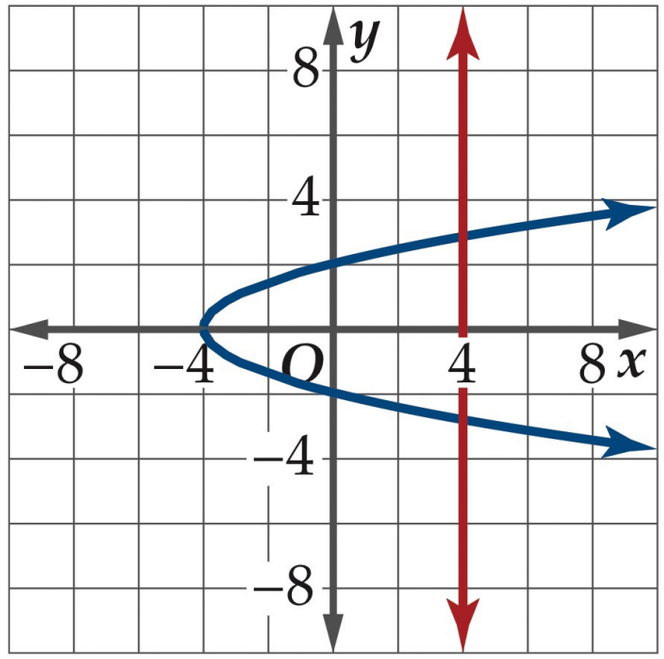
(b

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

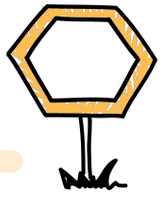
مثال

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

(c



(d $y^2 - 2x = 5$

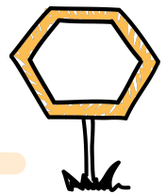


تحقق من فهمك

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

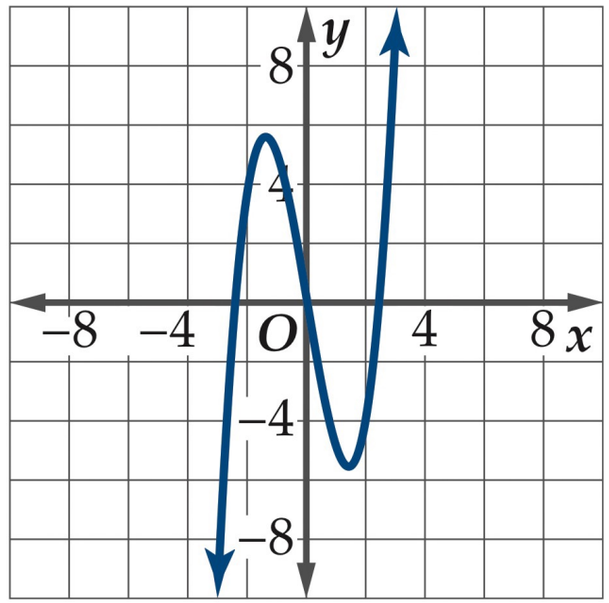
(3B

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22



تحقق من فهمك

$3y + 6x = 18$ **(3D**



(3C

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة**، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x ، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

المعادلة	الدالة المرتبطة بالمعادلة
$y = -6x$	$f(x) = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًّا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

إيجاد قيم الدالة

مثال

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(6)$

b) $f(-4x)$

c) $f(5c + 4)$

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

(4A $f(12)$

(4B $f(6x)$

(4C $f(-3a + 8)$

إرشادات للدراسة

مجال الدالة:

يمكنك كتابة مجال الدالة في المثال 5a بالطريقة المختصرة بالشكل:

$D = R - \{0, 7\}$

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًّا.

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال:

يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلًا،

$f(x) = \sqrt{x - 5}$

و $g(t) = \sqrt{t - 5}$

يعبران عن الدالة نفسها.

تحديد مجال الدالة جبريًّا

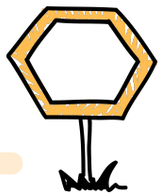
مثال

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

(a $f(x) = \frac{2+x}{x^2-7x}$

(b $g(t) = \sqrt{t-5}$

(c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$



تحقق من فهمك

(5A $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$

(5B $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

(5C $g(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوال المتعددة التعريف**.

مثال

إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

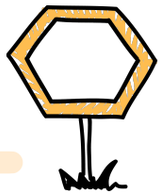
طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 \ , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 \ , & 66 \leq x \leq 68 \\ 2x - 66 \ , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلَ من الحالتين الآتيتين:

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.



تحقق من فهمك

6) سرعة: إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t)=\begin{cases} 4t & , \quad 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \quad 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

(6A $v(5)$

(6B $v(15)$

(6C $v(245)$

تدرب

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: **(المثالان 1, 2)**

1) $x > 50$

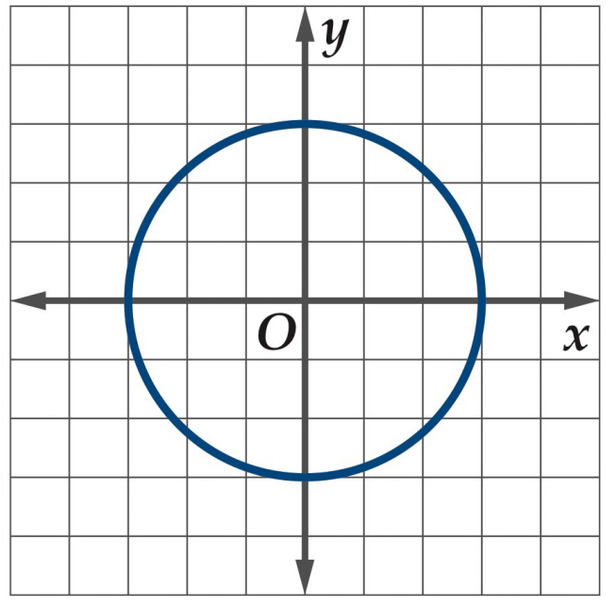
4) $\{-3, -2, -1, \ldots\}$

تدرب

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالةً في x أم لا:

13) $\frac{1}{x} = y$

17)



تدرب

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

a) $g(9)$

b) $g(3x)$

c) $g(1 + 5m)$

تدرب

حدّد مجال كل دالة مما يأتي:

26) $f(x) = \dfrac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$

تدرب

أوجد $f(-5)$ وَ $f(12)$

(33

$$f(x)=\begin{cases} -4x+3 & , \quad x<3 \\ -x^3 & , \quad 3\le x\le 8 \\ 3x^2+1 & , \quad x>8 \end{cases}$$

تحصيلي

إذا كانت $f(x) = 2x - 4$ فإن قيمة $f(8)$ تساوي ..

(A) 8

(B) 12

(C) 14

(D) 16

تحصيلي

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 4x & , \quad 0 \le x \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < x < 24 \\ -6x + 15 & , \quad 24 \le x \le 40 \end{cases}$ فإن $f(5)$ ..

(A) 60

(B) 20

(C) -15

(D) -35