دفتر

سلسلة رفعة لدفتر الرياضيات

# رياضيات ١-٢

إعداد وتصميم : منال النصيري

الأستاذة / منال سعد بحل الرويلي

نفيدكم علماً بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بـ :

سلسلة رفعة لدفتر الرياضيات

تحت رقم إيداع : 1443/6681

وتاريخ : 1443 /06/23 هـ

ورقم ردمك: 978-603-04-0804-7

# المقدمة

الحمدالله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد :

نبذه تعريفيه بمجموعة رفعه

هي مجموعة تدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة وهي قائمة على التطوير المهني للمعلمين والمعلمات وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام .

وبهدف التيسير والتسهيل لمادة الرياضيات

نقدم لكم " سلسلة رفعة لدفتر الرياضيات ٣ "

تحتوي على مجموعة كبيره من الأسئلة التي تناقش اهم المهارات الأساسية لمنهج رياضيات ٣

وأرجو من الله ان تجدوا فيها الفائدة

قناة رياضيات (٣)

حسابات مجموعة رفعة الرياضيات

# ١ الدوال والمتباينات

- خصائص الأعداد الحقيقية
- العلاقات والدوال
- دوال خاصة
- تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا
- حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا
- البرمجة الخطية والحل الأمثل

# خصائص الأعداد الحقيقية

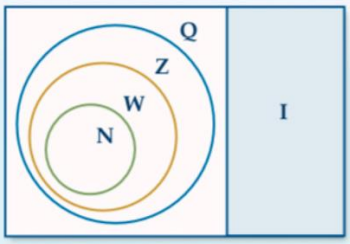
## مفهوم أساسي

### الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى مطويتك

| الرمز | المجموعة | أمثلة |
|---|---|---|
| Q | الأعداد النسبية | $0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\ldots$ |
| I | الأعداد غير النسبية | $\pi = 3.14159\ldots$<br>$\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ |
| Z | الأعداد الصحيحة | $-5, 17, -23, 8$ |
| W | الأعداد الكلية | $2, 96, 0, \sqrt{36}$ |
| N | الأعداد الطبيعية | $3, 17, 6, 86$ |

الأعداد الحقيقيّة R



**تحقق من فهمك:** حددي مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد؟

**(1A** $-185$

**(1B** $-\sqrt{49}$

**(1C** $\sqrt{95}$

**(1D** $-\frac{6}{7}$

**تأكد:** حددي مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد؟

**(1** $62$

**(2** $\frac{5}{4}$

**(3** $\sqrt{11}$

**(4** $-12$

**خصائص الأعداد الحقيقية :** يلخص الجدول الآتي بعض خصائص الأعداد الحقيقية:

**ملخص المفهوم** — **خصائص الأعداد الحقيقية** — أضف إلى مطويتك

لأي أعداد حقيقية $a, b, c$ فإن:

| الخاصية | الجمع | الضرب |
|---|---|---|
| التبديلية | $a + b = b + a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| التجميعية | $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| العنصر المحايد | $a + 0 = a = 0 + a$ | $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ |
| النظير | $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ | $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, a \neq 0$ |
| الانغلاق | $(a + b)$ عدد حقيقي | $(a \cdot b)$ عدد حقيقي |
| التوزيع | $a(b + c) = ab + ac$ , $(b + c)a = ba + ca$ | |

**تحقق من فهمك :**

**2)** $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟ ما الخاصية الموضحة ؟

.....

.....

**تحقق من فهمك :**

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد

**3A)** $1.25$

.....

.....

.....

**3B)** $2\frac{1}{2}$

.....

.....

.....

## تأكد:

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

**9)** $-7$

**10)** $\frac{4}{9}$

**11)** $3.8$

**12)** $\sqrt{5}$

## مهارات التفكير العليا:

هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

"العدد غير النسبي يتضمن رمز الجذر".

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**57)** ما الحد العاشر في المتتابعة ... ,2, 4, 7, 11, 16 ؟

**A** 46 **B** 67 **C** 56 **D** 72

**58)** ما أبسط صورة للعبارة: $2(x-y)-3(y-2x)$ ؟

**A** $5x-8y$ **B** $8x-5y$ **C** $-4y$ **D** $-4x-5y$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

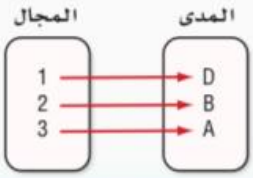
# العلاقات والدوال

**العلاقات والدوال:** تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

**مفهوم أساسي** — **الدالة المتباينة**

أضف إلى مطويتك

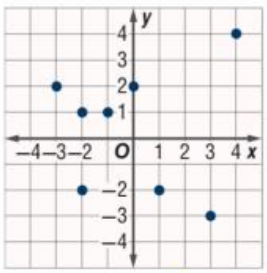
**الدالة المتباينة:** هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى، وهذا يعني أنه لايمكن أن يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى.




## تحقق من فهمك:

حدِّد مجال كلِّ علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالةً أم لا ، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا ؟

**(1A**

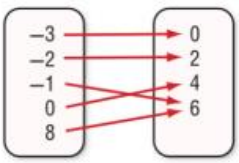



.....

.....

.....

**(1B**




.....

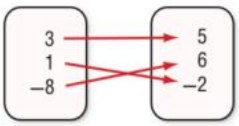
.....

.....

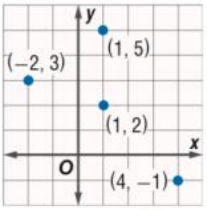
## تأكد:

حدِّد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

(1




(2




(3

| x | y |
|---|---|
| −2 | −4 |
| 1 | −4 |
| 4 | −2 |
| 8 | 6 |

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

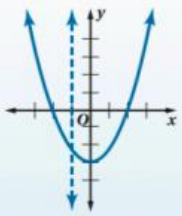
## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

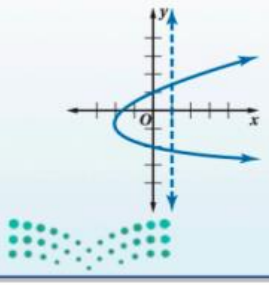
### اختبار الخط الرأسي

**التعبير اللفظي:** إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

**النموذج:**



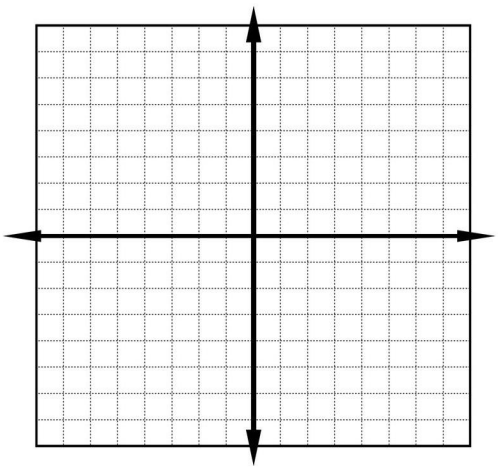

إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة فالعلاقة ليست دالة.



## تحقق من فهمك:

مثِّل كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها، ومداها، وحدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

**3)** $y = x^2 + 1$



.....

.....

.....

.....

.....

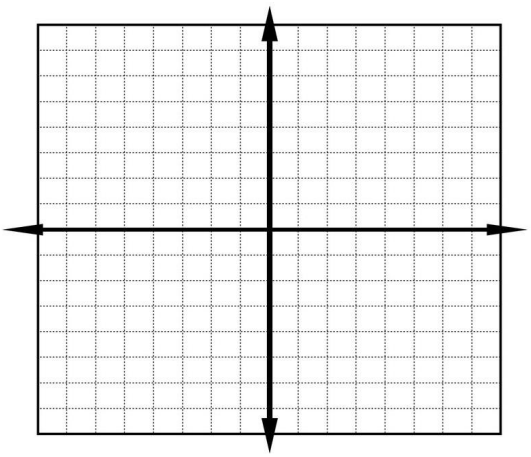
.....

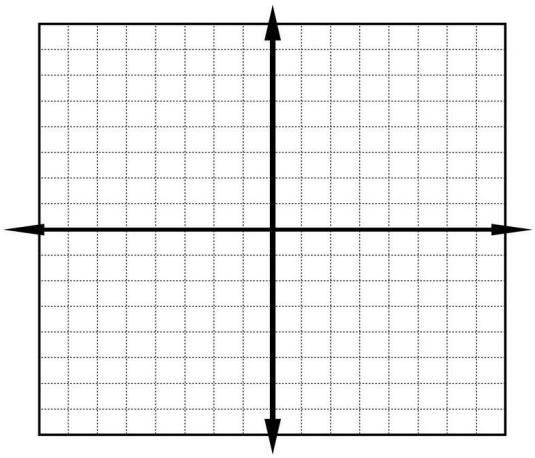
## تأكد:

مثِّل كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها، ومداها، وحدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

**5)** $y = 5x + 4$

**7)** $y = 3x^2$





## تحقق من فهمك :

أوجدي قيمة كلاً مما يلي :

$$g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$$

**(4A** $g(2.8)$

.....

.....

.....

**(4B** $g(4a)$

.....

.....

.....

## تأكد :

أوجدي قيمة كلاً مما يلي :

.....

.....

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

**(9** إذا كانت $f(x) = -4x - 8$ فإن $f(-3)$

## مهارات تفكير عليا:

**(30 تحدَّ:** إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $g(b) = 51, f(b) = 31, g(a) = 33, f(a) = 19$. وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحقِّقان المعطيات السابقة.

.....

.....

.....

## تحصيلي :

### تدريب على اختبار

**32)** تحتوي بركة سباحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة. فأي المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء $g$ المتبقية في البركة بعد $m$ دقيقة؟

**A** $g = 19500 - 6m$

**B** $g = 19500 + 6m$

**C** $g = \frac{19500}{6m}$

**D** $g = \frac{6m}{19500}$

**33)** إذا كان $g(x) = x^2$، فأي عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$؟

**A** $1$

**B** $x^2 + 1$

**C** $x^2 + 2x + 1$

**D** $x^2 - x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# دوال خاصة

## الدالة المتعددة التعريف :

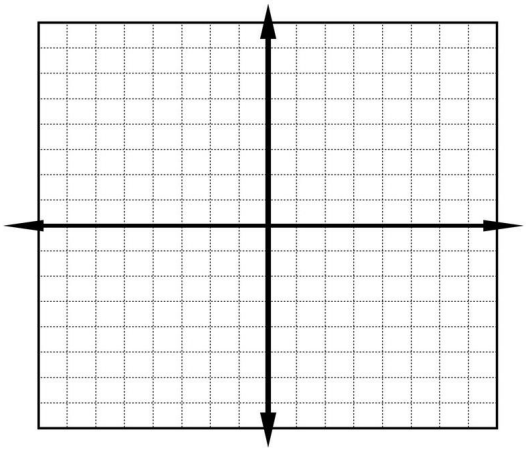
الدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر

وعند تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًّا توضع دائرة صغيرة مظلّلة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظلّلة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

## تحقق من فهمك :

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

1) $f(x)=\begin{cases} x+2 , x<0 \\ x , x\geq 0 \end{cases}$.



.....

.....

.....

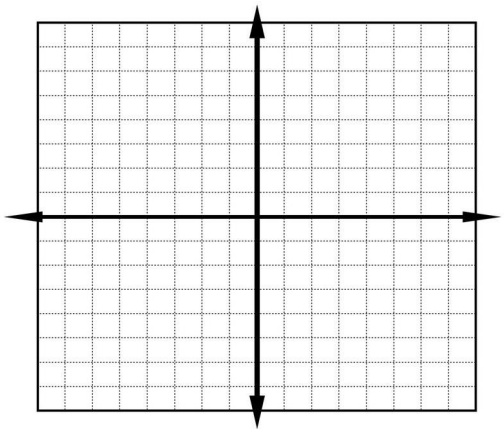
.....

.....

## تأكد :

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

1) $f(x)=\begin{cases} -3 , & x \le -4 \\ x , & -4 < x < 2 \\ -x+6 , & x \ge 2 \end{cases}$



.....

.....

.....

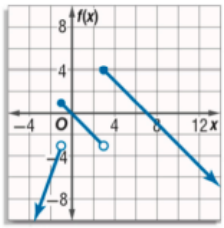
.....

.....

تمثل الدوال المتعددة التعريف غالباً بعدة دوال خطية وتسمى ( الدالة المتعددة التعريف)

## تحقق من فهمك :

2) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



.....

.....

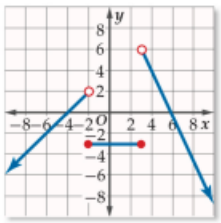
.....

.....

## تأكد ؛

اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًا في كلٍّ ممَّا يأتي:

3)



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

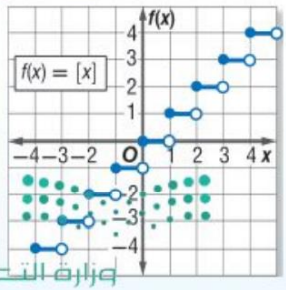
.....

**الدالة الدرجية :** من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، وقد سُميت بهذا الاسم لأن تمثيلها البياني يشبه الدرج، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [x]$، هي مثال على الدالة الدرجية؛ حيث يعني الرمز $[x]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي $x$. فعلى سبيل المثال: $[3.25] = 3$ وكذلك $[-4.6] = -5$.

### مفهوم أساسي

**دالة أكبر عدد صحيح**

أضف إلى مطويتك




**الدالة الرئيسة (الأم):** $f(x) = [x]$، وتُعرَّف على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

**شكل التمثيل البياني:** قطع مستقيمة أفقية.

**المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية

**المدى:** مجموعة الأعداد الصحيحة

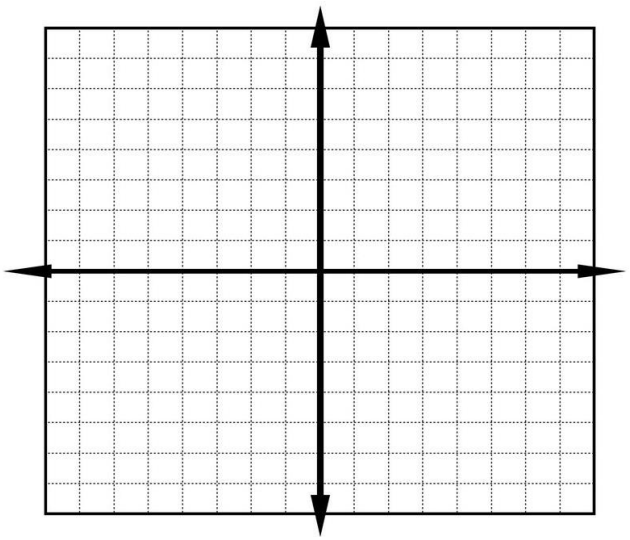
**المقطعان:** $x = 0 , 0 \le x < 1$ حيث $f(x) = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
1443 -

## تأكد :

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

**7)** $h(x) = [x - 5]$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

وهناك نوع آخر من الدوال المتعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

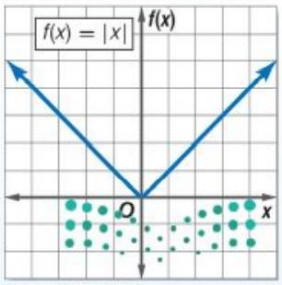
**مفهوم أساسي**

**دالة القيمة المطلقة**

أضف إلى مطويتك

**الدالة الرئيسة (الأم):** $f(x) = |x|$ ، وتُعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$




**شكل التمثيل البياني:** على شكل حرف V

**المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية

**المدى:** مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

**المقطعان:** $x = 0, f(x) = 0$

**ولايمكن أن تكون:** $f(x) < 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

## التحويلات الهندسية لدالة القيمة المطلقة

$$f(x) = |x \pm a| \pm b$$

**$a$**
إزاحة يمين أو يسار

- سالبة >>إزاحة إلى اليمين (عكس الإشارة)
- موجبة >>إزاحة إلى اليسار (عكس الإشارة)

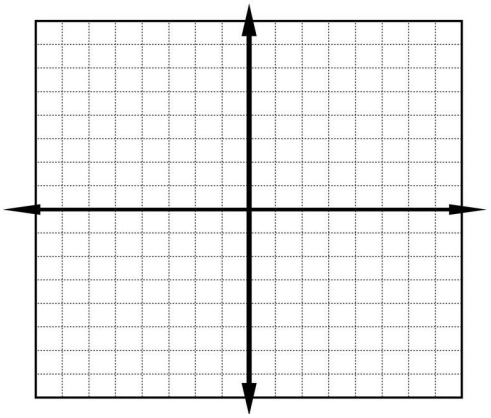
**$b$**
إزاحة أعلى أو أسفل

- سالبة >>إزاحة إلى أسفل (نفس الإشارة)
- موجبة >>إزاحة إلى أعلى (نفس الإشارة)

## تحقق من فهمك :

مثّل الدالة بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها.

**(4A** $f(x) = |x - 2|$



.....

.....

.....

.....

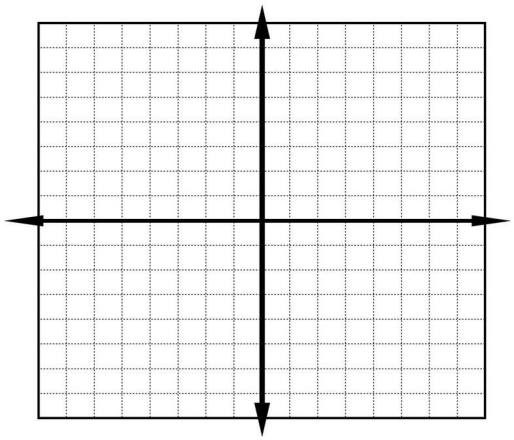
.....

.....

## تحقق من فهمك :

مثّل الدالة بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها.

**(4B** $f(x) = -|x| + 1$



.....

.....

.....

.....

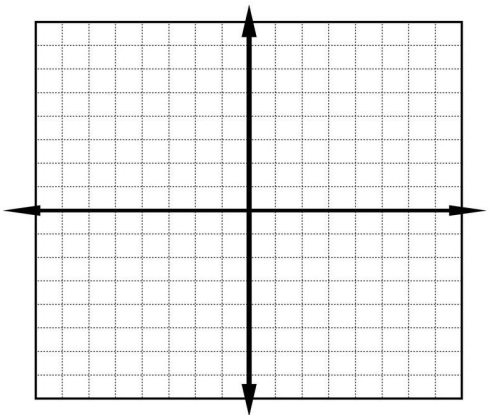
.....

.....

**تأكد:**

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

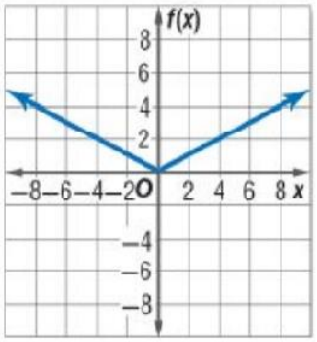
**(10** $h(x) = |x + 4|$



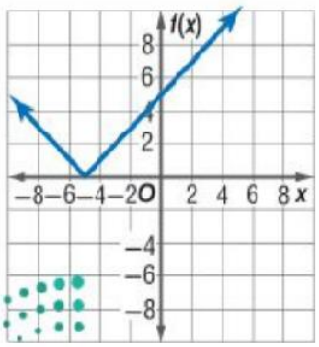
**تأكد:**

اكتب دالة القيمة المطلقة الممثلة بيانيًّا في كلٍّ ممَّا يأتي:

**(27**




**(28**



## مهارات تفكير عليا:

**32) مسألة مفتوحة:** اكتب علاقة باستعمال القيمة المطلقة بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

.....

.....

.....

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**38)** أيّ دالة مما يأتي يكون فيها $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1$؟

**A** $f(x) = 2x$

**B** $f(x) = |-2x|$

**C** $f(x) = [x]$

**D** $f(x) = [2x]$

.....

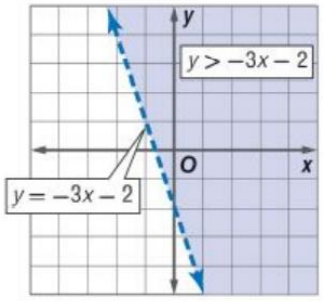
.....

.....

.....

# تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

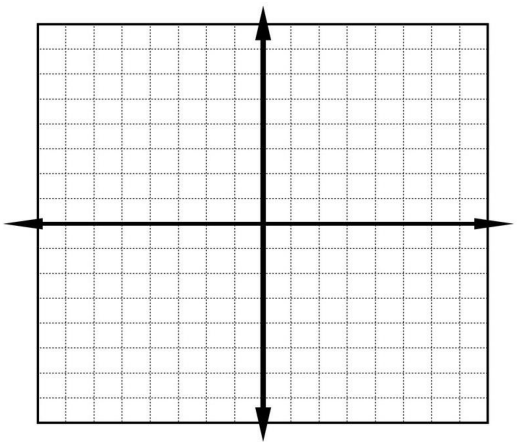
**تمثيل المتباينات الخطية بيانيًّا:** تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.




التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على صورة منطقة مظلّلة تسمى **منطقة الحل**، فكل نقطة في المنطقة المظلّلة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** منطقة الحل وقد رُسِم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز $\leq$ أو $\geq$ فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذٍ يكون تمثيل المستقيم خطًّا متصلًا.

**تحقق من فهمك:** مثّل المتباينة بيانيًّا.

**1A)** $3x + \frac{1}{2}y < 2$



.....

.....

.....

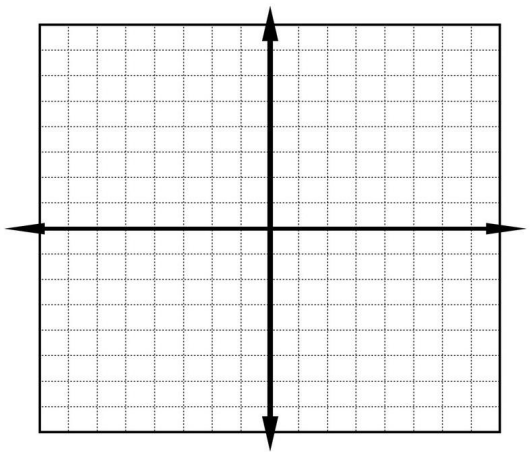
.....

.....

.....

**تحقق من فهمك:** مثّل المتباينة بيانيًّا.

**1B)** $-x + 2y > 4$



.....

.....

.....

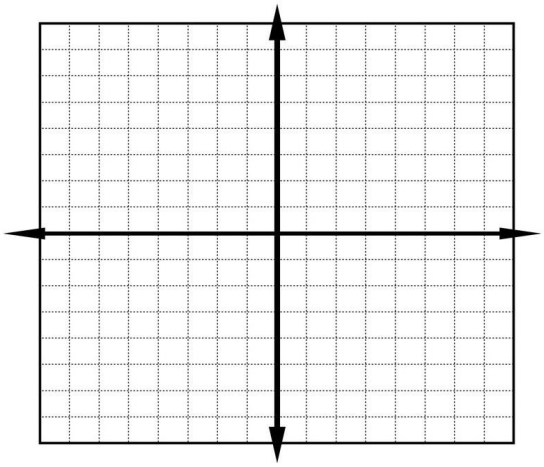
.....

.....

.....

**تأكد:** مثّل المتباينة بيانيًّا.

**1)** $y \leq 4$



.....

.....

.....

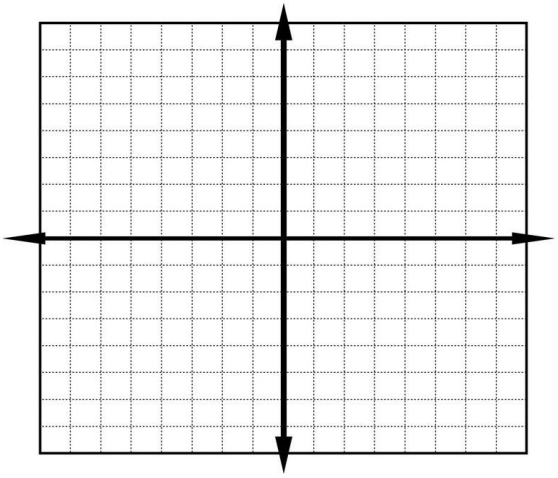
.....

.....

.....

## تحقق من فهمك :

**2) ألعاب:** مع صالح 60 ريالًا يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمن تذكرة كل لعبةٍ عاديةٍ 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا .



.....

.....

.....

.....

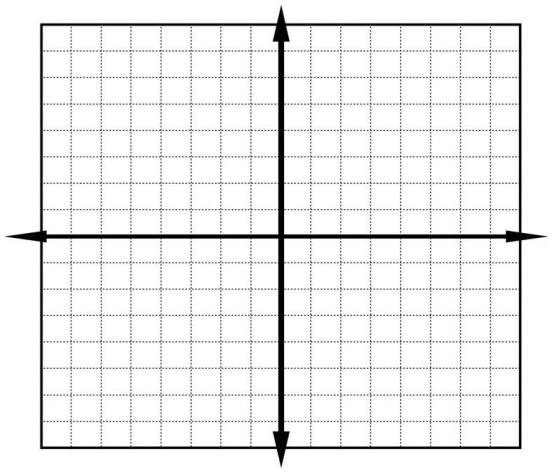
.....

.....

## تحقق من فهمك :

مثّل المتباينة بيانيًّا.

**3A)** $y \leq 2|x| + 3$



.....

.....

.....

.....

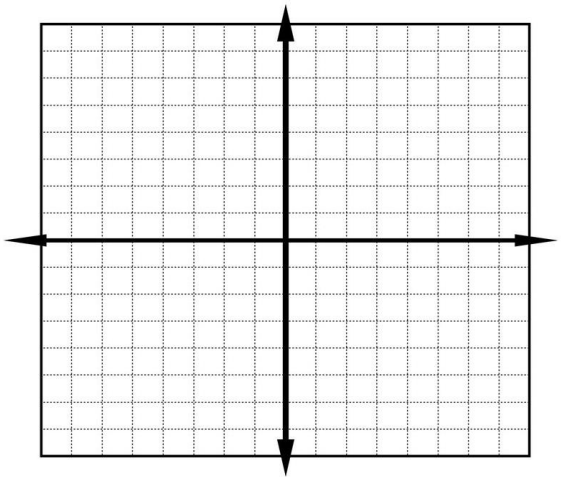
.....

.....

## تحقق من فهمك :

مثّل المتباينة بيانيًّا.

**3B)** $y \geq 3|x+1|$



.....

.....

.....

.....

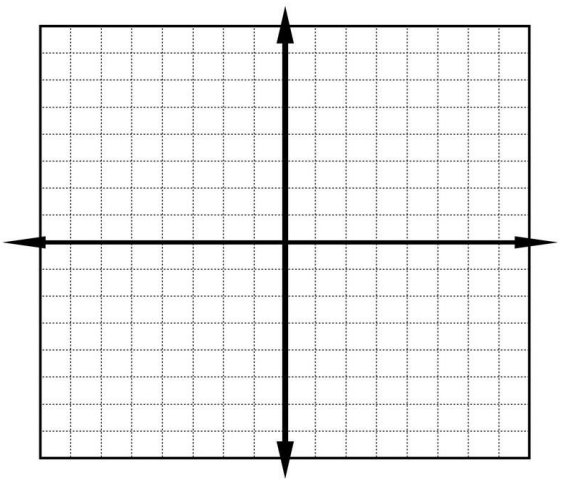
.....

.....

## تأكد :

مثّل المتباينة بيانيًّا.

**6)** $y \geq |x+3|$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

## مهارات تفكير عليا:

**29) مسألة مفتوحة:** استعمل القيمة المطلقة لتكوين متباينة على أن لا يقع حلها في الربعين الثاني أو الثالث.

.....

.....

.....

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**34)** أي النقاط الآتية تقع في منطقة حل المتباينة $y + 3x > -2$؟

**A** $(-3, 1)$

**B** $(1, -7)$

**C** $(0, 0)$

**D** $(-4, 0)$

**35)** أي الدوال الآتية مداها هو $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$؟

**A** $f(x) = -x$

**B** $f(x) = [x]$

**C** $f(x) = |x|$

**D** $f(x) = -|x|$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

**نظام المتباينات الخطية :** حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

**مفهوم أساسي** — **حل أنظمة المتباينات الخطية**

أضف إلى مطويتك

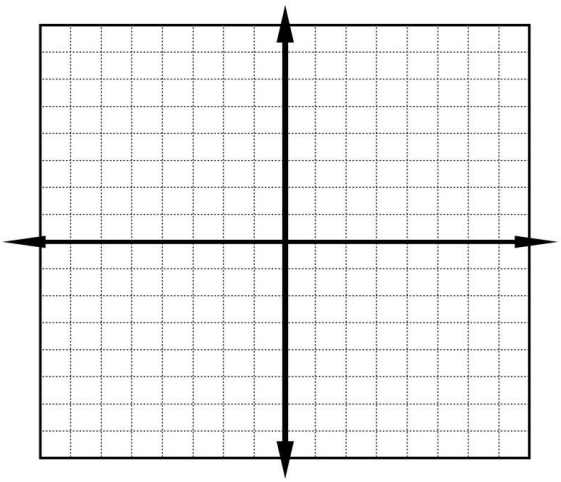
**الخطوة 1** مثّل كل متباينة في النظام بيانيًا.

**الخطوة 2** حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

**تحقق من فهمك :** حل النظام الآتي بيانيًّا:

**1A)** $y \leq -2x + 5$

$y > -\frac{1}{4}x - 6$



.....

.....

.....

.....

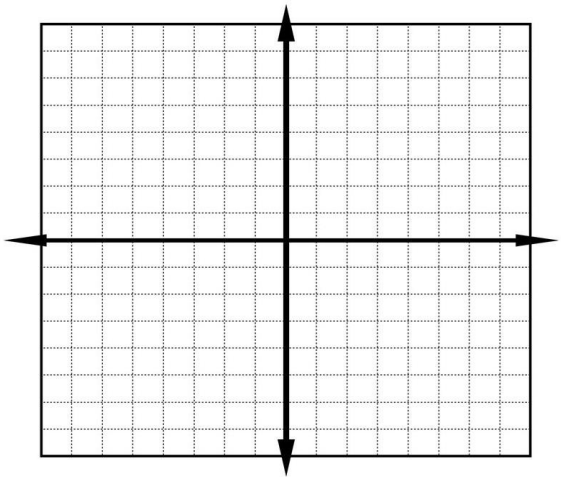
.....

.....

**تحقق من فهمك :** حل النظام الآتي بيانيًّا:

**(1B**

$$y \geq |x|$$
$$y < \frac{4}{3}x + 5$$



.....

.....

.....

.....

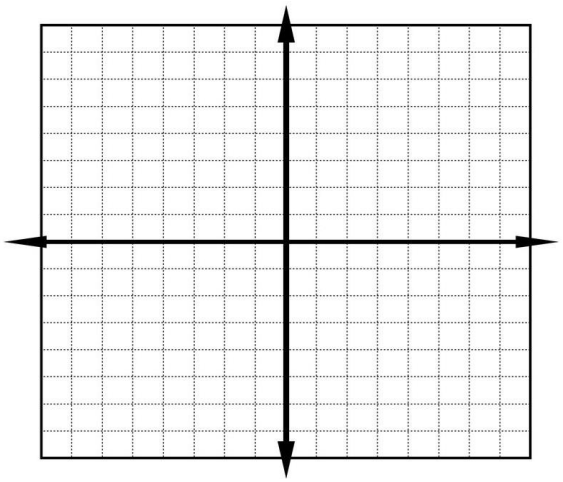
.....

.....

**تحقق من فهمك :** حل النظام الآتي بيانيًّا:

**(2A**

$$y \geq -4x + 8$$
$$y < -4x + 4$$



.....

.....

.....

.....

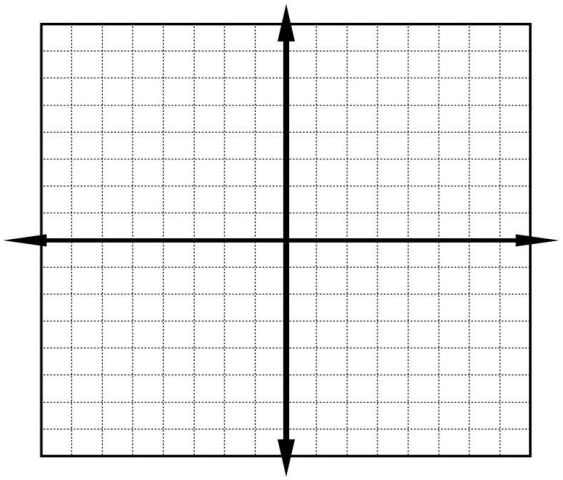
.....

.....

**تحقق من فهمك :** حل النظام الآتي بيانيًّا:

(2B $y \geq |x|$

$y < x - 6$



.....

.....

.....

.....

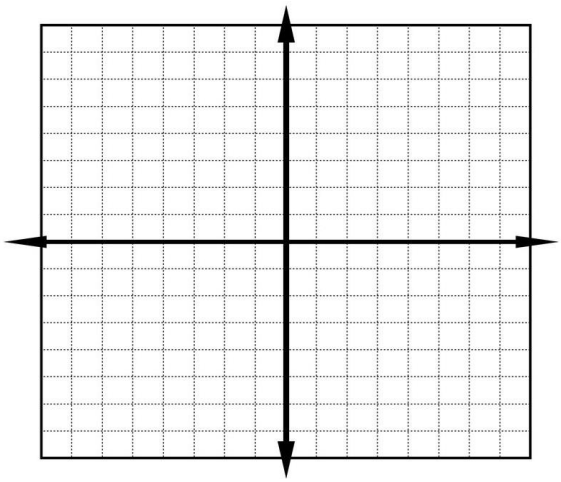
.....

.....

**تأكد ؛** حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا: **المثالان 2 , 1**

(1 $y \leq 6$

$y > -3 + x$



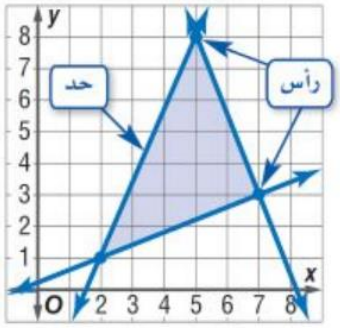
.....

.....

.....

.....

.....




**إيجاد رؤوس منطقة الحل:** ينتج أحيانًا عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحدِّدة للمنطقة (الحدود).

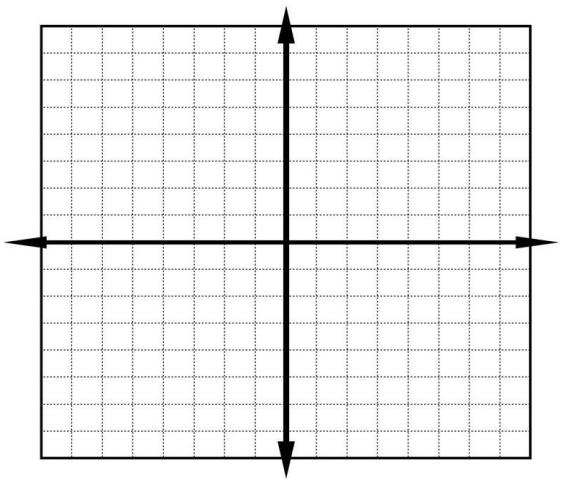
## تحقق من فهمك:

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

**(4A** $y \geq -3x - 6$

$2y \geq x - 16$

$11y + 7x \leq 12$



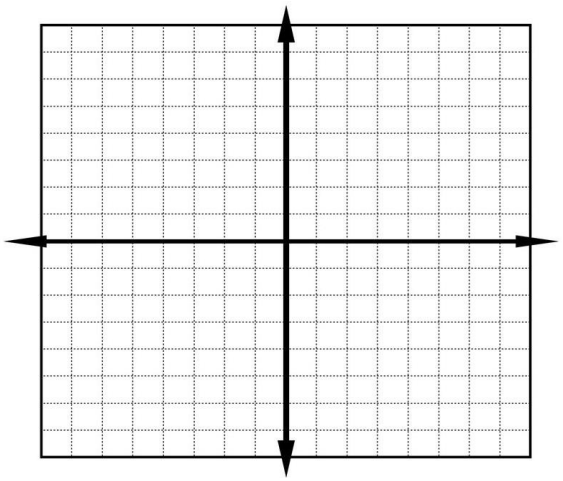
## تحقق من فهمك :

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

**(4B** $5y \leq 2x + 9$

$y \leq -x + 6$

$9y \geq -2x + 5$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

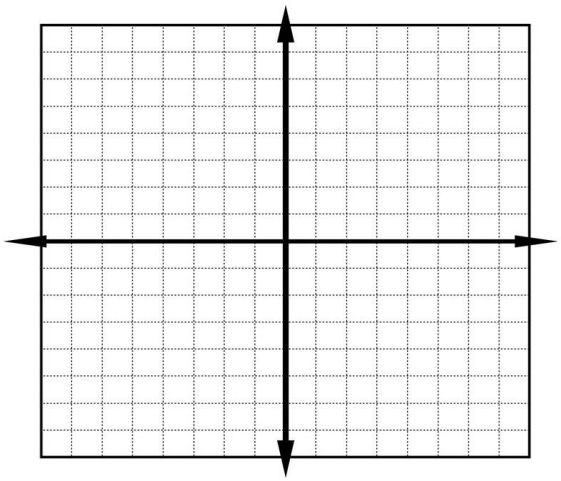
تأكد ؛

**مثال 4** أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

**5)** $y \geq 2x + 1$

$y \leq 8$

$4x + 3y \geq 8$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## مهارات تفكير عليا:

**39) مسألة مفتوحة:** اكتب نظامًا من متباينتين على أن يكون الحل:

**a)** في الربع الثالث فقط.

**b)** غير موجود.

**c)** واقعًا على مستقيم.

**d)** نقطة واحدة فقط.

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**43)** يبين الجدول المجاور العلاقة بين $x$ و $y$.
فأيُّ المعادلات الآتية تمثل هذه العلاقة؟

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 8 |
| 3 | 11 |
| 4 | 14 |
| 5 | 17 |
| 6 | 20 |

**A** $y = 3x - 2$

**B** $y = 3x + 2$

**C** $y = 4x + 1$

**D** $y = 4x - 1$

# البرمجة الخطية والحل الأمثل

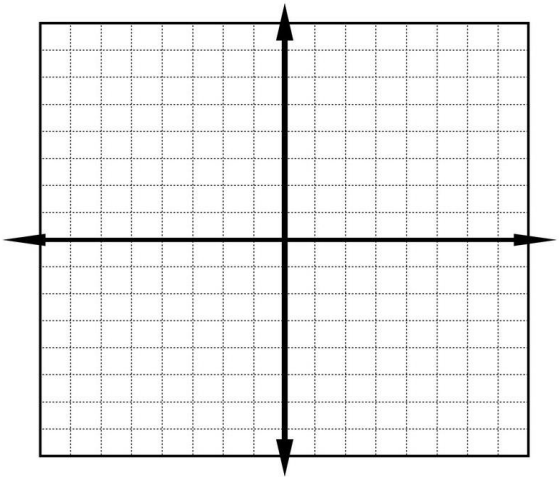
**البرمجة الخطية:** هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى - إن وجدت - للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

**تحقق من فهمك:**

**مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:**

**(1A**

$$-2 \le x \le 6$$
$$1 \le y \le 5$$
$$y \le x + 3$$
$$f(x, y) = -5x + 2y$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تحقق من فهمك :

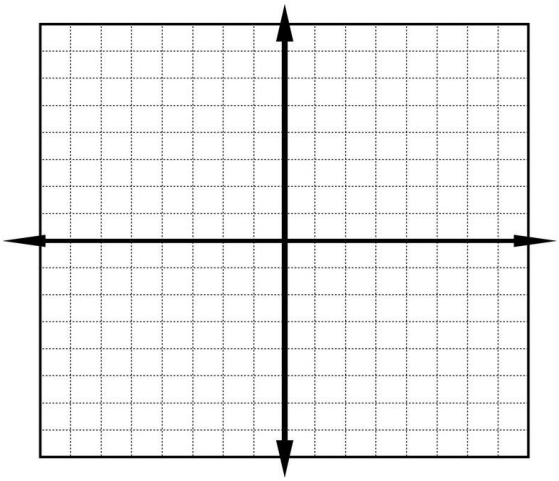
مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

**(1B** $-6 \le y \le -2$

$y \le -x + 2$

$y \le 2x + 2$

$f(x, y) = 6x + 4y$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

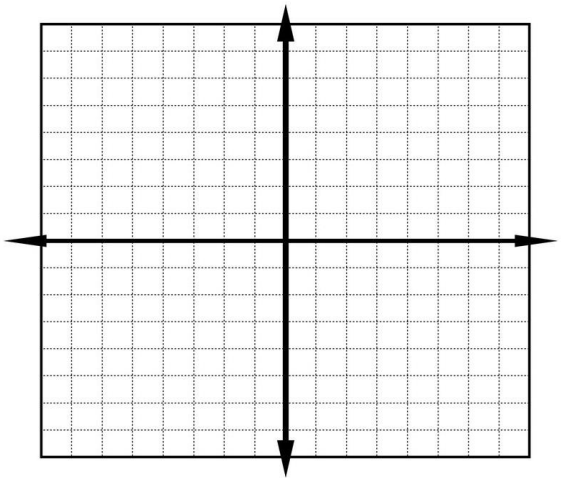
.....

## تحقق من فهمك :

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

**(2A**

$$y \le 8$$
$$y \ge -x + 4$$
$$y \le -x + 10$$
$$f(x, y) = -6x + 8y$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## مهارات تفكير عليا:

**21) مسألة مفتوحة :** اكتب نظام متباينات خطية على أن تكون منطقة الحل محدودة وتقع في الربع الرابع فقط ومساحتها 20 وحدة مربعة.

.....

.....

.....

## تحصيلي :

### تدريب على اختبار

26) **هندسة :** أيٌّ مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16$ , $y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما المقطع $y$ نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع $x$ نفسه .

D مستقيمان متوازيان.

.....

.....

.....

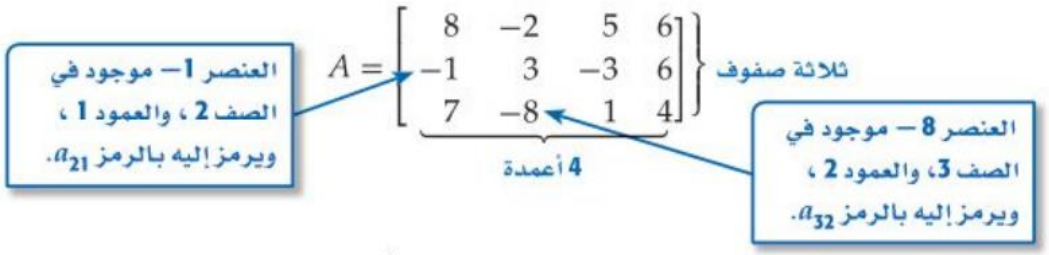
.....

# ٢ المصفوفات

- مقدمة في المصفوفات
- العمليات على المصفوفات
- ضرب المصفوفات
- المحدّدات وقاعدة كرامر
- النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

# مقدمة في المصفوفات

**المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال حرف كبير تحته خط مثل $\underline{A}$ و $\underline{B}$.




يمكنك تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من $m$ صفًّا و $n$ عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "$m$ في $n$"). فالمصفوفة $\underline{A}$ في الأعلى هي مصفوفة من النوع $4 \times 3$ أو من الرتبة $4 \times 3$؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. ويدل الرمز $a_{12}$ على عنصر في المصفوفة $\underline{A}$، على حين يدل الرمز $b_{12}$ على عنصر في المصفوفة $\underline{B}$.

## تحقق من فهمك:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

**1A)** ما رتبة $\underline{B}$؟

.....
.....
.....

**1B)** ما قيمة $b_{32}$؟

.....
.....
.....

**تأكد:**

**مثال 1** حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

.....
.....
.....

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

.....
.....
.....

**تأكد:**

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

4) $a_{32}$

.....
.....

5) $a_{11}$

.....
.....

6) $a_{33}$

.....
.....

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

**مصفوفة صف**
تحوي صفًا واحدًا.
$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

**مصفوفة عمود**
تحوي عمودًا واحدًا.
$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

**المصفوفة المربعة**
عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.
$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

**المصفوفة الصفرية**
جميع عناصرها أصفار.
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$
المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$
ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
المصفوفتان متساويتان.

## تأكد :

**19)** يبين الجدول أدناه النقاط التي حصل عليها ثلاثة طلاب في مسابقة علمية تقدم على 3 جولات، نظّم هذه البيانات في مصفوفة:

| الاسم | الجولة 1 | الجولة 2 | الجولة 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| سعود | 221 | 201 | 185 | 607 |
| علي | 168 | 233 | 159 | 560 |
| مروان | 187 | 189 | 211 | 587 |

.....

.....

.....

## مهارات التفكير العليا:

**تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وفسِّر إجابتك:

**32)** المصفوفة $C$ مربعة ولها أربعة أعمدة، وتحوي العنصر $c_{53}$.

.....

.....

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**37) مسح:** نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

| | ضد | مؤيد |
|---|---|---|
| المرشح الأول | 771 | 1553 |
| المرشح الثاني | 1633 | 689 |
| المرشح الثالث | 229 | 2088 |

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي **ليس** صحيحًا؟

**A** هناك 771 صوتًا ضد المرشح الأول.

**B** عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

**C** فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

**D** عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

.....

.....

# العمليات على المصفوفات

**جمع المصفوفات وطرحها:** يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

## تحقق من فهمك:

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

.....

.....

.....

.....

**1A)** $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

## تأكد:

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

.....

.....

.....

**2)** $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

**3)** $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

**4)** $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

**الضرب في عدد ثابت:** يمكنك ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **ضرب المصفوفة في عدد ثابت**.

تحقق من فهمك:

**2)** إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$، فأوجد $-4\underline{T}$

.....

.....

.....

تحقق من فهمك:

**3)** إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$،

فأوجد $-6\underline{B} + 7\underline{A}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تأكد:

**مثال 3** إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ $\underline{B}=\begin{bmatrix}8 & -1\\ -2 & 7\end{bmatrix}$ $\underline{C}=\begin{bmatrix}-4 & -6\\ 12 & -7\end{bmatrix}$

فأوجد ناتج كلٍّ مما يلي:

**7)** $4\underline{B}-2\underline{A}$

**8)** $-8\underline{C}+3\underline{A}$

## تأكد:

**29) تبرير:** حدِّد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين $\underline{A}$ , $\underline{B}$ ، ثم فسِّر إجابتك.

**a)** إذا كانت $\underline{A}+\underline{B}$ معرّفة ، فإن $\underline{A}-\underline{B}$ معرّفة.

**b)** إذا كان $k$ عددًا حقيقيًّا ، فإن $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرّفتان.

**c)** إذا كانت $\underline{A}-\underline{B}$ غير معرّفة ، فإن $\underline{B}-\underline{A}$ غير معرّفة.

**d)** إذا كانت $\underline{A}$ وَ $\underline{B}$ لهما عدد العناصر نفسه ، فإن $\underline{A}+\underline{B}$ معرّفة.

**e)** إذا كانت $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرفتين، فإن $k\underline{A}+k\underline{B}$ معرّفة.

# ضرب المصفوفات

**ضرب المصفوفات:** يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة $\underline{A}$ ذات الرتبة $m\times r$ في المصفوفة $\underline{B}$ ذات الرتبة $r\times t$ ، فإن الناتج هو المصفوفة $\underline{AB}$ ذات الرتبة $m\times t$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$$m\times r \quad r\times t \quad m\times t$$

متساويان

رتبة $AB$

## تحقق من فهمك:

هل يمكن إيجاد $\underline{A}\cdot\underline{B}$ في كلٍّ مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

**(1A** $\underline{A}_{4\times 6}\cdot\underline{B}_{6\times 2}$

.....

.....

.....

(1B $\underline{A}_{3\times 2}\cdot\underline{B}_{3\times 2}$

.....

.....

.....

## تأكد:

**مثال 1** حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

**(1** $\underline{A}_{2\times 4}\cdot\underline{B}_{4\times 3}$

.....

.....

.....

**(2** $\underline{C}_{5\times 4}\cdot\underline{D}_{5\times 4}$

.....

.....

.....

**(3** $\underline{E}_{8\times 6}\cdot\underline{F}_{6\times 10}$

.....

.....

.....

يمكنك إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

### ضرب المصفوفات

**التعبير اللفظي:** العنصر في الصف $m$ والعمود $r$ من المصفوفة $\underline{AB}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف $m$ من المصفوفة $\underline{A}$، بعناصر العمود $r$ من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

**الرموز:**

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

**مثال:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times7 & 2\times6+3\times8 \\ 1\times5+4\times7 & 1\times6+4\times8 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك:

**2)** إذا كانت $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد $\underline{UV}$ .

**تأكد ؛**

**مثال 2** أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

**تحقق من فهمك :**

4) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $AB = BA$ ؟

## تحقق من فهمك:

**5)** إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ ، $\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فحدِّد ما إذا كانت المعادلة $(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \underline{S}\underline{R} + \underline{T}\underline{R}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## مهارات تفكير عليا:

**43) تبرير:** إذا كانت رتبة المصفوفة $\underline{AB}$ هي $5\times8$ ، ورتبة المصفوفة $\underline{A}$ هي $5\times6$ ، فما رتبة المصفوفة $\underline{B}$؟

.....

.....

.....

## تحصيلي:

**49) رتبة المصفوفة:** ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

**A** $1 \times 4$

**B** $3 \times 3$

**C** $4 \times 1$

**D** $4 \times 3$

## اختبار منتصف الباب

**13) اختيار من متعدد:** إذا كانت المصفوفة $\underline{XY}$ من النوع $2 \times 3$، والمصفوفة $\underline{X}$ من النوع $3 \times 4$، فما رتبة المصفوفة $\underline{Y}$؟

**A** $2 \times 3$

**B** $3 \times 2$

**C** $3 \times 4$

**D** $4 \times 2$

# المحددات وقاعدة كرامر

**المحدِّدات:** كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدِّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

**القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة هو:** جميع عناصر المصفوفة التي تمتد من الزاوية اليسرى العلوية للزاوية اليمنى السفلى. أو جميع العناصر $a_{ij}$ بحيث $i=j$ .

## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

### محدِّدة الدرجة الثانية

**التعبيراللفظي:** يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

**بالرمـــوز:** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

**مثال:** $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

**تحقق من فهمك:** أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

**(1A** $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

**(1B** $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

**تأكد:** أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة $3 \times 3$ **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة $2 \times 2$ .

## مفهوم أساسي

### حساب محدِّدة المصفوفة $3 \times 3$

أضف إلى مطويتك

**الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

**خطوة 1:** أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

**خطوة 2:** أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

**خطوة 3:** أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

**خطوة 4:** لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

**الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة $2 \times 2$ .**

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

### إرشادات للدراسة

**قاعدة الأقطار**

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة $3 \times 3$.

**تحقق من فهمك:** أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

**(2A**

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

.....

.....

.....

**تأكد:** أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

**(5**

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تستعمل المحدِّدات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

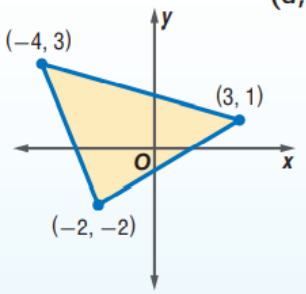
## مفهوم أساسي

أضف إلى

### مساحة المثلث

**التعبير اللفظي:** مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار $A$، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

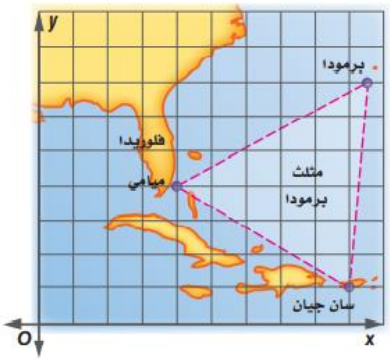



**مثال:** مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

### تأكد:

**11) جغرافيا:** استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:




**a)** احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

**b)** إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.

### الربط مع الحياة

مثلث برمودا منطقة جغرافية في المحيط الأطلسي على شكل مثلث متساوي الأضلاع (كل ضلع نحو 1500 km)، ومساحته حوالي $1000000\ km^2$. وهي منطقة شهيرة بسبب مزاعم عن مخاطر وحوادث وقعت فيها ولم يُحَلّ اللغز حتى الآن.

## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

### قاعدة كرامر

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$ .

**تحقق من فهمك:**

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

**(4A** $\begin{matrix} 7x + 3y = 37 \\ -5x - 7y = -41 \end{matrix}$

**تحقق من فهمك:** حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$8x - 5y = 70 \quad \textbf{(4B}$$
$$9x + 7y = 3$$

**تحقق من فهمك :**

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$3x + 5y + 2z = -7 \quad \textbf{(5A}$$
$$-4x + 3y - 5z = -19$$
$$5x + 4u - 7z = -15$$

## مهارات تفكير عليا:

**33) مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

**a)** المحدِّدة تساوي صفرًا.

**b)** المحدِّدة تساوي 25

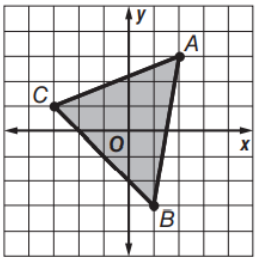
**c)** جميع العناصر أعداد سالبة والمحدِّدة تساوي 32−

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**35) إجابة قصيرة:** أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2 × 2، بحيث تكون جميع عناصرها أعدادًا سالبةً ومحدِّدتها تساوي 20.

**36)** أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.




**A** 10 وحدات مربعة

**B** 14 وحدة مربعة

**C** 12 وحدة مربعة

**D** 16 وحدة مربعة

# النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلة الخطية

## النظير الضربي لمصفوفة

إذا كان قيمة المحدده للمصفوفة
≠ صفر
>> المصفوفة لها نظير ضربي

إذا كان قيمة المحدده للمصفوفة
= صفر
>> المصفوفة ليس لها نظير ضربي

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

تحقق من فهمك :

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

## تأكد ؛

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**إرشادات للدراسة**

لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب $\underline{A}^{-1}$ .

يمكنك استعمال المحدِّدات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

**مفهوم أساسي** — **النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2**

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1}=\frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$،
وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

أضف إلى مطويتك

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدِّدة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

**تحقق من فهمك :** أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(2A $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**تحقق من فهمك :** أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(2B $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**المعادلات المصفوفية:** يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة معادلة مصفوفية لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات | مصفوفة المتغيرات: المتغيرات في النظام فقط | مصفوفة الثوابت: الثوابت في النظام فقط

## مهارات تفكير عليا:

**27) اكتشف الخطأ:** أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

**هاجر**

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

**فاطمة**

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

## مهارات تفكير عليا:

**29) تبرير:** حدِّد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسِّر إجابتك.
"المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

.....

.....

.....

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**32) إجابة قصيرة:** تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 2 ريال، وحجم متوسط بسعر 3 ريالاتٍ، وحجم كبير بسعر 4 ريالاتٍ، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 150 ريالًا. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟

**A** 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

.....

.....

.....

# ٣ كثيرات الحدود ودوالها

- الأعداد المركبة
- القانون العام والمميز
- العمليات على كثيرات الحدود
- قسمة كثيرات الحدود
- دوال كثيرات الحدود
- حل معادلات كثيرات الحدود
- نظريتا الباقي والعوامل
- الجذور والأصفار

# الأعداد المركبة

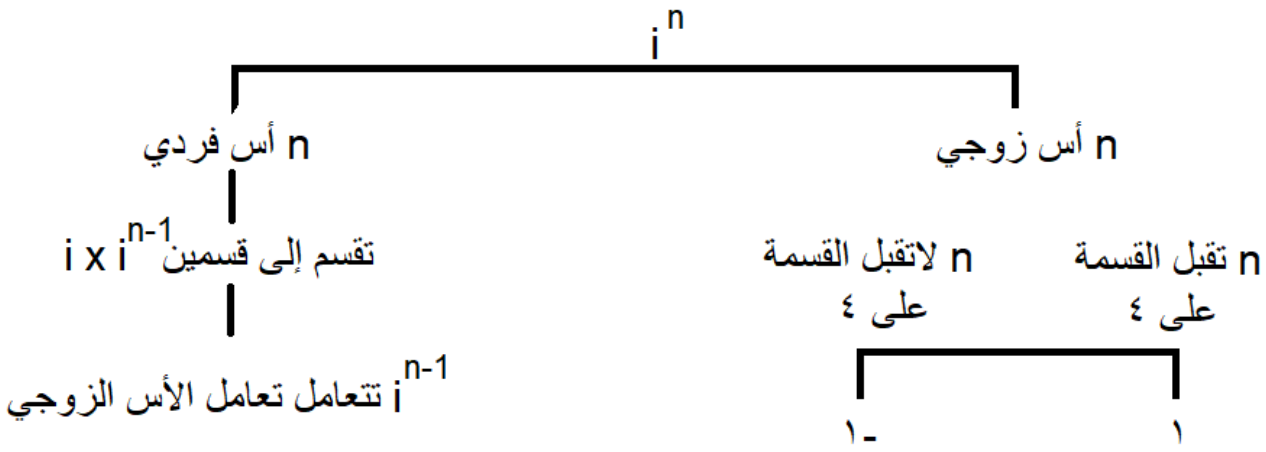
**الأعداد التخيلية البحتة:**

تعرف **الوحدة التخيُّلية** $i$ على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد $-1$ ، وبعبارة أخرى فإن $i=\sqrt{-1}$ ، وهذا يعني أن $i^2=-1$

والأعداد في الصورة $i\sqrt{3}\ ,\ -2i\ ,\ 6i$، تسمى **أعدادًا تخيُّلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل $b$، فإن: $bi = \sqrt{b^2}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{-b^2}$.

## قوى الوحدة التخيلية i



## تحقق من فهمك :

### الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

**1A** $\sqrt{-18}$

.....

.....

.....

**1B** $\sqrt{-125}$

.....

.....

.....

## تأكد :

### الجذور التربيعية للأعداد السالبة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

**1** $\sqrt{-81}$

.....

.....

.....

**2** $\sqrt{-32}$

.....

.....

.....

## تحقق من فهمك :

### ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

**2A** $3i \cdot 4i$

**2B** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$

**2C** $i^{31}$

## تأكد :

### ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

**3** $(4i)(-3i)$

**4** $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

**6** $i^{63}$

## تحقق من فهمك :

### معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة :

**(3A** $4x^2 + 100 = 0$

.....

.....

.....

**(3B** $x^2 + 4 = 0$

.....

.....

.....

**العمليات على الأعداد المركبة :** تتكون العبارة $2+3i$ من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما، وهما العدد الحقيقي 2 والعدد التخيُّلي $3i$، ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

## تحقق من فهمك :

**4)** أوجد قيمتي $x$، $y$ الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

.....

.....

.....

## تأكد ؛

**في كلِّ معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي $a$ , $b$ الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :**

**مثال 4** **9)** $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

.....

.....

.....

## تحقق من فهمك :

### جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

**(5A** $(-2+5i)+(1-7i)$

**(5B** $(4+6i)-(-1+2i)$

## تأكد ؛

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

**(11** $(-1+5i)+(-2-3i)$

**(12** $(7+4i)-(1+2i)$

تحقق من فهمك :

**6) كهرباء :** أوجد فرق الجهد لتيار متناوب شدته $4i - 2$ أمبير، ومعاوقته $2i - 3$ أوم.

.....

.....

.....

**الربط مع الحياة**

مصابيح الزينة من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

المصدر: كتاب الفيزياء المقرر للصف الثالث الثانوي، 1437هـ

يسمى العددان المركبان $a - bi$ , $a + bi$ **مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا على الصورة $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

تحقق من فهمك :

## قسمة الأعداد المركبة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

**7A)** $\frac{-2i}{3+5i}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**7B)** $\frac{2+i}{1-i}$

.....

.....

.....

.....

.....

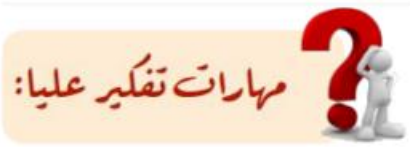
.....

## تأكد ؛

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

**13** $(6-8i)(9+2i)$

**15** $\frac{3-i}{4+2i}$




**58) تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك:

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي"

.....

.....

.....

**59) مسألة مفتوحة:** اكتب عددين مركّبين يكون ناتج ضربهما يساوي 20.

.....

.....

.....

## تحصيلي :

### تدريب على اختبار

**61)** ما قيمتا $x, y$ الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5 + 4i) - (x+yi) - (-1-3i)$ صحيحة؟

**A** $x = 6, y = 7$

**B** $x = 4, y = i$

**C** $x = 4, y = i$

**D** $x = 4, y = 7$

**62)** قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي:

**A** $36 - 27i$

**B** $9 + 36$

**C** $9 - 36$

**D** $-27 + 36i$

# القانون العام والمميز

**إرشادات للدراسة**

**القانون العام**

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

**مفهوم أساسي** — القانون العام لحل المعادلة التربيعية

أضف إلى مطويتك

**التعبير اللفظي:** يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**مثال:**

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

## تحقق من فهمك :

حل المعادلة بأستخدام القانون العام :

**1A)** $x^2 + 6x = 16$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تحقق من فهمك :

حل المعادلات بإستخدام القانون العام :

**(2A** $x^2 - 16x + 64 = 0$

**(2B** $x^2 + 34x + 289 = 0$

## تحقق من فهمك :

حل المعادلات بإستخدام القانون العام :

**(3A** $3x^2 + 5x + 1 = 0$

**(3B** $x^2 - 8x + 9 = 0$

## تحقق من فهمك :

حل المعادلات بإستخدام القانون العام :

**(4A** $3x^2 + 5x + 4 = 0$

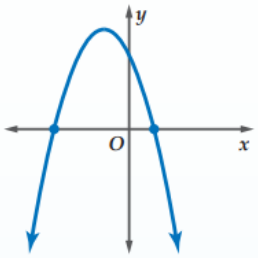
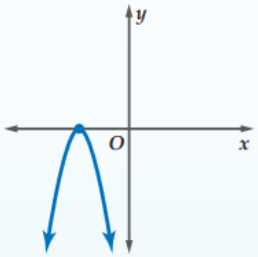
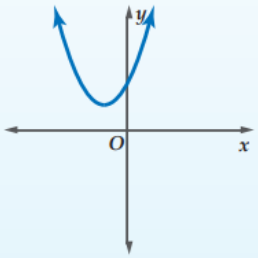
**(4B** $x^2 - 4x = -13$

## مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

### المميز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a, b, c$ أعداد نسبية، $a \neq 0$.

| قيمة المميز | عدد الجذور وأنواعها | مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة |
|---|---|---|
| $b^2 - 4ac > 0$، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل . | جذران حقيقيان نسبيان |   |
| $b^2 - 4ac > 0$، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا. | جذران حقيقيان غير نسبيين | |
| $b^2 - 4ac = 0$ | جذر حقيقي مكرر مرتين |   |
| $b^2 - 4ac < 0$ | جذران مركبان مترافقان |   |

## تحقق من فهمك :

أوجد قيمة المميز لكلٍّ من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كلٍّ منهما وأنواعها:

**(5A** $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

**(5B** $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

## تأكد ؛

حل المعادلة بإستخدام القانون العام:

**(5** $10x^2 - 3 = 13x$

## مهارات تفكير عليا:

**32) اكتشف الخطأ:** حددت كلٌّ من هدى وندى عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

**هدى**

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

وبما أن المميز موجب فللمعادلة حلان حقيقيان.

**ندى**

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

وبما أن المميز سالب فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**36)** أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟

**A** $x^2 - 2x + 5 = 0$

**B** $x^2 - 2x - 5 = 0$

**C** $x^2 = 19$

**D** $x^2 - 8x = -16$

**37)** قيمة المميز للمعادلة $x^2 - 8x = 0$ هي:

**A** $-64$

**B** $-8$

**C** $8$

**D** $64$

# العمليات على كثيرات الحدود

وحيدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة، وتتكون من حد واحد فقط.

## ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

### خصائص الأسس

لأي عددين حقيقيين $x, y$ وعددين صحيحين $a, b$:

| الخاصية | التعريف | مثال |
|---|---|---|
| ضرب القوى | $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ | $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$<br>$p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$ |
| قسمة القوى | $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ، حيث $x \neq 0$ | $\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$<br>$\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$ |
| الأسّ السالب | $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ ، حيث $x \neq 0$، $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$ | $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$<br>$\frac{1}{b^{-7}} = b^7$ |
| قوة القوة | $(x^a)^b = x^{ab}$ | $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$<br>$(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$ |
| قوة ناتج الضرب | $(xy)^a = x^a y^a$ | $(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$<br>$(ab)^3 = a^3 b^3$ |
| قوة ناتج القسمة | $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$<br>$\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$ | $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$<br>$\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$ |
| القوة الصفرية | $x^0 = 1, x \neq 0$ | $7^0 = 1$ |

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد من أنك قد كتبتها في أبسط صورة.

## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

### تبسيط وحيدات الحد

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أقواسًا أو أسسًا سالبة.

**تحقق من فهمك:** بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

**(1A** $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

**(1B** $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

**(1C** $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$

**(1D** $(-2x^3y^2)^5$

**تحقق من فهمك:** حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

**(2A** $\frac{x}{y} + 3x^2$

**(2B** $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$

## تأكد:

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

**6)** $\frac{1}{2}x^2 - 7y$

**7)** $x^2 + \sqrt{x}$

## تحقق من فهمك:

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورةٍ:

$(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$

## تحقق من فهمك:

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورةٍ:

**4A)** $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

**4B)** $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

**تحقق من فهمك:** أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورةٍ:

**(5A)** $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

**(5B)** $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

**تأكد:**

**مثال 6**

**13) رياضة:** يمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 دقيقة يوميًّا. وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، أما عندما يرفع الأثقال فيحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. فإذا مارس رفع الأثقال $x$ دقيقة في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم.

## مهارات تفكير عليا:

**42) تحدٍّ:** ما الذي يحدث للمقدار $x^{-y}$ عندما تزداد قيمة $y$ لكل $x > 1, y > 0$؟

.....

.....

## تحصيلي:

## تدريب على اختبار

**47)** أيّ مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود $x^3 - x^2 - 2x$؟

**A** $x$

**B** $x + 1$

**C** $x - 1$

**D** $x - 2$

.....

.....

.....

# قسمة كثيرات الحدود

## تحقق من فهمك :

بسّط العبارة :

**(1A** $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

**(1B** $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$

## تحقق من فهمك :

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:

**(2A** $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

**(2B** $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

## تحقق من فهمك :

**3)** أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$؟

**A** $-r - 6 + \frac{13}{1-r}$

**B** $r + 6$

**C** $r - 6 + \frac{13}{1-r}$

**D** $r + 6 - \frac{13}{1-r}$

**القسمة التركيبية :** **القسمة التركيبية** هي طريقة مبسّطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

**مفهوم أساسي** — **القسمة التركيبية**

أضف إلى مطويتك

**الخطوة 1:** اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x - r$، ثم اكتب الثابت $r$ في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

**الخطوة 2:** اضرب المعامل الأول في $r$، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

**الخطوة 3:** اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

**الخطوة 4:** كرر الخطوتين 3 , 2 على ناتج الجمع في الخطوة السابقةحتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

**تحقق من فهمك :** استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج:

**(4A** $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

**تحقق من فهمك :** استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج:

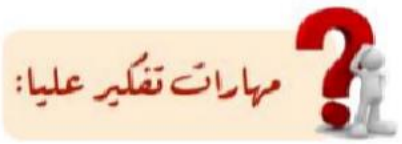
**(4B** $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

**تحقق من فهمك :** استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج:

**(5A** $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

**تحقق من فهمك :** استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج:

**(5B** $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$




**38) تحدٍّ:** إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتجه عن العلاقة بينهما؟

## تدريب على اختبار

**43)** أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $-(4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$؟

**A** $2x^2$ **C** $-10x^2 + 17x$

**B** $-10x^2$ **D** $2x^2 + 17x$

**44)** أيُّ كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟

**A** $x^3 + x^2 - 2x^4$ **C** $x^2 + x + 12^3$

**B** $-2x^2 - 3x + 4$ **D** $1 + x + x^3$

# دوال كثيرات الحدود

**دوال كثيرات الحدود:** **كثيرة الحدود بمتغير واحد** هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ، حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$ ، $n$ عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا، ودرجة كثيرة الحدود هي أسّ المتغير ذي أكبر أسّ فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

## تحقق من فهمك:

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

**(1A** $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$

.....

.....

**(1B** $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$

.....

.....

## تأكد:

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

**(3** $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

.....

.....

**(4** $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$

.....

.....

## تحقق من فهمك :

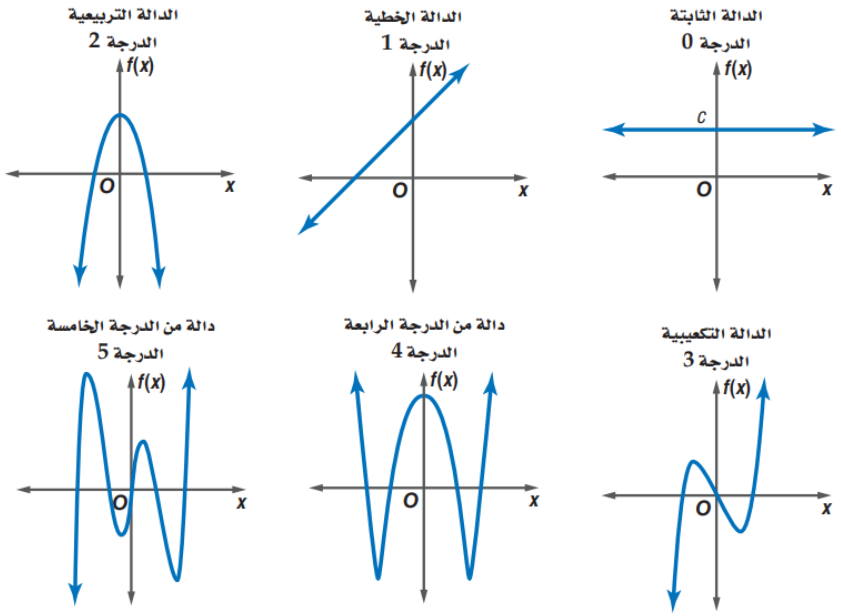
**(3A)** إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$،
فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$ .

**(3B)** إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$،
فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$ .

**قراءة الرياضيات**

**الرمزان $+\infty$ , $-\infty$**
نعبر عن التزايد غير المحدود لقيم المتغير $x$، باستعمال الرمز $+\infty$ ويُقرأ ما لا نهاية ويُكتب $x \to +\infty$،
كما نعبر عن التناقص غير المحدود لقيم المتغير $x$، باستعمال الرمز $-\infty$ ويُقرأ سالب ما لا نهاية ويُكتب $x \to -\infty$ .

**التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود:** إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر عدد المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور $x$ ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.




مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ويُحدد **سلوك طرفي التمثيل البياني** للدالة $f(x)$ عندما تقترب $x$ من المالانهاية $(x \to +\infty)$، أو سالب المالانهاية $(x \to -\infty)$ بكل من: درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيس لها.

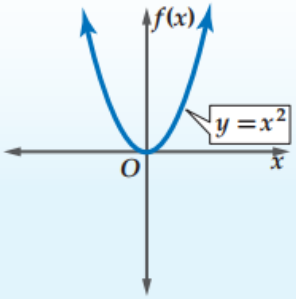
## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

### سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

**الدرجة:** زوجية

**المعامل الرئيس:** موجب




المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .

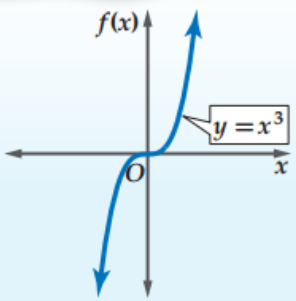
**سلوك طرفي التمثيل البياني:** (في الاتجاه نفسه)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

**الدرجة:** فردية

**المعامل الرئيس:** موجب




المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

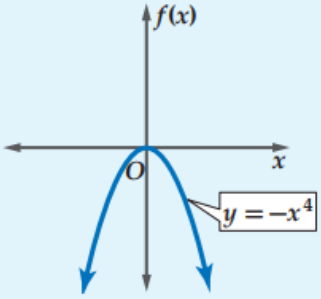
**سلوك طرفي التمثيل البياني:** (في اتجاهين مختلفين)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

**الدرجة:** زوجية

**المعامل الرئيس:** سالب




المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى

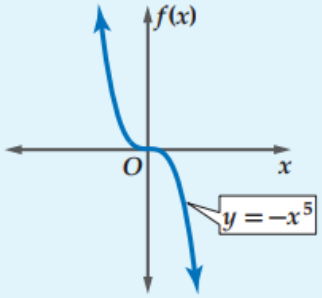
**سلوك طرفي التمثيل البياني:** (في الاتجاه نفسه)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

**الدرجة:** فردية

**المعامل الرئيس:** سالب




المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

**سلوك طرفي التمثيل البياني:** (في اتجاهين مختلفين)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

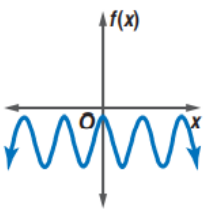
## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

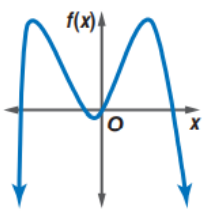
### أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

**كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة**

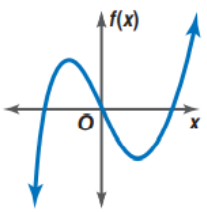



ليس لها أصفار حقيقية

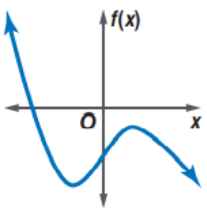



لها 4 أصفار حقيقية

**كثيرتا حدود فرديتا الدرجة**




لها 3 أصفار حقيقية



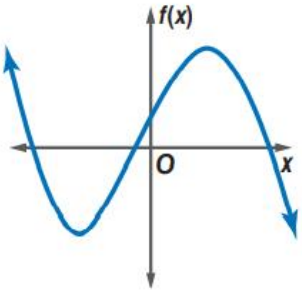

لها صفر واحد حقيقي

## تحقق من فهمك :

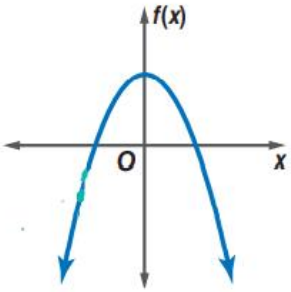
أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

**(4A**




**(4B**

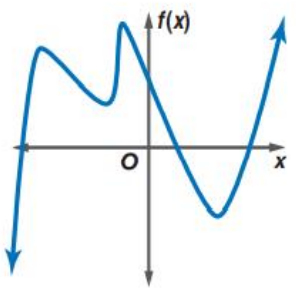


## تأكد:

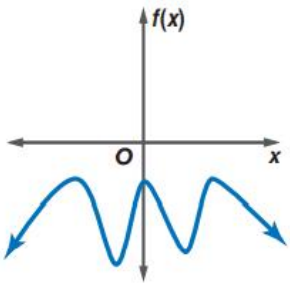
أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

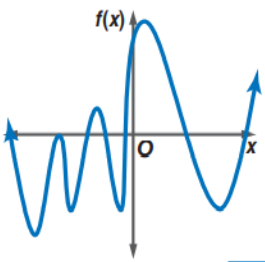
(11




(12




## مهارات تفكير عليا:




**52) اكتشف الخطأ:** حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

**ماجد**

يوجد 8 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور $x$ 7 مرات، وأحد الجذور مكرر مرتين.

**بدر**

يوجد 7 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور $x$ سبع مرات.

**53) تحدٍّ:** إذا كانت $g(x)$ من عوامل $f(x)$، وكانت درجة $f(x)$ تساوي 5، ومعاملها الرئيس موجبًا، وكانت درجة $g(x)$ تساوي 3 ومعاملها الرئيس موجبًا، فصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$، وفسّر إجابتك.

.....

.....

.....

تحصيلي:

## تدريب على اختبار

**56)** ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟

**A** $-11$ **B** $1$ **C** $-1$ **D** $11$

**57)** إذا كان $i = \sqrt{-1}$، فإن $5i(7i)$ يساوي :

**A** $70$ **B** $35$ **C** $-35$ **D** $-70$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# حل معادلات كثيرات الحدود

## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

### مجموع مكعبين والفرق بينهما

| طريقة التحليل | الحالة العامة |
|---|---|
| مجموع مكعبين | $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ |
| الفرق بين مكعبين | $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ |

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

**تحقق من فهمك :**

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

**(1A** $5y^4 - 320yz^3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**(1B** $-54w^4 - 250wz^3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تأكد:

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

**2** $16g^3 + 2h^3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

### طرائق التحليل

| عدد الحدود | طريقة التحليل | نموذج |
|---|---|---|
| أي عدد | إخراج العامل المشترك الأكبر | $4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$ |
| حدّان | الفرق بين مربعين | $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ |
| | مجموع مكعبين | $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ |
| | الفرق بين مكعبين | $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ |
| ثلاثة حدود | ثلاثية حدود المربع الكامل | $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$<br>$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ |
| | ثلاثية الحدود بالصورة العامة | $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ |
| أربعة حدود أو أكثر | تجميع الحدود | $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$<br>$= (a + b)(x + y)$ |

## تحقق من فهمك :

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

**(2A** $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

**(2B** $13ax + 18bz - 15by - 14az$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تحقق من فهمك :

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

**(3A** $a^6 + b^6$

**(3B** $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تأكد:

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

**5)** $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

**6)** $8c^3 - 125d^3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

### الصورة التربيعية

**التعبير اللفظي:** الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: $au^2+bu+c$ ، $a\neq0$ ، $a,b,c$ أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير $x$ على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف $u$ بدلالة $x$.

**مثال:** $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

## تحقق من فهمك :

حل المعادلة:

**(6A** $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$

**(6B** $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

## تأكد :

**مثال 6** حل كلًا من المعادلتين الآتيتين:

**(10** $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

**(11** $y^4 - 18y^2 + 72 = 0$

## مهارات تفكير عليا:

**68) اكتب:** وضِّح كيف يمكن أن يساعدك تمثيل دالة كثيرة حدود بيانيًّا على تحليلها؟

.....

.....

.....

## تحصيلي:

### تدريب على اختبار

**70)** إذا كان الفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{12}, k$ مساويًا للفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$، فما قيمة $k$ ؟

**A** $\frac{1}{60}$ **B** $\frac{1}{20}$ **C** $\frac{1}{15}$ **D** $\frac{13}{60}$

.....

.....

.....

# نظريتا الباقي والعوامل

## مفهوم أساسي

### نظرية الباقي

أضف إلى مطويتك

**التعبير اللفظي** إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x-r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$، وكذلك :

| المقسوم | | ناتج القسمة | | المقسوم عليه | | الباقي |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $=$ | $Q(x)$ | $\cdot$ | $(x-r)$ | $+$ | $P(r)$ |

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

**مثال** $x^2+6x+2 = (x-4)\cdot(x+10)+42$

إن عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية تسمى **التعويض التركيبي**.

## تحقق من فهمك :

**1A)** إذا كان $f(x)=3x^3-6x^2+x-11$، فأوجد $f(3)$. باستعمال التعويض التركيبي.

**1B)** إذا كان $g(x)=4x^5+2x^3+x^2-1$، فأوجد $g(-1)$. باستعمال التعويض التركيبي.

## تأكد ؛

أوجد $f(-2)$ ، مستعملًا التعويض التركيبي:

**1)** $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$

**2)** $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

| المقسوم | | ناتج القسمة | | المقسوم عليه | | الباقي |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ | $=$ | $(2x^2 - 9x + 10)$ | $\cdot$ | $(x + 3)$ | $+$ | $0$ |

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضِّح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

**مفهوم أساسي**

أضف إلى مطويتك

### نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة.

## تحقق من فهمك :

**3)** حدد ما إذا كان $x-2$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $x^3-7x^2+4x+12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى

.....

.....

.....

.....

.....

## تأكد :

**مثال 3** في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى، حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

**4)** $x^3-6x^2+11x-6;\ x-1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**5)** $x^3+x^2-16x-16;\ x+1$

.....

.....

.....

.....

.....

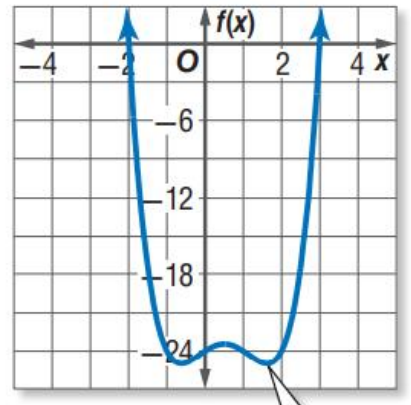
.....

.....

## تمارين ومسائل

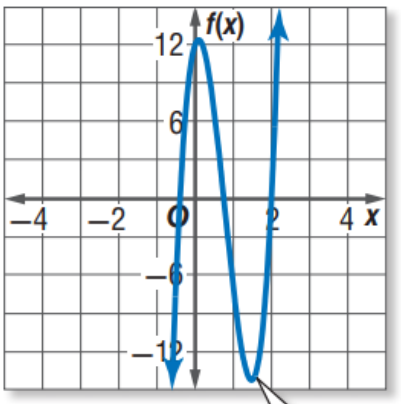
استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

(28




$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

(29




$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

## مهارات تفكير عليا:

**35) تبرير:** إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

**a)** الباقي يساوي صفرًا؟

**b)** الباقي يساوي 1؟

**c)** ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفرًا؟

.....

.....

.....

.....

# الجذور والأصفار

## ملخص المفهوم

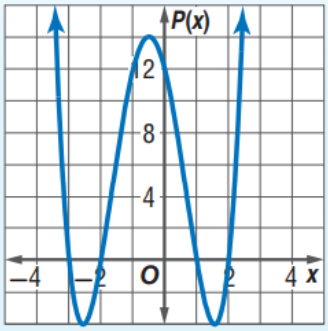
أضف إلى مطويتك

### الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

**التعبير اللفظي:** إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- $c$ صفر للدالة $P(x)$.
- $c$ جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان $c$ عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور $x$.

**مثال:** افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.




فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي: $-3, -2, 1, 2$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور $x$ هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.

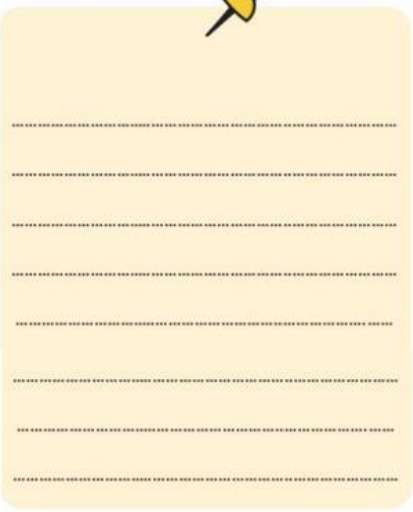
عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

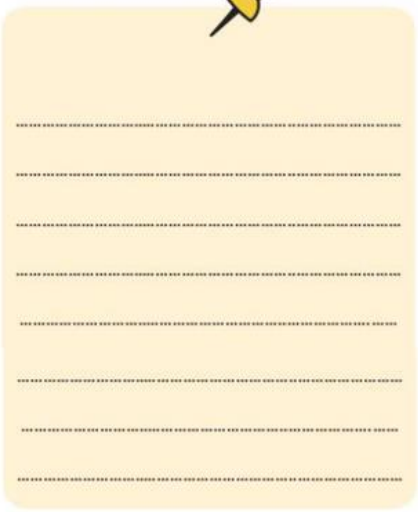
**تحقق من فهمك :** حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

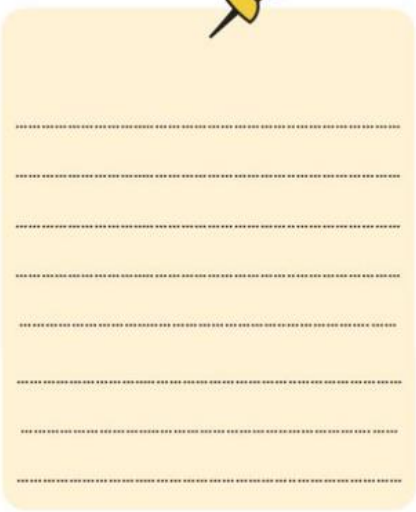
**1A** $x^3 + 2x = 0$

**1B** $x^4 - 16 = 0$

**1C** $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$







**مفهوم أساسي** — نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى مطويتك

**التعبير اللفظي:** يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة $n$ العدد $n$ فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

**مثال:**

$x^3 + 2x^2 + 6 = 0$ — 3 جذور

$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 = 0$ — 4 جذور

$-2x^5 - 3x^2 + 8 = 0$ — 5 جذور

**مفهوم أساسي** — قانون ديكارت للإشارات

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

## تحقق من فهمك :

**2)** اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة.

$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$.

## تأكد :

**مثال 2** اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي :

**5)** $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

**تأكد:**

**مثال 2** اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ دالة ممَّا يأتي :

**6)** $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**مفهوم أساسي**

أضف إلى مطويتك

**نظرية الأصفار المركبة المترافقة**

**التعبير اللفظي:** إذا كان $a$ , $b$ عددين حقيقيين ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

**مثال:** إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

**تأكد:**

**مثال 3** اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

**9)** $4, -1, 6$

**تأكد:**

**مثال 3** اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

**10)** $3, -1, 1, 2$

**تأكد:**

**مثال 3** اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

**11)** $-2, 5, -3i$

**تأكد:**

**مثال 3** اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

**12)** $-4, 4 + i$

## تأكد:

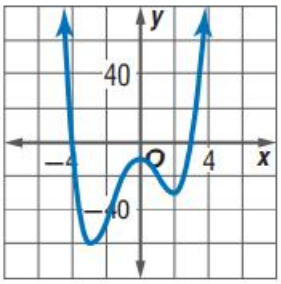
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

**a)** $-3, 4, i, -i$

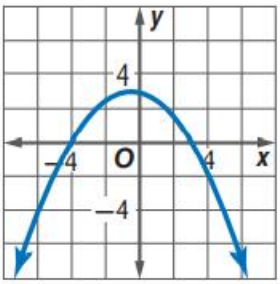
**b)** $-4, 3$

**c)** $-4, 3, i, -i$

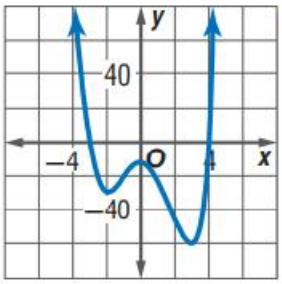
**(33**




**(34**



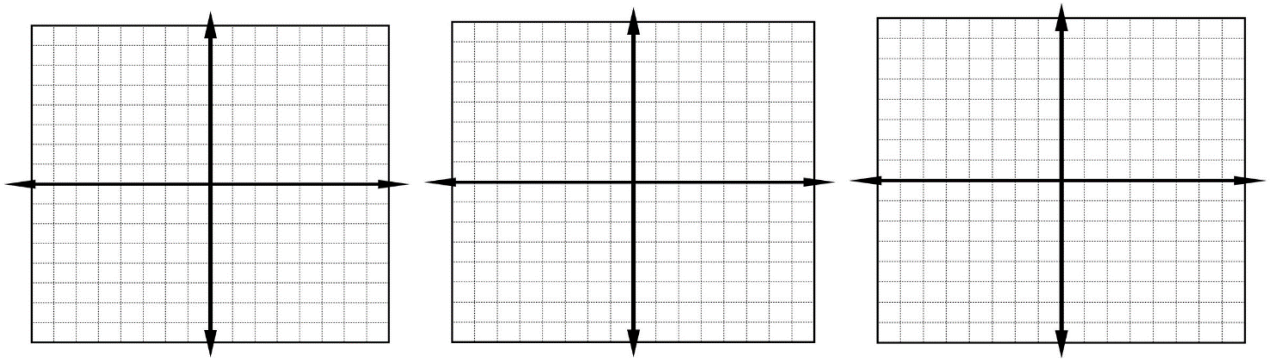

**(35**



## مهارات تفكير عليا:

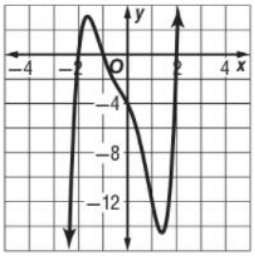
**38) مسألة مفتوحة:** في كل مما يأتي، مثِّل بيانيًّا دالة كثيرة حدود بحيث يكون لها :

**a)** 3 أصفار حقيقية وصفران تخيليان **b)** 4 أصفار حقيقية **c)** صفران تخيليان



## تحصيلي :

### تدريب على اختبار




**43)** استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟

**A** $x - 2$ **C** $x + 2$

**B** $x - 1$ **D** $x + 1$

المرجع:

رياضيات (٣)

وزارة التعليم

مجموعة العبيكان للإستثمار

المملكة العربية السعودية