الدوال الأسية

تهيئة

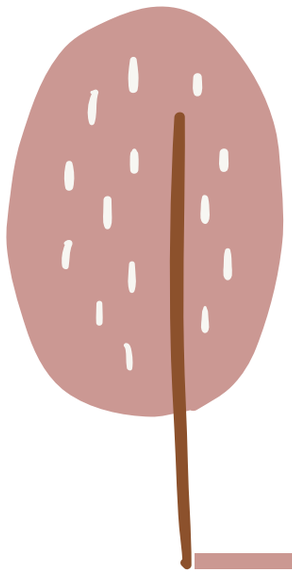
بسّط كل عبارة مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $a^4a^3a^5$

2) $(2xy^3z^2)^3$

3) $\dfrac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$

4) $\left(\dfrac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

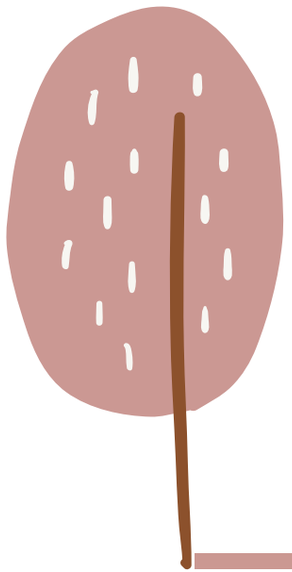


تهيئة

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

6) $f(x) = 2x + 5$

7) $f(x) = x - 3$

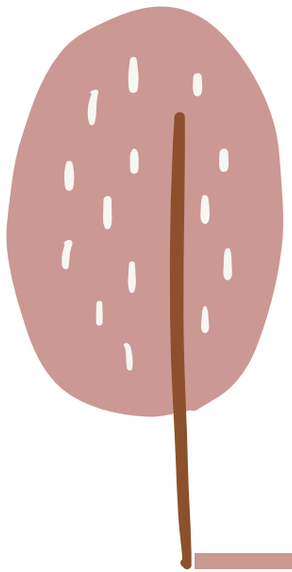


تهيئة

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

12) $f(x) = x - 6$
$g(x) = x + 6$

13) $f(x) = 2x + 5$
$g(x) = 2x - 5$



قدرات

عمر احمر ثلاثة اضعاف عمر ابنه اذا علمت ان عمر ابنه سيكون ٣٥ سنه بعد عشرين سنة من الآن
فكم عمر أحمر الآن ؟

٢٥ ٤٥ ٥٥ ٧٠

فيما سبق:

درستُ دوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانيًّا. (الدرس 1–1)

والآن:

- أتعرف الدالة الأسية.
- أمثّل الدالة الأسية.
- أمثّل دوال النمو الأسي بيانيًّا.
- أمثّل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا.

المفردات:

الدالة الأسية

exponential function

النمو الأسّي

exponential growth

عامل النمو

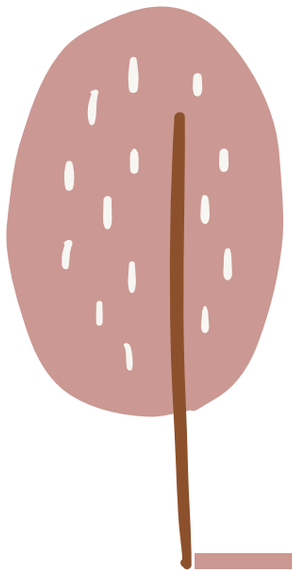
growth factor

الاضمحلال الأسّي

exponential decay

عامل الاضمحلال

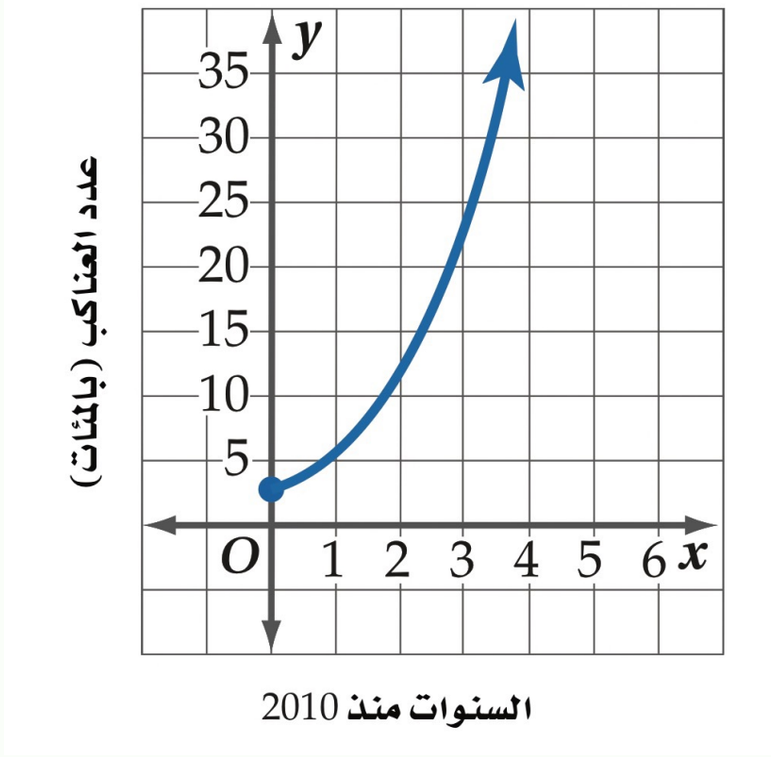
decay factor



لماذا

قد تبدو عناكب الرتيلاء (*Tarantulas*) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيِّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.

لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًّا، وليس تربيعيًّا أيضًا، وإنما يمثِّل الدالة $y = 3(2)^x$، والتي هي مثال على الدالة الأسية.



تمثيل الدوال الأسّيّة : **الدالة الأسّية** هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

مفهوم أساسي

الدالة الأسية

التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة $y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

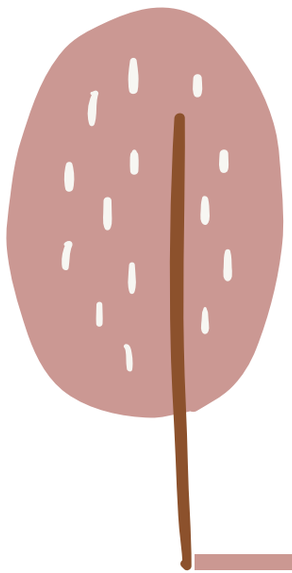
أمثلة: $y = (\frac{1}{2})^x$ $y = 4^x$ $y = 2(3)^x$

إرشادات للدراسة

الدالة $y = ab^x$:

تكون الدالة الأسية $y = ab^x$ معرفة لجميع قيم x التي تحقق الشرط:
$a \neq 0, b > 0, b \neq 1$
وذلك لأنه:

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^x$ تكون غير معرفة عند بعض القيم، فمثلاً تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة.

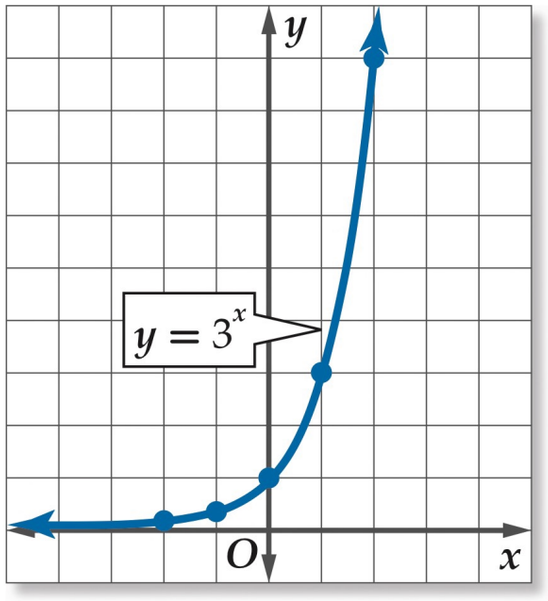


تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $b > 1$

مثال

a) مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدد مجال الدالة ومداها.

x	3^x	y

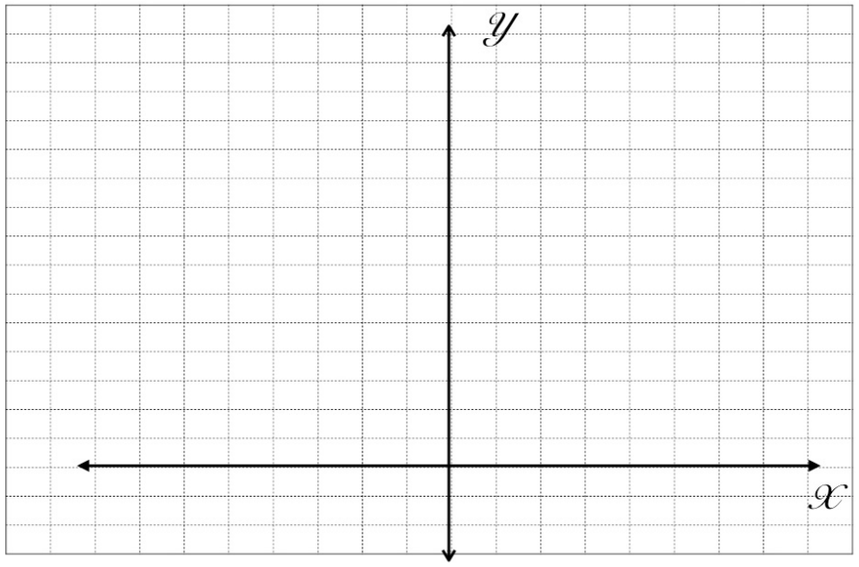


b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

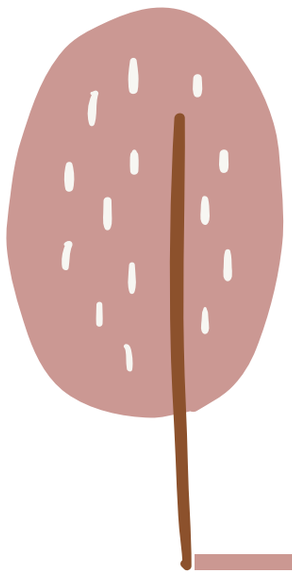
تحقق من فهمك

1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

x	$y=7^x$	y



1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.



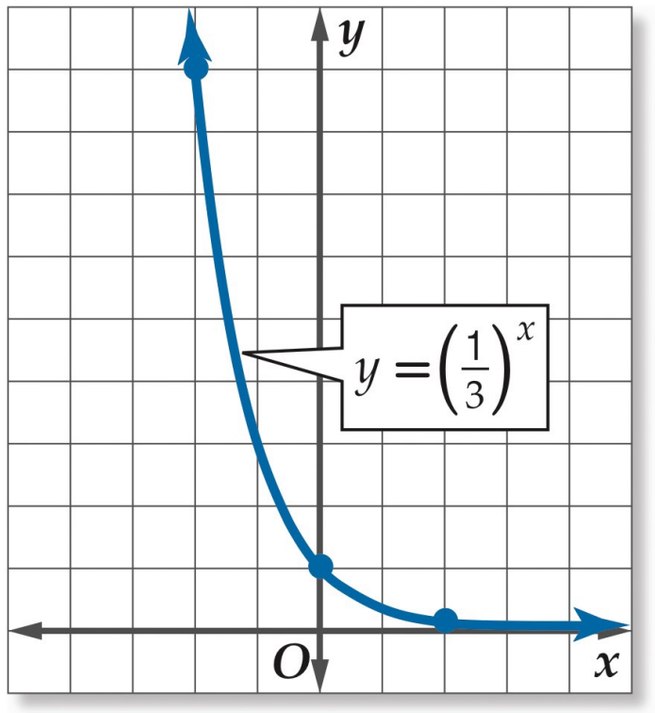
يتضح من المثال (1) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 1)، فإن قيم y تزداد أيضًا بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل 3 أمثال القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متزايدة، كما أن المحور x هو خط تقارب أفقي لها.

تمثيل الدالة الأسيّة عندما $0 < b < 1 ، a > 0$

مثال

a) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{3})^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

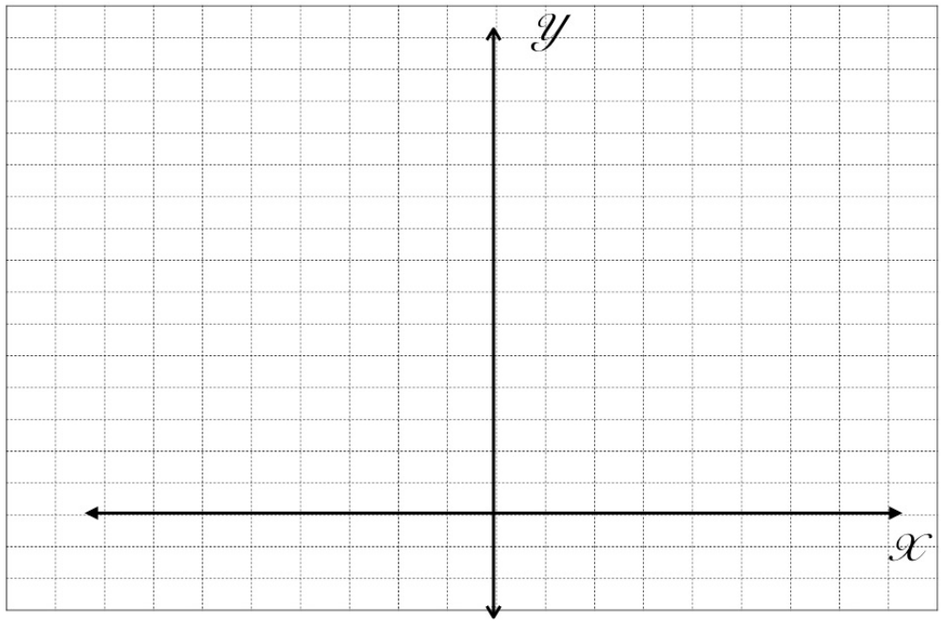
x	$(\frac{1}{3})^x$	y



b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{3})^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

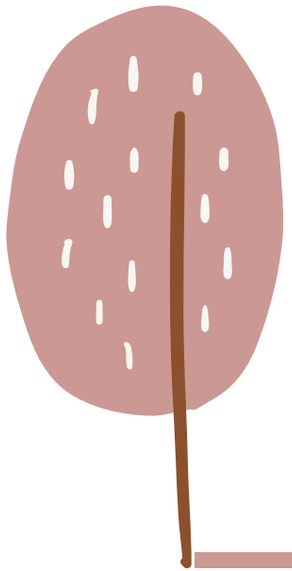
تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{2})^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.



x	$y=(\frac{1}{2})^x$	y

2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{2})^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.



يتضح من المثال (2) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت قيمته 2، فإن قيم y تتناقص بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثِّل $\frac{1}{9}$ القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متناقصة، كما أن المحور x هو خط تقاربٍ أفقي لها.

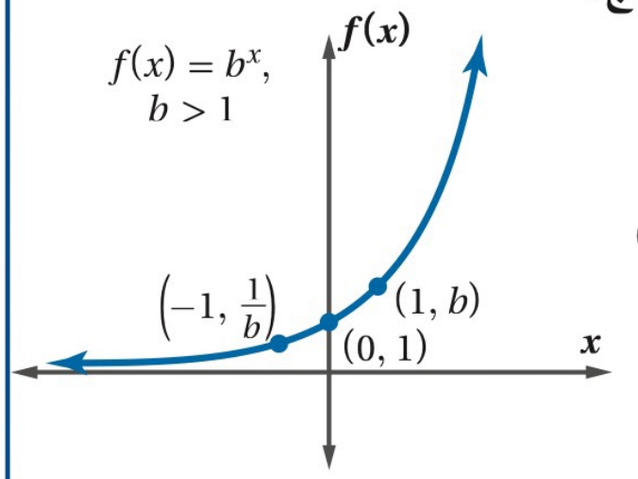
النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, b > 1$

النموذج:



خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R})$

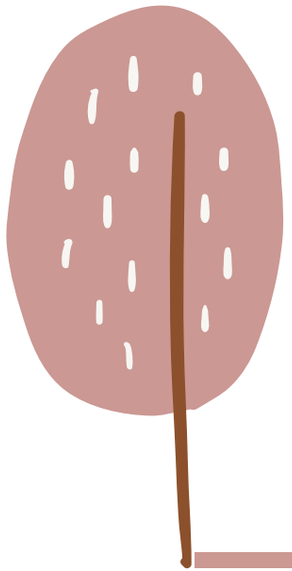
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(\mathbb{R}^+)$

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x. ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a(1 + r)^t$ ، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(r + 1)$ ويُسمى **عامل النمو**.

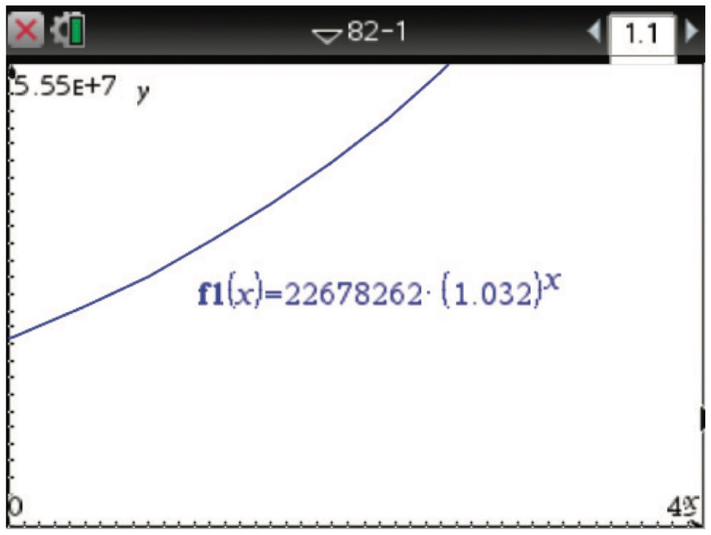
وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.



مثال

تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431 - 1425 3.2% تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثِّل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

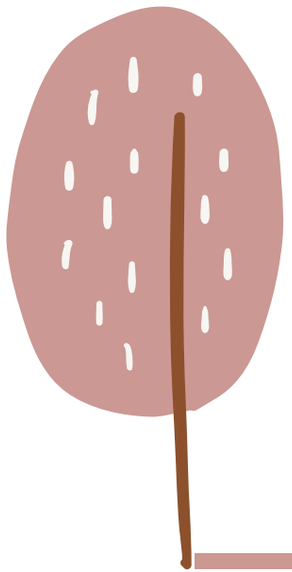


a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

b) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

3) ثقافة مالية: يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنويًّا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430 هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثِّل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$ دالة **الاضمحلال الأسّي**.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, 0 < b < 1$

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

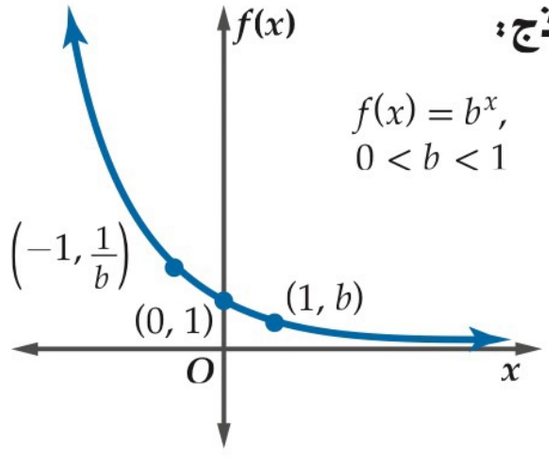
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

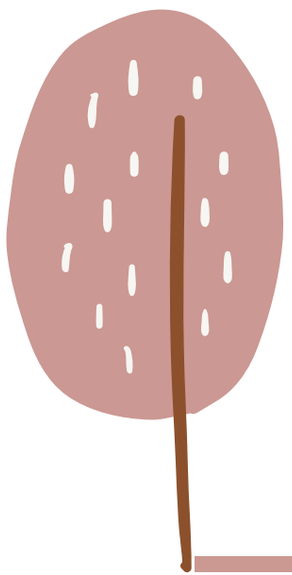
النموذج:



يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1 - r)^t$، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

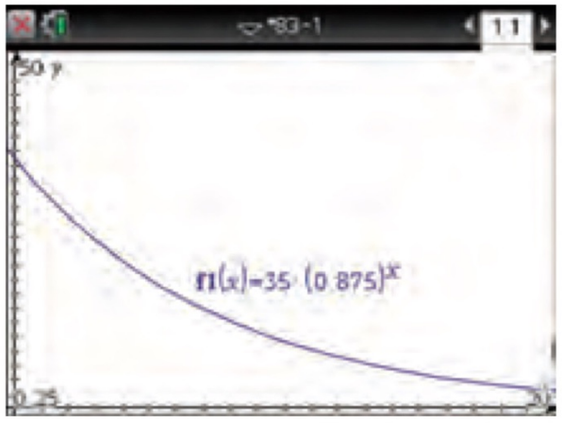
وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.



مثال

تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريبًا من كمية الكافايين من أجسامهم في الساعة.

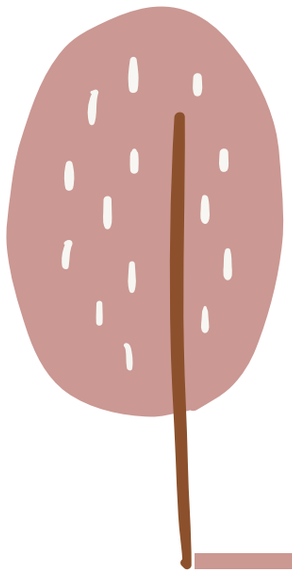


a) أوجد دالة أسّية تمثِّل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على 68mg من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثِّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثِّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدِّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.



التحويلات الهندسية : تؤثِّر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من دالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي كما هو الحال في باقي الدوال.

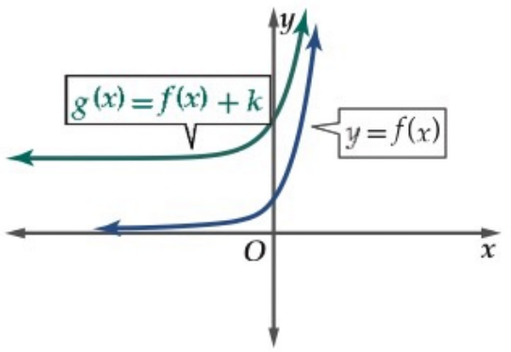
مفهوم أساسي

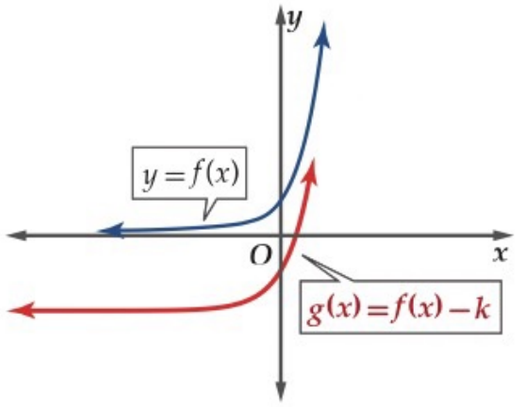
الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

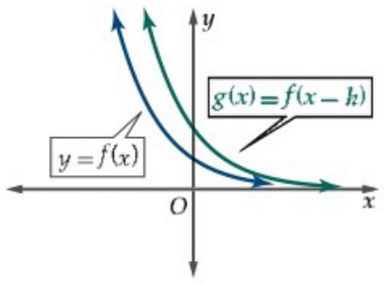


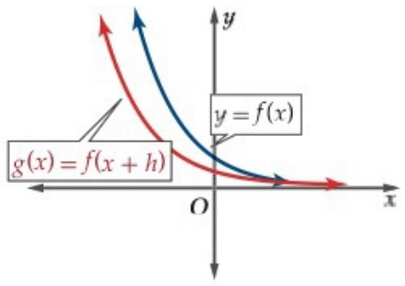


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.

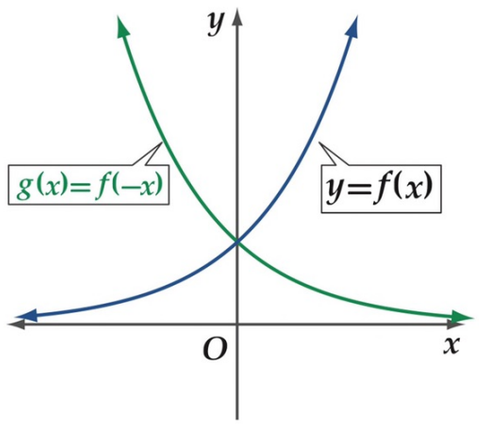




مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .

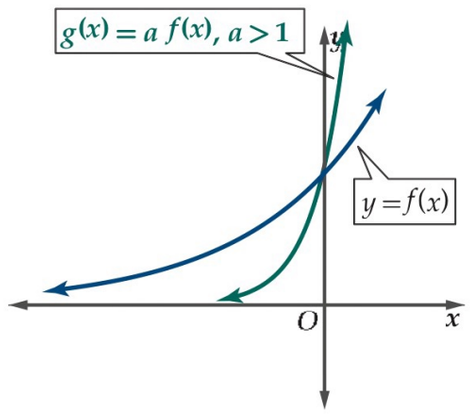


مفهوم أساسي

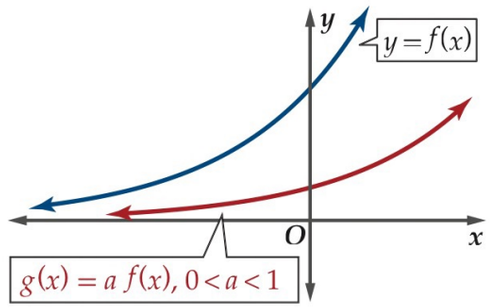
التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.



تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

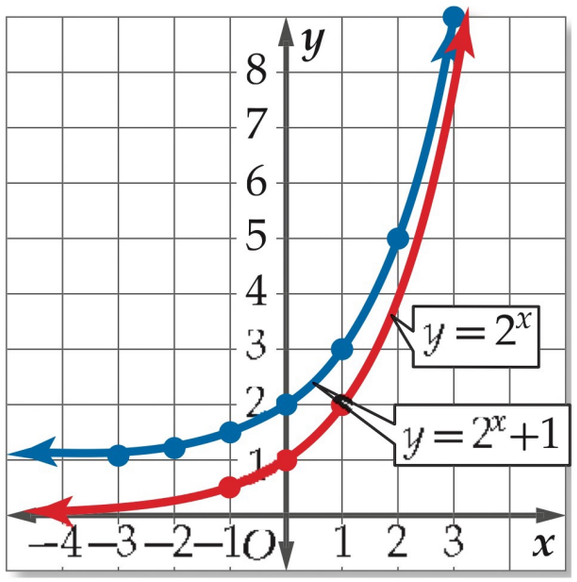


تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثال

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها:

a $y = 2^x + 1$

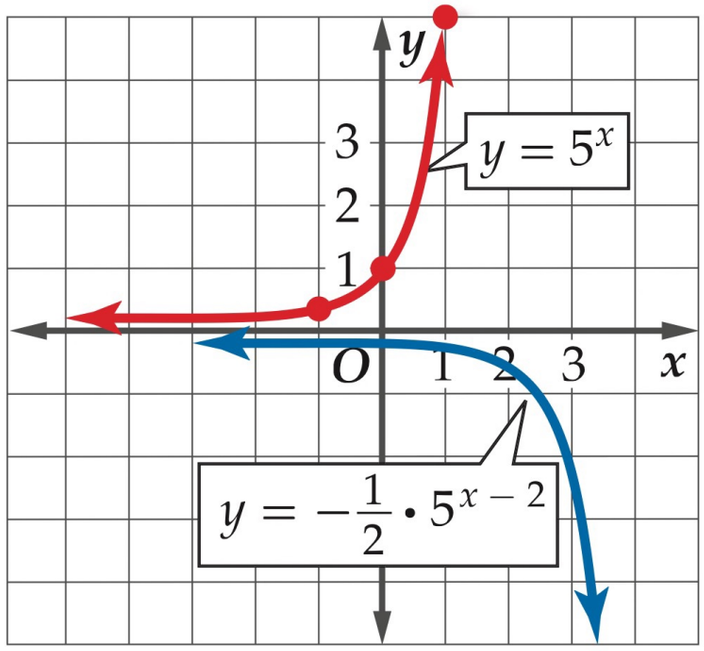


x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3} + 1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} + 1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} + 1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^0 + 1$	2
1	$2^1 + 1$	3
2	$2^2 + 1$	5

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

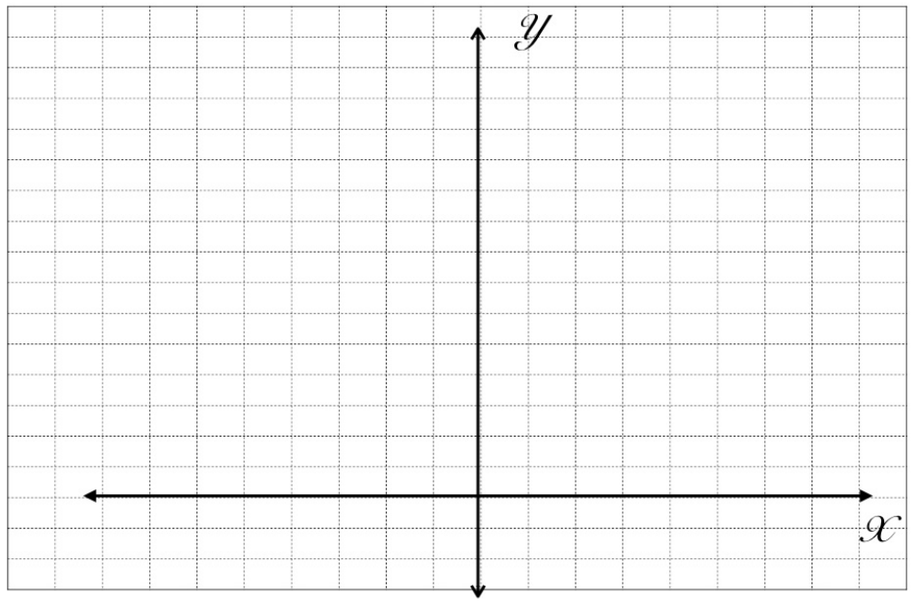
مثال

$y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$ (b



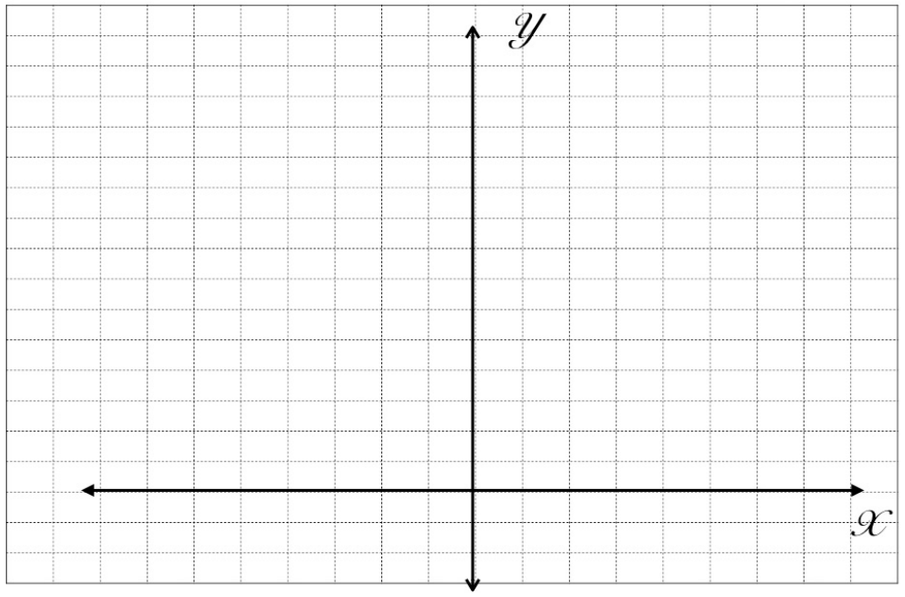
تحقق من فهمك

$y = 2^{x+3} - 5$ (**5A**



تحقق من فهمك

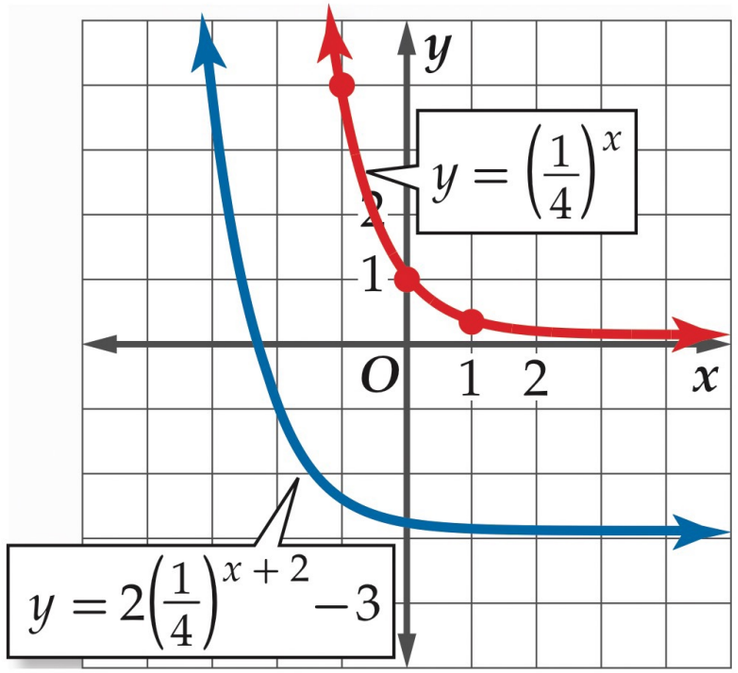
$y = 0.1(6)^x - 3$ (**5B**



مثال

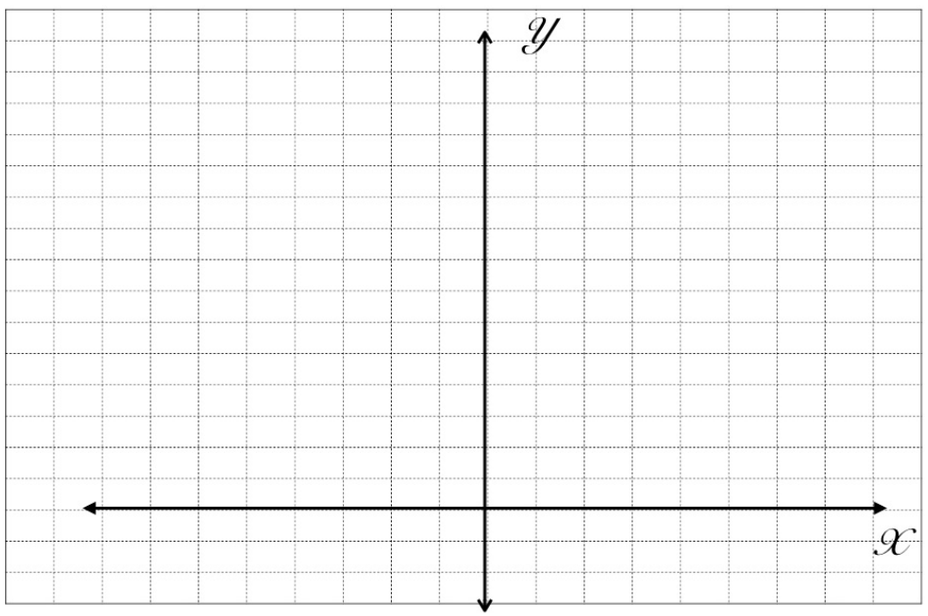
تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.



تحقق من فهمك

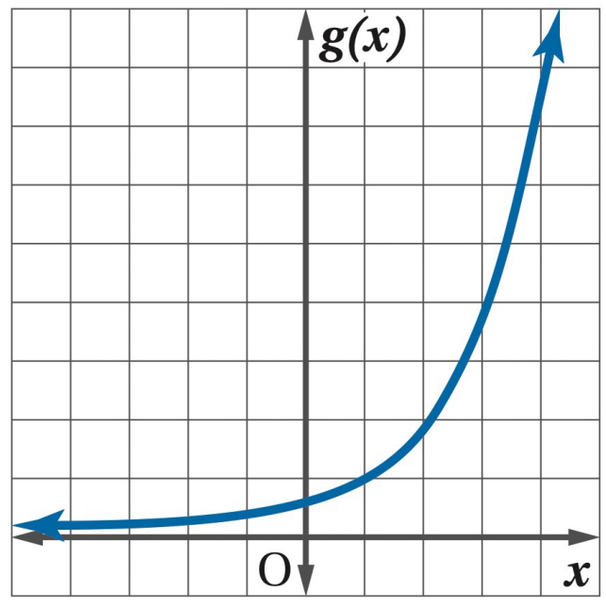
6 $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$



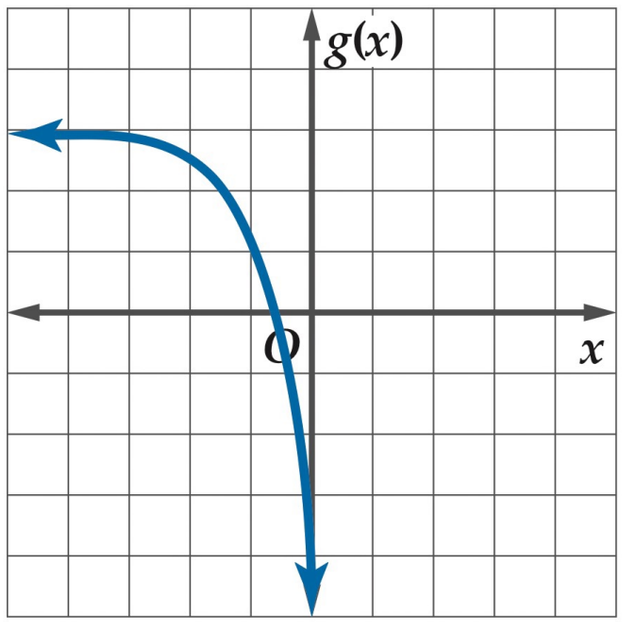
تدرب

إذا كانت $f(x)$ هي الدالة الرئيسة (الأم) لكل دالة ممثلة بيانيًّا أدناه، والتمثيل البياني لـ $g(x)$ هو تحويل للتمثيل البياني لـ $f(x)$ ، فأوجد الدالة $g(x)$:

24)



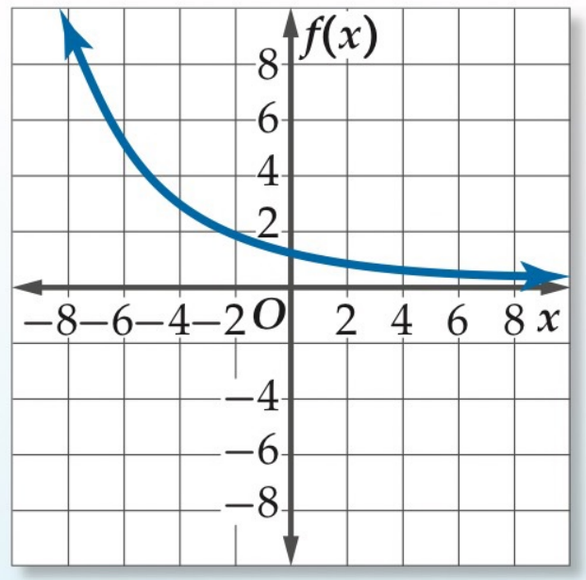
25)



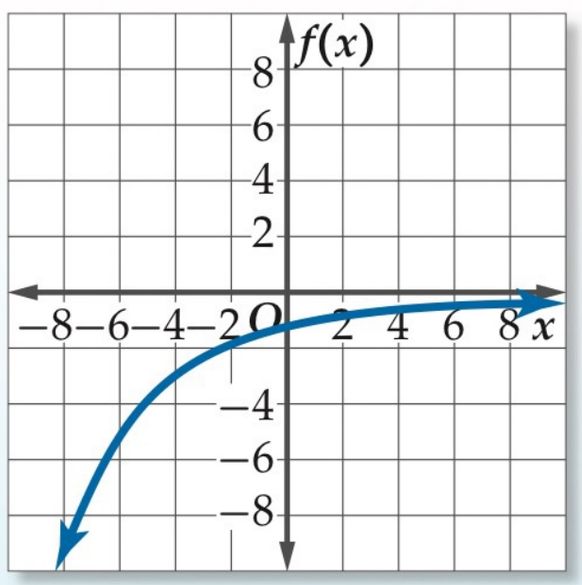
تدرب

30) اكتشف الخطأ: طُلب إلى عمر وماجد أن يمثّلا الدالة $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$ بيانيًّا. أي منهما تمثيله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

عمر



ماجد



40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$؟

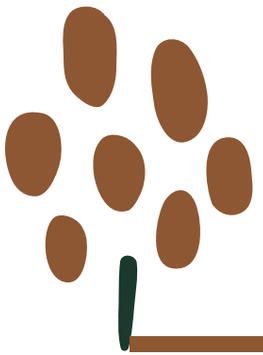
A 3 **C** 1

B 2 **D** 0

41) إذا كانت $g(x) = 4x$, $f(x) = \sqrt{x + 1}$ فما قيمة $(fog)\ (2)$؟

A $\sqrt{3}$ **C** 3

B $4\sqrt{3}$ **D** 8



تحصيلي

منحنى الدالة الأسية $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ يقطع محور y في النقطة ..

Ⓐ $(0,0)$

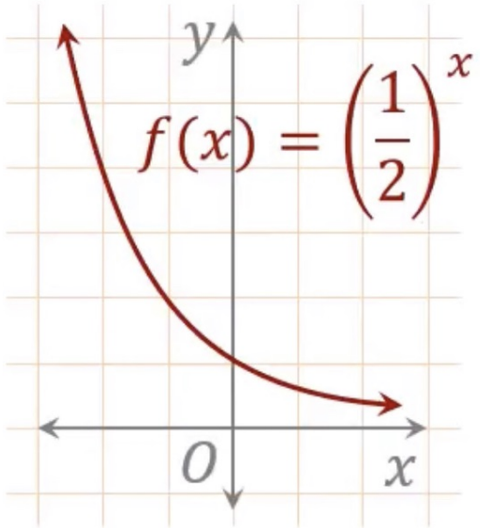
Ⓑ $(0,1)$

Ⓒ $(1,0)$

Ⓓ $(1,1)$

تحصيلي

مدى الدالة $f(x)$ المبينة بالشكل المجاور يساوي ..



(A) R

(B) R^+

(C) Z

(D) W

تحصيلي

إذا كانت $3^{x+7} = 9^{x+2}$ فما قيمة x ؟

A 2

B 3

C 4

D 5