كثيرات الحدود و دوالها

تهيئة

آعد كتابة كل من العبارات الآتية في صورة جمع:

1) $-5 - 13$ 2) $5 - 3y$

. . . . . .

تهيئة

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس: (يستعمل مع الدرس 4-3)

6) $-4(a + 5)$

7) $-1(3b^2 + 2b - 1)$

تهيئة

حل كل معادلة فيما يأتي :

11) $x^2 + 2x - 8 = 0$

12) $x^2 - 5x + 6 = 0$

13) $x^2 - x - 20 = 0$

14) $x^2 - x = 0$

الأعداد المركبة

قدرات

مستطيل طوله ١٠ سم وعرضه ٤سم ، ومحيط المستطيل = محيط المربع ، أوجد الفرق بين مساحة المربع ومساحة المستطيل؟

- ١١
- ١٠
- ٩
- ٨

فيما سبق :

درستُ تبسيط الجذور التربيعية.
(مهارة سابقة)

والآن :

- أُجري العمليات على الأعداد التخيُّلية البحتة.
- أُجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات

الوحدة التخيُّلية
imaginary unit

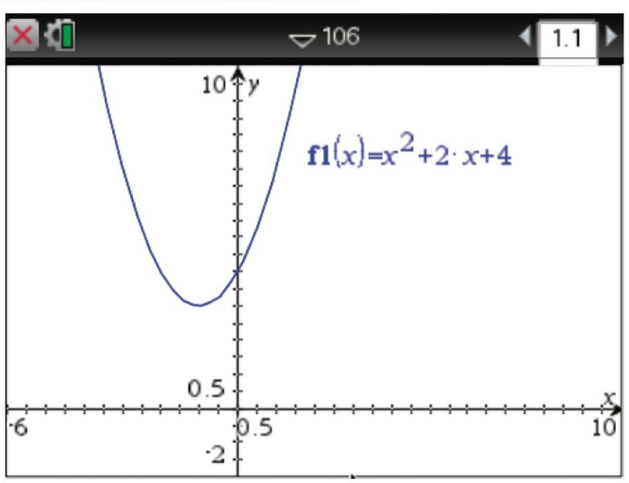
العدد التخيُّلي البحت
pure imaginary number

العدد المركب
complex number

المركبان المترافقان
complex conjugates

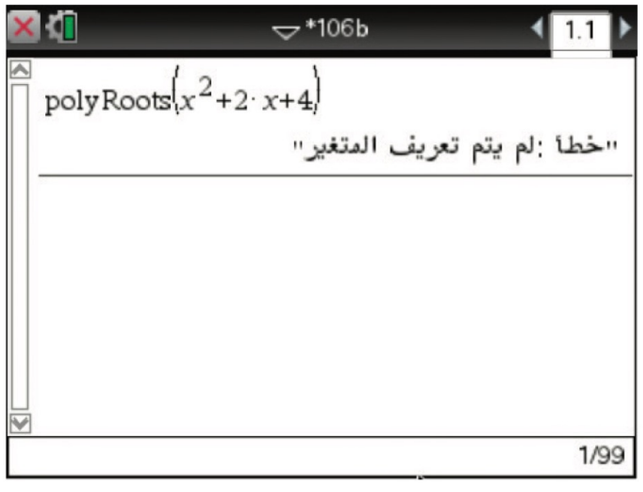
بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لايقطع المحور x، لذا ليس للمعادلة جذور حقيقية، فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟

للتأكد من ذلك استعمل الآلة الحاسبة بالضغط على مفتاح (on)، ومنها اختر 1: مستند جديد ثم اختر 1: إضافة تطبيق الحاسبة ثم اضغط (menu) واختر منها 3: العمليات الجبرية 3: أدوات كثيرات الحدود 2: الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود



[−6, 10] scl: 0.5 by [−2, 10] scl: 0.5

ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط (enter) (enter) فيظهر على الشاشة كلمة **خطأ**، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيُّلية.



الأعداد التخيلية البحتة: قادت المعادلات "كالمعادلة السابقة" الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، ووحدتها التخيلية i ، حيث تعرف **الوحدة التخيُّلية** i على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن $i = \sqrt{-1}$ ، وهذا يعني أن $i^2 = -1$

والأعداد في الصورة $i\sqrt{3}$, $-2i$, $6i$، تسمى **أعدادًا تخيُّلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن: $bi = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-b^2}$.

الجذور التربيعية للأعداد السالبة

مثال

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

a) $\sqrt{-27}$

b) $= \sqrt{-216}$

. . . . . .

تحقق من فهمك

(1A $\sqrt{-18}$

(1B $\sqrt{-125}$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلًّا من الخاصيتين التجميعية والتبديلية على الضرب، ويبين الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$	$i^6 = (i^2)^2 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = (i^2)^2 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

ضرب الأعداد التخيلية البحتة

مثال

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $-5i \cdot 3i$

b) $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

. . . . . .

تحقق من فهمك

(2A $3i \cdot 4i$

(2B $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$

(2C i^{31}

مثال

معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة : $4x^2 + 256 = 0$.

تحقق من فهمك

(3A $4x^2 + 100 = 0$

(3B $x^2 + 4 = 0$

العمليات على الأعداد المركبة : تتكون العبارة $3i + 2$، حيث 2 عدد حقيقي، و$3i$ عدد تخيلي بحت، من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما. ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.

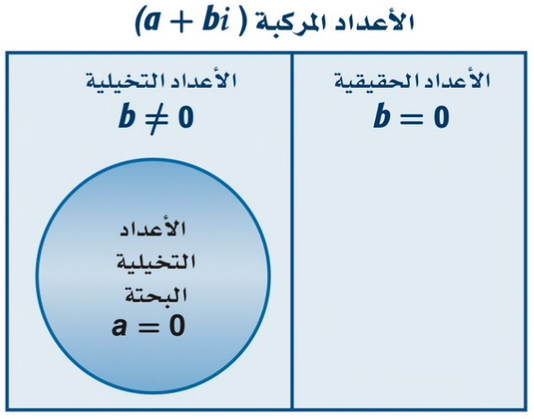
مفهوم أساسي — **الأعداد المركبة (C)**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a وَ b عددان حقيقيان، وi الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، وb الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2i$ $\qquad$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

يوضِّح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًّا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

مثال

تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتَي y، x الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

. . . . . .

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمتي y ،x الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x+1+(3+2y)i = 2x-2+(y-6)i$ صحيحة.

ويمكنك استعمال كلٍّ من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمِّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمِّع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال

جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

b) $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

تحقق من فهمك

(5A $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$

(5B $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد يمكن تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

مثال

ضرب الأعداد المركبة

كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب بالصيغة $V = C \bullet I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $4i + 2$ أمبير، ومعاوقتها $3i - 9$ أوم .

تحقق من فهمك

6) كهرباء: أوجد فرق الجهد لتيار متناوب شدته $4i - 2$ أمبير، ومعاوقته $2i - 3$ أوم.

يسمى العددان المركبان $a - bi$, $a + bi$ **مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا على الصورة $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

قسمة الأعداد المركبة

مثال

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

(a $\frac{2i}{3+6i}$

(b $\frac{4+i}{5i}$

. . . . . .

تحقق من فهمك

(7A $\frac{-2i}{3+5i}$

(7B $\frac{2+i}{1-i}$

تأكد

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

1) $\sqrt{-81}$

2) $\sqrt{-32}$

3) $(4i)(-3i)$

4) $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

تأكد

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

5) i^{40}

6) i^{63}

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي :

7) $4x^2 + 32 = 0$

تأكد

أوجد قيمتَي a , b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

9) $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

. . . . . .

تأكد

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

11) $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

13) $(6 - 8i)(9 + 2i)$

تأکد

(15 $\frac{3-i}{4+2i}$

. . . . . .

تدرب

56) اكتشف الخطأ: قامت كلٌّ من صفاء ومنال بتبسيط $(4i)(3i)(2i)$، فأيٌّ منهما على صواب؟ وضِّح إجابتك.

صفاء	منال
$24i^3 = -24i$	$24i^3 = -24$

تدرب

61) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5 + 4i) - (x+yi) = (-1-3i)$ صحيحة؟

A) $x = 6, y = 7$

B) $x = 4, y = i$

C) $x = 4, y = i$

D) $x = 4, y = 7$

62) قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي:

A) $36 - 27i$

B) $9 + 36$

C) $9 - 36$

D) $-27 + 36i$

قيمة i^{12} تساوي ..

(A) -1

(B) 1

(C) i

(D) $2i + 10$

قيمة $i^{17} + i^{16} + i^{15} + i^{14}$ تساوي ..

(A) 0

(B) 1

(C) $2i$

(D) $2i + 1$