1-7

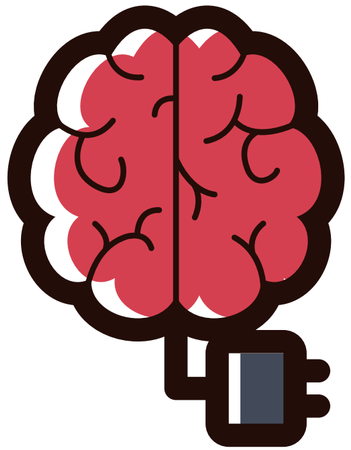
العلاقات والدوال العكسية

أ. غادة الفضلي

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

قدرات

إذا كانت س ص = ١٢ ، س − ص = ١ فإن س^{٢} + ص^{٢} =



أ) ١٦

ب) ٢٠

ج) ٢٥

د) ٣٦

المفردات

- العلاقة العكسية
- الدالة العكسية
- الدالة المتباينة .

المحاور الرئيسية للدرس :

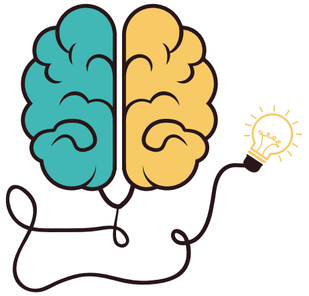
تحديد الدوال العكسية بإستعمال اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة

إيجاد الدالة العكسية جبرياً و بيانياً

تركيب الدالة و دالتها العكسية

فيما سبق

درست
إيجاد
تركيب
دالتين



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

العصف الذهني

لماذا ؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

ما الدالة التي تعطي مساحة المربع؟

إذا كان طول ضلع مربع 5 وحدات، فأوجد مساحته؟

أكتب دالة لحساب طول ضلع المربع إذا علمت مساحته. ثم أوجد طول ضلع مربع مساحته 100.

أكتب دالة لحساب المسافة إذا كانت السرعة ثابتة، والزمن متغيرا، ثم أكتب دالة لإيجاد الزمن إذا كانت المسافة متغيرة، والسرعة ثابتة

الدوال العكسية

من خلال فقرة لماذا

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

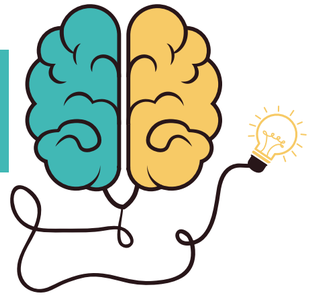
العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B

وتكون العلاقة عكسية للاخرى إذا تحقق الشرط التالي :

إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين ، فإن الزوج المرتب (a, b) ينتمي للعلاقة الأخرى .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال العكسية



تذكر أن:

متغير مستقل X

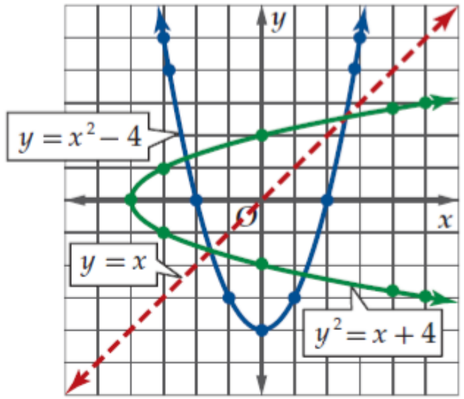
متغير تابع y

وإذا مثّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد **علاقتها العكسية** بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع،

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$y^2 = x + 4$ أو $x = y^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم y = x

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال العكسية

قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية :
يجب ألّا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

يرمز للدالة العكسية

الدالة العكسية لِـ f، ويرمز لها بالرمز f^{-1}.

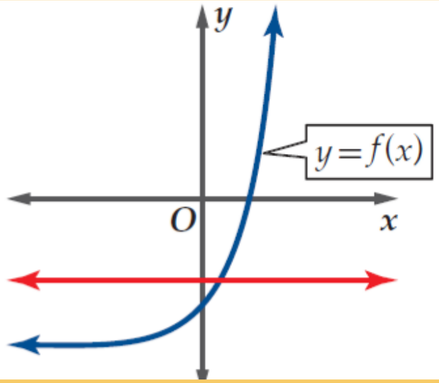
المحتوى الرياضي

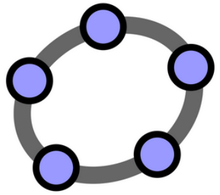
اختبار الخط الأفقي التمثيل البياني للدالة العكسية هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأصلية في المستقيم $y = x$. وبما أن اختبار الخط الرأسي يختبر إن كانت العلاقة دالة أم لا، فيمكن إيجاد صورة الخط الرأسي بالانعكاس في المستقيم $y = x$. وصورة ناتج هذا الانعكاس هو خط أفقي يمكن استعماله في اختبار إن كان للدالة معكوس.

تحديد الدالة العكسية :

اختبار الخط الأفقي

عند رسم خط مستقيم أفقي يقطع الدالة في نقطة واحدة فقط ← فإنه يوجد دالة عكسية





تطبيق اختبار الخط الرأفقي

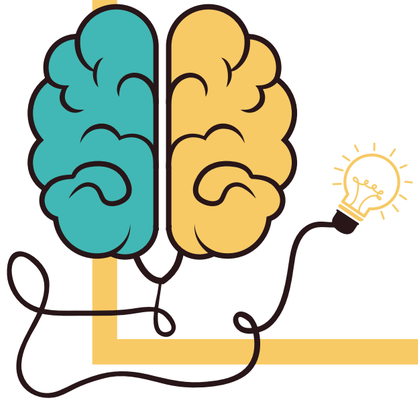
مثال 1

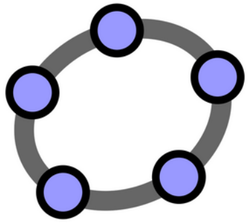
تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$ ✓

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$ ✓





تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثال 1

تدرب وحل المسائل

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$

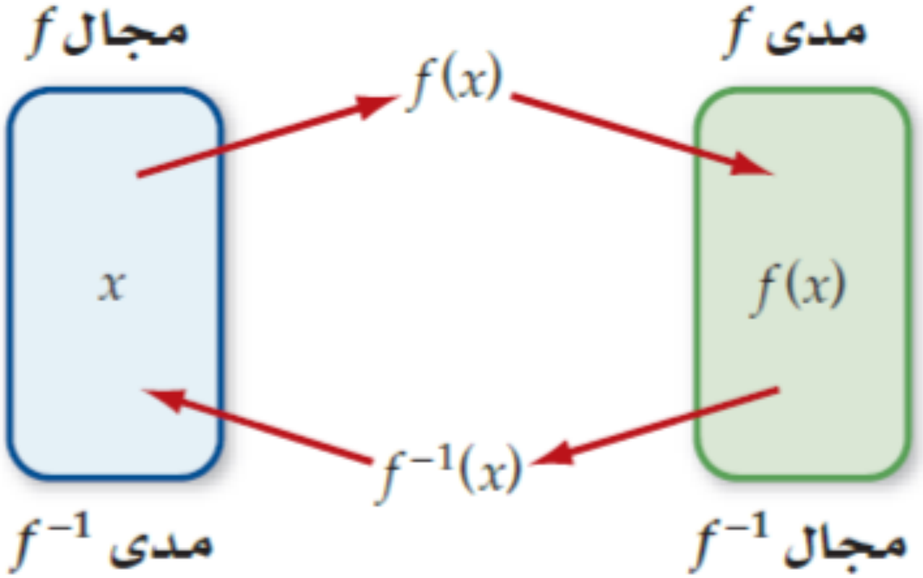
2) $y = x^2 - 16x + 64$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إيجاد الدالة العكسية

إذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي - سميت دالة متباينة -

لأن كل قيمة من x ترتبط بقيمة واحدة من y .



إذا كانت الدالة متباينة
فإن لها دالة عكسية على أن يكون :

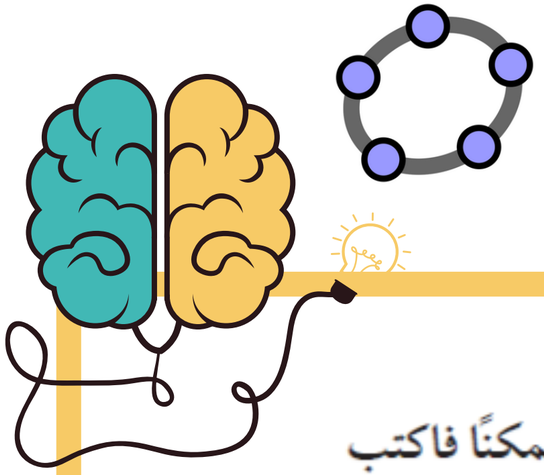
خطوات إيجاد الدالة العكسية جبرياً

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.



إيجاد الدالة العكسية جبرياً

مثال 2

تحقق من فهمك

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

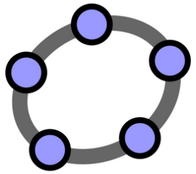
2A $f(x) = -16 + x^3$

2B $f(x) = \frac{x+7}{x}$

2C $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس:
يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.



إيجاد الدالة العكسية جبرياً

مثال 2

تدرب وحل المسائل

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$

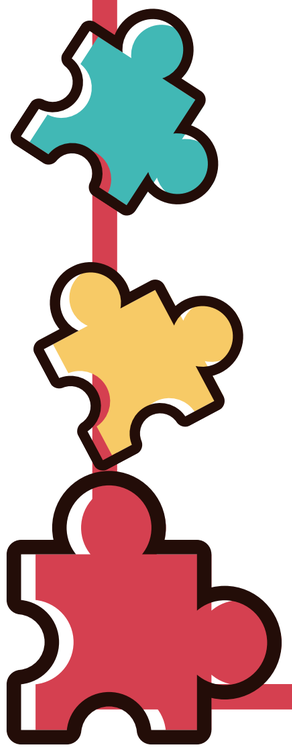
10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} ، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f\left[f^{-1}(x)\right] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.



مثال 3

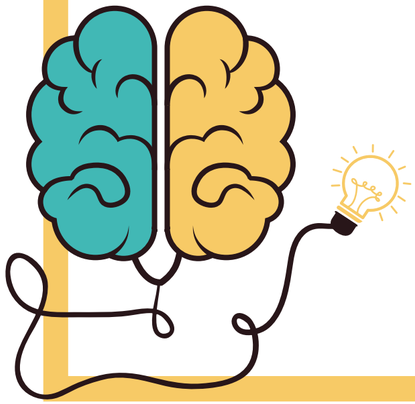
إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A $f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

3B $f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$



مثال 3

إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

تدرب وحل المسائل

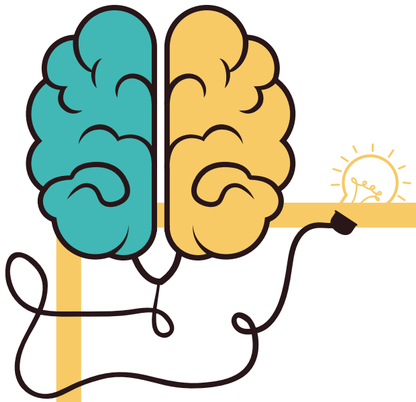
أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

20 $f(x) = 4x + 9$

$g(x) = \dfrac{x - 9}{4}$

21 $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$

$g(x) = \sqrt{\dfrac{5 - x}{3}}$



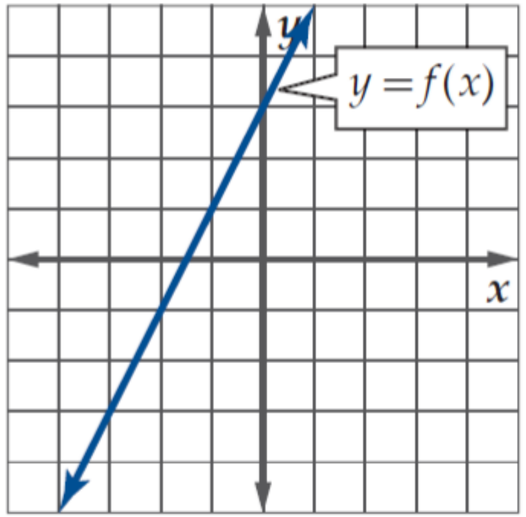
إيجاد الدالة العكسية بيانياً

مثال 4

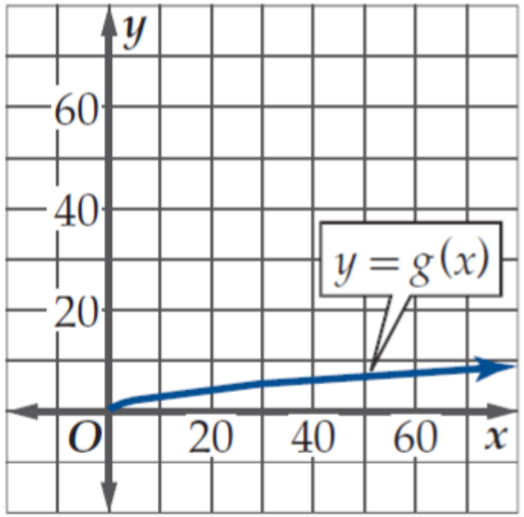
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًّا:

(4A



(4B



إرشادات للدراسة

الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي، ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

إيجاد الدالة العكسية بيانياً

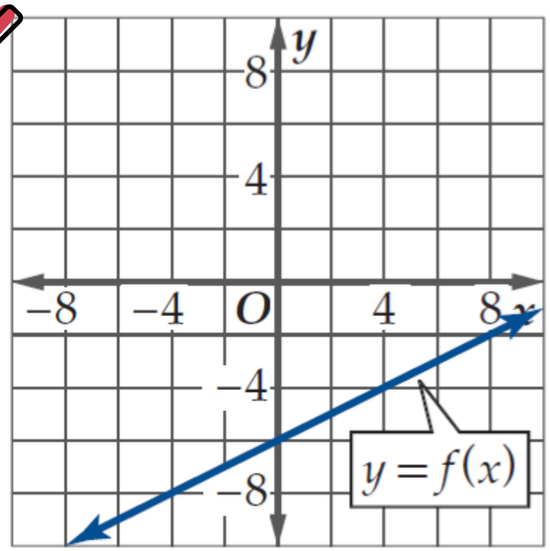
مثال 4

تدرب و حل المسائل

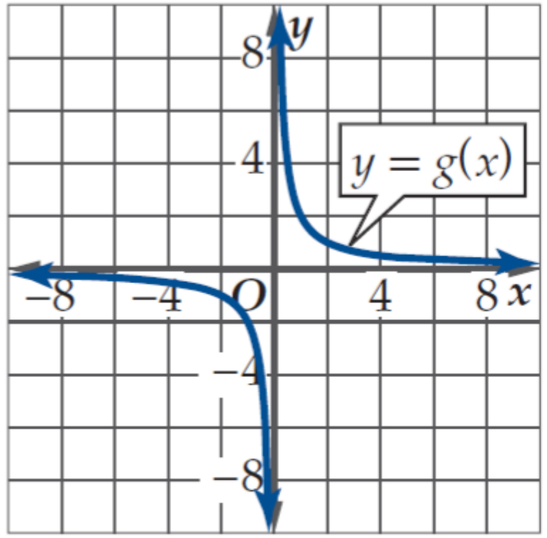
استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها:

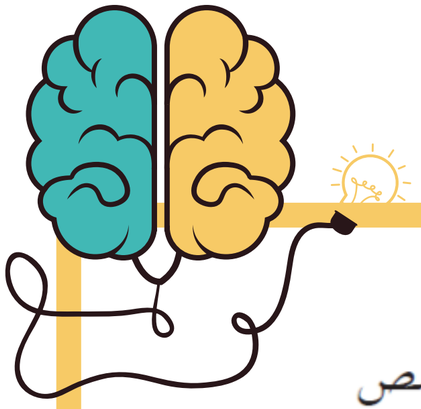
(مثال 4)

27) ✓



28) ✓





استعمال الدالة العكسية

مثال 5

تحقق من فهمك

5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من $f^{-1}(x)$, x في الدالة العكسية؟

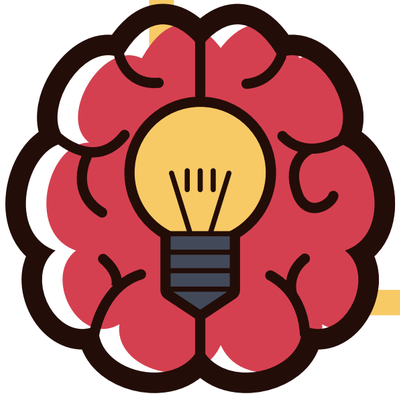
5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f^{-1}(x)$, $f(x)$ إن وجدت. وبرِّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مهارات التفكير العليا

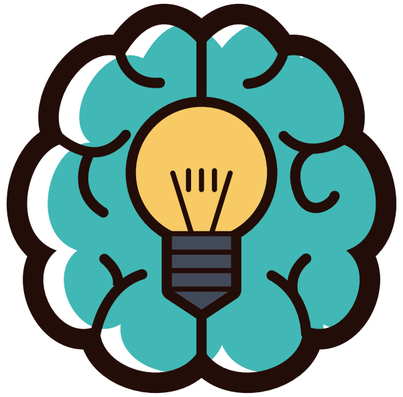
56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرا عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحصيلي

أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$ ؟



أ) $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$

ب) $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$

ج) $g(x) = 2x + 5$

د) $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الواجب

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

https://t.me/GhadahAlfadhly

https://t.me/RAFAH_Secondary5

Ghadah (@Math_Ghadah) / Twitter