



سلسلة رفعة لدفتر الرياضيات رياضيات ٣-٢

اسم الطالبة
الفصل

اسم المعلمة :

جدول الحصص اليومي

8	7	6	5	4	3	2	1	
								الأحد
								الاثنين
								الثلاثاء
								الأربعاء
								الخميس

مناجعة وتقييم الدفتر

اليوم والتاريخ	التقييم	الملاحظة

[illegible]

تهيئة الفصل الثالث

المتطابقات المثلثية

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

حل المعادلات المثلثية

- حلّ كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

$$5x^2 - 20 \quad (2)$$

$$-16a^2 + 4a \quad (1)$$

- حلّ كلّاً من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

$$x^2 + 2x - 35 = 0 \quad (7)$$

$$x^2 + 6x = 0 \quad (6)$$

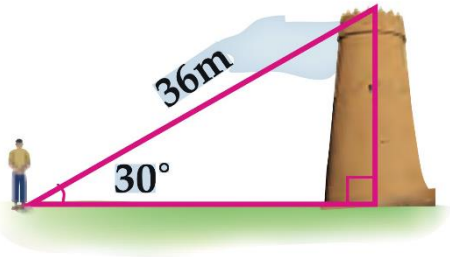
● أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:



(11) $\sin 45^\circ$



(12) $\cos 225^\circ$



● (15) **قصر المصمك**: يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



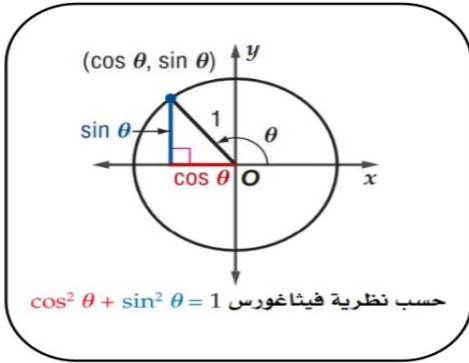
التاريخ:

الموضوع: تهيئة الفصل الثالث

المتطابقات المثلثية

الفصل الثالث

متطابقات فيثاغورس

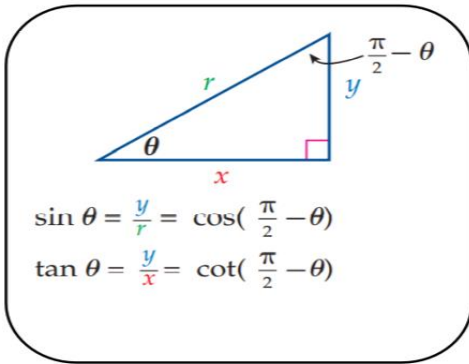


$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

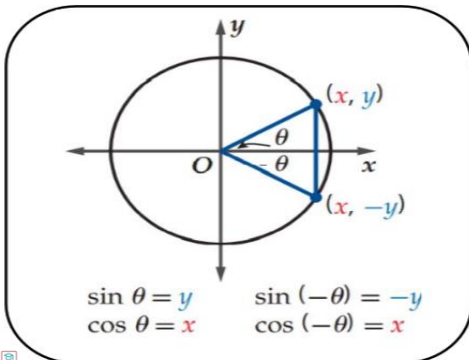


$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية



$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

المتطابقات المثلثية

متطابقات نصف الزاوية

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan\theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

متطابقات المقلوب

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$



استعمال المتطابقات المثلثية

مثال 1

تحقق من فهمك

(1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

(1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec \theta$ إذا كان $\sin \theta = -\frac{2}{7}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$

تدرب

(2) $\csc \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ،
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$

(1) $\tan \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = 2$ ،
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$



تبسيط العبارة المثلثية

مثال 2

بسّط العبارة :

تحقق من فهمك

$$\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) \quad (2B)$$

$$\frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} \quad (2A)$$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

تدرب

$$\csc \theta - \cos \theta \cot \theta \quad (18)$$

$$\sin \theta (1 + \cot^2 \theta) \quad (13)$$

إعادة كتابة الصيغ الرياضية

مثال 3 من واقع الحياة

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

تحقق من فهمك

(3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau = Fr \sin \theta$. أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

تدرب

(20) الشمس: ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يسمّى

قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص

باستعمال العلاقة $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم

الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس

بالواط لكل متر مربع، و A المساحة السطحية المعرضة لأشعة

الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

(a) حل المعادلة بالنسبة لـ W .

(b) أوجد W إذا كانت $A = 0.75$, $\theta = 40^\circ$, $e = 0.80$

$S = 1000 \text{ W/m}^2$. (قرب إلى أقرب جزء من مئة).

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

(40) إذا كان $\sin x = m$ و $0 < x < 90^\circ$ ، فما قيمة $\tan x$ ؟

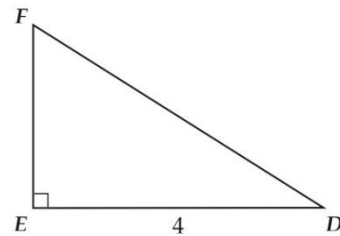
A $\frac{1}{m^2}$

B $\frac{m \sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\frac{1-m^2}{m}$

D $\frac{m}{1-m^2}$

(39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D = 0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$ ؟



C 3.2

D 10

A 5

B 4

الموضوع:

المتطابقات المثلثية

التاريخ:

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

الفصل الثالث

إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين ، وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً .

مثال

$$\text{أثبت صحة المتطابقة : } \cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$$

الحل :

$$\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta \longleftarrow \text{نبدأ من الطرف الأيسر}$$

$$= \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 1 \longleftarrow \text{ونصل إلى الطرف الأيمن}$$

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تحول كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة .

مثال

$$\text{أثبت صحة المتطابقة : } \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$$

الحل :

$$\begin{aligned} \csc^2 \theta - \cot^2 \theta &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot \theta \tan \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

بعد فك كل طرف
بشكل منفصل نصل
إلى نفس النتيجة .

اقتراحات
لإثبات صحة
المتطابقات

- **بسط** العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- **حلل** أو **اضرب** كلا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها .
- **اكتب** كل طرف بدلالة كل من الجيب وجيب التمام فقط ثم بسط كل طرف قدر المستطاع.
- **لا تنفذ** أي عملية (جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة ، لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

التاريخ:

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

الموضوع:



إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

مثال 1

أثبت أن المعادلة

تحقق من فهمك

$$(1) \cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$$

تدرب

$$(7) \tan \theta = \frac{\sec \theta}{\csc \theta}$$

$$(1) \cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$$

مثال 2 على اختبار

تحقق من فهمك

(2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2 \theta (\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)$ ؟

C $\cos^2 \theta$

A $\cot^2 \theta$

D $\sin^2 \theta$

B $\tan^2 \theta$

تدرب

(11) اختيار من متعدد: أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta}$ ؟

(مثال 2) D

C $\cos^2 \theta$

A $\sin^2 \theta$

D $\csc^2 \theta$

B $\tan^2 \theta$

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

مثال 3

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

تحقق من فهمك

$$(3) \quad \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

تدرب

$$(21) \quad \sec \theta - \cos \theta = \tan \theta \sin \theta$$

$$(13) \quad \frac{1 + \tan \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \sec \theta$$

بسّط كلّاً من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو -1 :

$$(28) \quad \sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$$

$$(27) \quad \sin \theta \csc(-\theta)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

57) سؤال ذو إجابة قصيرة: أثبت أن المعادلة التالية تمثل متطابقة:

$$\sin^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$$

56) اختيار من متعدد: أي مما يأتي لا يكافئ $\cos \theta$ ،

حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟ **D**

A $\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$

C $\cot \theta \sin \theta$

B $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$

D $\tan \theta \csc \theta$

التاريخ:

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

الموضوع:

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

الفصل الثالث

متطابقات المجموع

1 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

2 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 105^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

3 $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 105^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - (\sqrt{3})(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3}}{1 - 3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} \\ &= -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

الفصل الثالث

متطابقات الفرق

1 $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 15^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

3 $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 120^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\tan 120^\circ &= \tan(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \tan 60^\circ} \\ &= \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + (0)(\sqrt{3})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{-\sqrt{3}}{1} \\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:



إيجاد القيم المثلثية

مثال 1

تحقق من فهمك

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\cos (-15^{\circ}) \quad (1B)$$

$$\sin 15^{\circ} \quad (1A)$$

تدرب

$$\sin 135^{\circ} \quad (5)$$

$$\cos 75^{\circ} \quad (3)$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

استعمال متطابقات المجموع والفرق

مثال 2 من واقع الحياة

تحقق من فهمك إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285^\circ t$ ، فأجب عما يأتي:

(2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

(2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

تدرب

(9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا

التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120^\circ t)$. (مثال 2)

(a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

(b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3

تحقق من فهمك أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \quad (3B)$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad (3A)$$

تدرب

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \quad (14)$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta \quad (10)$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان $\cos \theta + 0.3 = 0$ فما القيمة الدقيقة لـ $\cot \theta$ ؟

حيث $\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot \theta$.

(43)

ما القيمة الدقيقة للعبارة:

$$\sin \theta \cos (60^\circ + \theta) - \cos \theta \sin (60^\circ + \theta) \text{ ؟}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{C}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{D}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{A}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{B}$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{-1}{3}$
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$

مثال

الحل :

θ تقع في الربع الثاني

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ثانياً، نوجد $\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \left(\frac{-1}{3} \right) \\ = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

أولاً، نوجد $\sin \theta$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^2$$

$$\sin^2 \theta = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ ، إذا كان $\tan \theta = -3$
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$

مثال

الحل :

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2(-3)}{1 - (-3)^2}$$

$$= \frac{-6}{-8}$$

$$= \frac{3}{4}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

$\cos 2\theta$

1

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{9} - \frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

2

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{-1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 2 \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left(\frac{1}{9}\right) - 1 \\ &= \frac{-7}{9} \end{aligned}$$

3

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - 2 \left(\frac{16}{25}\right) \\ &= \frac{-7}{25} \end{aligned}$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$
 $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} \end{aligned}$$

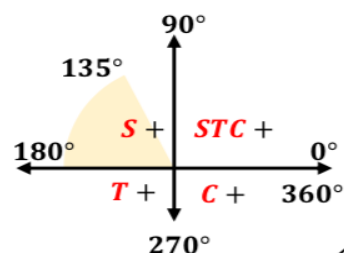
$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

إنطاق المقام :

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

تقع في الربع الثاني

$\sin \frac{\theta}{2}$ موجبة



$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$
 $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} \end{aligned}$$

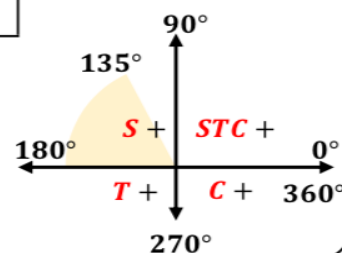
$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

إنطاق المقام :

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

تقع في الربع الثاني

$\cos \frac{\theta}{2}$ سالبة



الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

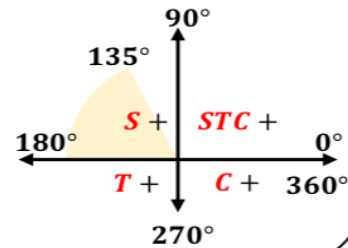
الحل :

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني
 $\tan \frac{\theta}{2}$ سالبة



إثبات صحة المتطابقات

نستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما وكذلك المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات .

أثبت صحة المتطابقة :

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

الحل :

$$\begin{aligned} &\text{الطرف الأيمن} \\ &\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\ &= \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$= \tan \theta$$

الطرف الأيسر

مثال



المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 1

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

تدرب

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ،

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}$; $0^\circ < \theta < 90^\circ$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 2

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي علمًا بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$; $\cos \theta = -\frac{1}{3}$:

$\tan 2\theta$ (2B

$\cos 2\theta$ (2A

تدرب

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$,

$\cos \theta = \frac{4}{5}; 0^\circ < \theta < 90^\circ$ (21



المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مثال 3

تحقق من فهمك

(3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، تقع في الربع الثاني.

تدرب

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin \frac{\theta}{2}$ ، $\cos \frac{\theta}{2}$
(3) $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 4 من واقع الحياة

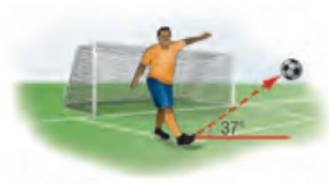
تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتيمتر لكل ثانية تربيع) تقريباً بالصيغة:
 $g = 978 + 5.17 \sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$ ، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

(4A) بسّط هذه العلاقة مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

(4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة g عندما $L = 45^\circ$.

تدرب



(13) كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم

كرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52 ft/s . إذا كانت

المسافة الأفقية d التي تقطعها

الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$ ، حيث g تسارع

الجاذبية الأرضية ويساوي 32 ft/s^2 ، و v تمثل السرعة الابتدائية

(a) بسّط الصيغة مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

(b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة

المبسطة؟

الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

إثبات صحة المتطابقات

مثال 5

تحقق من فهمك أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

$$(5) \quad 4 \cos^2 x - \sin^2 2x = 4 \cos^4 x$$

تدرب

$$(14) \quad \tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

(43) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $0 < \theta < 90^\circ$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C**

$2 - \sqrt{3}$ **A**

$\sqrt{3}$ **D**

$\sqrt{3} - 2$ **B**

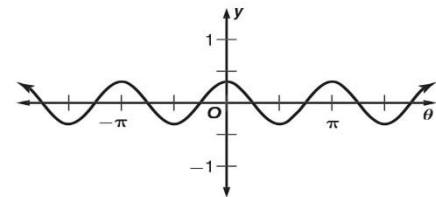
(44) معادلة الدالة الممثلة بيانيًا في الشكل أدناه هي

$y = 3 \cos \frac{1}{2} \theta$ **C**

$y = 3 \cos 2\theta$ **A**

$y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2} \theta$ **D**

$y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$ **B**



الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

حل المعادلات المثلثية

المعادلات المثلثية

هي معادلات تتضمن دوالاً مثلثية وتكون صحيحة عند قيم محددة للمتغير.

حل المعادلات على فترة معطاة

حل المعادلة:

$$\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ; 0^\circ \leq \theta \leq 240^\circ$$

مثال

الحل:

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

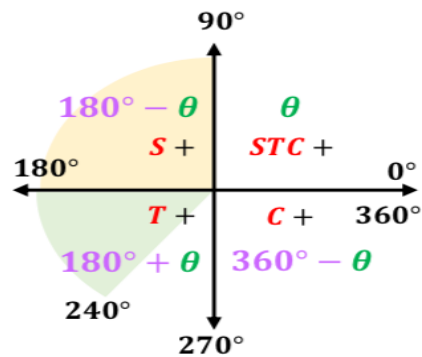
cos سالبة

$$\theta = 30^\circ$$

نوجد الزوايا
في الفترة من خلال
الزوايا المرجعية

الزوايا θ تقع في
الربع الثاني والربع الثالث

نعوض بالزوايا المرجعية
في الفترات المحددة



إذن:

حل المعادلة:

$$150^\circ, 210^\circ$$

الربع الثالث

$$180^\circ + \theta$$

$$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

الربع الثاني

$$180^\circ - \theta$$

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

حل المعادلات المثلثية

المعادلات المثلثية بدون فترة محددة

تحل المعادلات المثلثية عادة ، لقيم المتغير في الفترة $[0, 2\pi]$ بالراديان أو $[0^\circ, 360^\circ]$ بالدرجات . كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة لذلك فالحلول تختلف باختلاف الفترات .

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حل المعادلة $2 \sin \theta = -1$ لقيم θ جميعها
إذا كان قياس θ بالراديان .

مثال

الحل :

$$\frac{2 \sin \theta}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

sin سالبة

$$\theta = 30^\circ$$

نوجد الزوايا

في الفترة من خلال
الزوايا المرجعية

ولأنها بدون فترة
فلها عدد لا نهائي
من الحلول
وتكتب بالقاعدة :

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

إذن الزاوية θ تقع في
الربع الثالث والربع الرابع
نعوض بالزوايا المرجعية
في الفترات المحددة

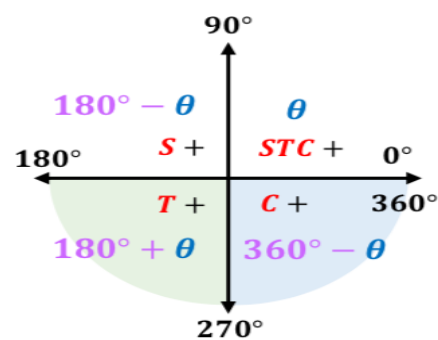
الربع الرابع

$$360^\circ - \theta$$

$$360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

نحولها لـ الراديان

$$330^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6}$$



الربع الثالث

$$180^\circ + \theta$$

$$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

نحولها لـ الراديان

$$210^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$$

حل المعادلات المثلثية

الحلول الدخيلة

بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل مثل المعادلة: $\cos \theta = 4$ ليس لها حل ، لأن قيم $\cos \theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$.
كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولاً لا تحقق المعادلات الأصلية ، وتسمى مثل هذه الحلول حلولاً دخيلة .

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حل المعادلة: $\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$

الحل :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 4 - 3$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

متطابقة

لها عدد لا نهائي من الحلول

لأن جميع قيم θ تمثل حلولاً لها.

مثال

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات

$$\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0$$

الحل :

$$\sin \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \cos^2 \theta = 0$$

$$\cos \theta - \cos^2 \theta = 0$$

$$\cos \theta (1 - \cos \theta) = 0$$

$$1 - \cos \theta = 0 \text{ أو } \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ, 270^\circ \text{ إذن}$$

$$1 - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 1$$

$$\theta = 0^\circ, 360^\circ \text{ إذن}$$

وكلاهما حلان

دخيلان ، لأن $\cot \theta$

عندها غير معرفة .

حل المعادلة :

$$90^\circ + 180^\circ k$$

مثال



حل المعادلات على فترة معطاة

مثال 1

تحقق من فهمك حل كل معادلة مما يأتي

(1A) حُلّ المعادلة $\cos x \sin x = 3 \cos x$ ، إذا كانت $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(1B) $\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = 4$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها :

تدرب

(1) $\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 0 ; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$



معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

مثال 2

تحقق من فهمك

(2A) حُلّ المعادلة $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$

(2B) حُلّ المعادلة $2 \sin \theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

تدرب

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات:

(12) $\cos \theta - 2 \cos \theta \sin \theta = 0$

(11) $2 \sin^2 \theta - 1 = 0$

حل معادلات مثلثية

مثال 3 من واقع الحياة

تحقق من فهمك الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

(3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

مثال 4

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي:

$$(4) \cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$$

تدرب

حل كل معادلة مما يأتي:

$$(15) \sin 2\theta - \cos \theta = 0 \text{ لجميع قيم } \theta$$

$$(18) 2 \sin^2 \theta = 1; 90^\circ < \theta < 270^\circ$$

مثال 5

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

$$\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0 \quad (5B)$$

$$\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0 \quad (5A)$$

تدرب

حل كل معادلة مما يأتي:

$$\tan \theta - \sin \theta = 0 \quad (21) \text{ لجميع قيم } \theta$$

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

(47) أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة $\sin \theta + \cos \theta \tan^2 \theta = 0$ ؟

- A** $\frac{5\pi}{2}$ **B** $\frac{7\pi}{4}$ **C** 2π **D** $\frac{3\pi}{4}$

(48) ما حل المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0^\circ < x < 360^\circ$ ؟

A 150° أو 30° **C** 330° أو 210°

B 120° أو 60° **D** 300° أو 240°

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات المثلثية

التهيئة للفصل الرابع

القطوع المكافئة

القطوع الناقصة والدوائر

القطوع الزائدة

تحديد أنواع القطوع المخروطية

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

$$f(x) = x^2 + 2x + 6 \quad (2)$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 12 \quad (1)$$

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 3 \quad (4)$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 8 \quad (3)$$

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 9 \quad (9)$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3 \quad (8)$$

$$f(x) = 3x^2 - 8x - 3 \quad (11)$$

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \quad (10)$$

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 11 \quad (13)$$

$$f(x) = 4x^2 - 3x - 7 \quad (12)$$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

$$x^2 - 18x \quad (15)$$

$$x^2 + 8x \quad (14)$$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانًا:

$$f(x) = \frac{1}{2x + 1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{1}{(x + 2)} \quad (16)$$

الموضوع: التهيئة للفصل الرابع

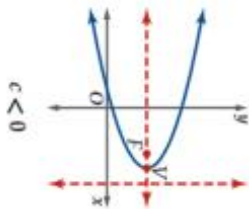
التاريخ:

القطوع المكافئة

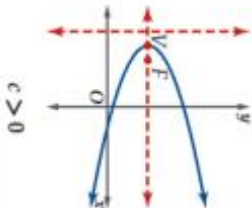
القطوع مفتوح أفقيًا

$$(y - k)^2 = 4c(x - h) \quad \text{الصورة القياسية}$$

مفتوح لليسار



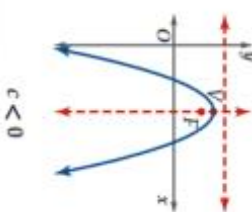
مفتوح لليمين



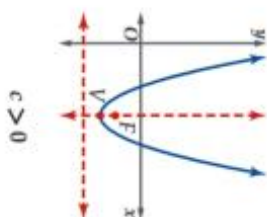
القطوع مفتوح رأسيًا

$$(x - h)^2 = 4c(y - k) \quad \text{الصورة القياسية}$$

مفتوح للأسفل



مفتوح للأعلى





تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًا

مثال 1

تحقق من فهمك

$$2(x + 6) = (y + 1)^2 \quad (1B)$$

$$8(y + 3) = (x - 4)^2 \quad (1A)$$

تدرب

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثمّ مثل
منحناه بيانيًا: (مثال 1)

$$(x + 1)^2 = -12(y - 6) \quad (2)$$

$$(x - 3)^2 = 12(y - 7) \quad (1)$$

خصائص القطع المكافئ

مثال 2 من واقع الحياة

تحقق من فهمك

(2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y - 6)$ ، حيث $-5 \leq x \leq 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

تدرب

(7) **لوح تزئج:** صمّم بدر لوح تزئج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y - 2)$ ، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)



كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

مثال 3

تحقق من فهمك

$$3y^2 + 6y + 15 = 12x \quad (3B)$$

$$x^2 - 4y + 3 = 7 \quad (3A)$$

تدرب

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدّد خصائصه ومثّل منحناه بيانيًا: (مثال 3)

$$y^2 + 33 = -8x - 23 \quad (10)$$

$$x^2 - 17 = 8y + 39 \quad (9)$$

مثال 4

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

تحقق من فهمك

(4B) الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$ (4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$ (4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين ويمر بالنقطة $(8, -7)$.(4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

تدرب

(16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

مثال 5

تحقق من فهمك

$$x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4) \quad (5B)$$

$$(y = 4x^2 + 4; (-1, 8) \quad (5A)$$

تدرب

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة:
(مثال 5)

$$y^2 = \frac{1}{5}(x - 4); (24, 2) \quad (25)$$

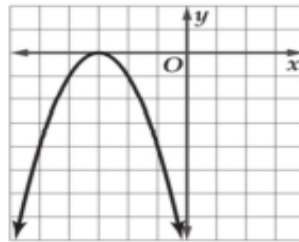
$$(x + 7)^2 = -\frac{1}{2}(y - 3); (-5, -5) \quad (24)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

(49) إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

$\sqrt{x^5}$ D $x^{\frac{3}{4}}$ C $\sqrt{x^3}$ B $x^{-\frac{1}{4}}$ A



(50) ما الدالة الرئيسية (الأم) للدالة الموضحة منحنىها جانبياً؟

- $y = x$ A
 $y = |x|$ B
 $y = \sqrt{x}$ C
 $y = x^2$ D

الموضوع: القطوع المكافئة

التاريخ:

القطع الناقص والزائد

القطع الزائد

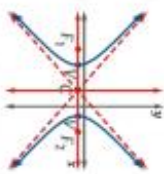
مفتوح رأسيًا

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



مفتوح أفقيًا

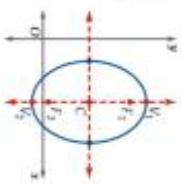
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



القطع الناقص

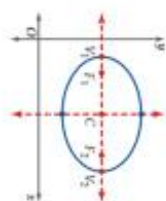
مفتوح رأسيًا

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



مفتوح أفقيًا

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



التاريخ:

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر



تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانياً

مثال 1

تحقق من فهمك

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0 \quad (1B)$$

$$\frac{(x - 6)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1 \quad (1A)$$

تدرب

$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1 \quad (1)$$

التاريخ:

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر



كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلِّمت بعض خصائصه

مثال 2

تحقق من فهمك

(2A) البؤرتان $(-7, 3)$ ، $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

(2B) الرأسان $(-2, 8)$ ، $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

تدرب

(5) الرأسان $(13, -3)$ ، $(-7, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3)$ ، $(-5, -3)$

مثال 3

تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك

$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1 \quad (3B)$$

$$\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1 \quad (3A)$$

تدرب

$$\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1 \quad (10)$$

استعمال الاختلاف المركزي

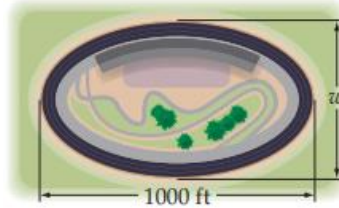
مثال 4 من واقع الحياة

تحقق من فهمك

(4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

تدرب

(14) سباق: يوضح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4)



- (a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟
 (b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

التاريخ:

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر

كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

مثال 5

تحقق من فهمك

5B) المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10

5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3

تدرب

15) المركز $(3, 0)$ ، ونصف القطر 2.

كتابة معادلة دائرة طرفاً قطر فيها معلومان

مثال 6

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفاً قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

تدرب

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفاً قطر فيها في كل مما يأتي:

18) $(2, 1)$, $(2, -4)$

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

(53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M ، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

(54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعاد اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$ **B** $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$ **C** $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$ **D** $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر

التاريخ:

تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

مثال 1

تحقق من فهمك

$$\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1 \quad (1B)$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \quad (1A)$$

تدرب

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1 \quad (1)$$



كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

مثال 2

تحقق من فهمك

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68 \quad (2A)$$

$$2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0 \quad (2B)$$

تدرب

$$-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28 \quad (9)$$

مثال 3

كتابة معادلة قطع زائد إذا علم بعض خصائصه

تحقق من فهمك

3A الرأسان $(3, 2)$ ، $(3, 6)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B البؤرتان $(2, -2)$ ، $(12, -2)$ ، وخطا التقارب $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$ ، $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$.

تدرب

20 هندسة معمارية: يبين الشكل

المجاور مخطط أرضية مكتب.

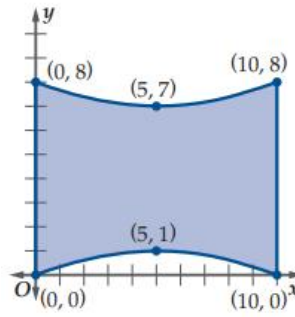
(a) اكتب معادلة تمثيل فرعي المنحنى في الشكل.

(b) إذا كانت كل وحدة في

المستوى الإحداثي تمثل

15 ft، فما أقصر عرض

لأرضية المكتب؟ (مثال 3)



الاختلاف المركزي للقطع الزائد

مثال 4

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك

$$\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1 \quad (4B)$$

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1 \quad (4A)$$

تدرب

$$\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1 \quad (21)$$

تطبيقات على القطع الزائد

مثال 5 من واقع الحياة

تحقق من فهمك

(5) **ملاحة بحرية:** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلاً بحرياً .

(5A) إذا كان موقع المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(100, 0)$, $(-100, 0)$.

(5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثيها $(100, 0)$.

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

(47) مراجعة: يمثل منحنى $1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2$ قطعاً زائداً. ما معادلتا

خطي تقارب هذا المنحنى؟

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

(48) سؤال ذو إجابة قصيرة: أوجد معادلتَي خطي التقارب للقطع

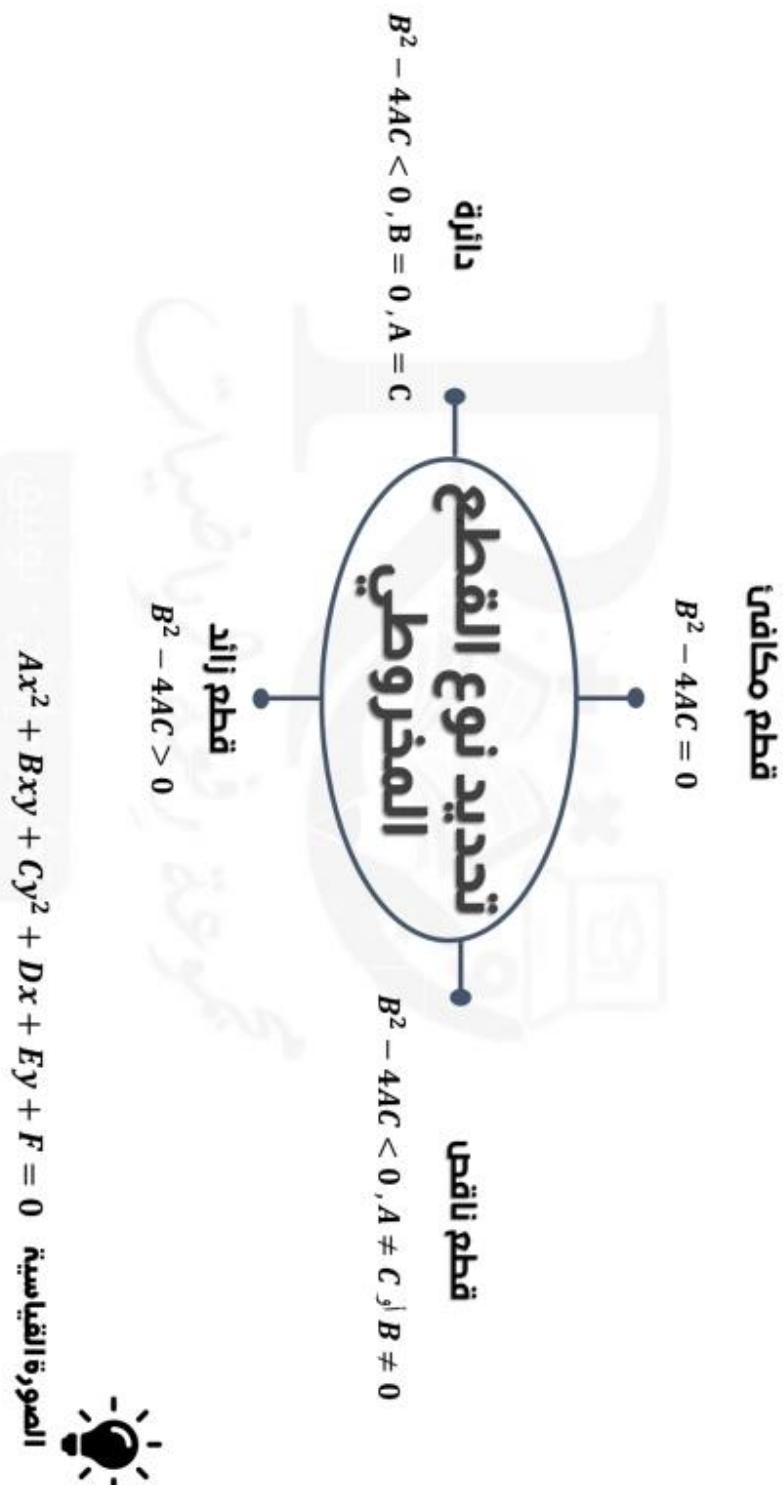
الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1}$.

الموضوع: القطوع الزائدة

التاريخ:

الموضوع: تحديد أنواع القطوع المخروطية

التاريخ:



كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

مثال 1

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

تدرب

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

$$1) x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$$

التاريخ:

الموضوع: تحديد أنواع القطوع المخروطية

تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

مثال 2

تحقق من فهمك

$$8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0 \text{ (2A)}$$

$$3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0 \text{ (2B)}$$

$$3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0 \text{ (2C)}$$

تدرب

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصّورة القياسية.

$$(5) \quad 4x^2 - 5y = 9x - 12$$

$$(6) \quad 5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$$

$$(7) \quad 8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$$

التاريخ:

الموضوع: تحديد أنواع القطوع المخروطية

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

حلّ كل معادلة من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 4-2)

$$\log_4 8n + \log_4 (n - 1) = 2 \quad (29)$$

31 سؤال ذو إجابة قصيرة: حدّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثّل قطعاً مكافئاً أو دائرة أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً، دون كتابتها على الصورة القياسية.

التاريخ:

الموضوع: تحديد أنواع القطوع المخروطية

المتجهات

التهيئة للفصل الأول

مقدمة في المتجهات

المتجهات في المستوى الإحداثي

الضرب الداخلي

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثي نقطة

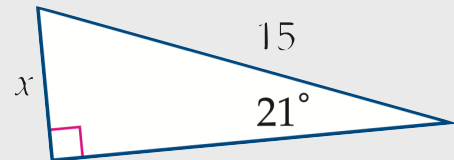
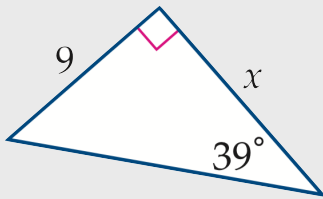
(2) $(-5, 3), (-5, 8)$

(1) $(1, 4), (-2, 4)$

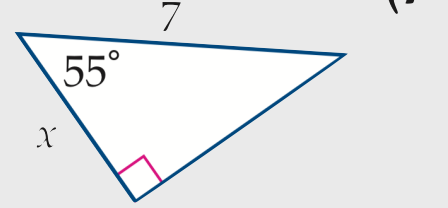
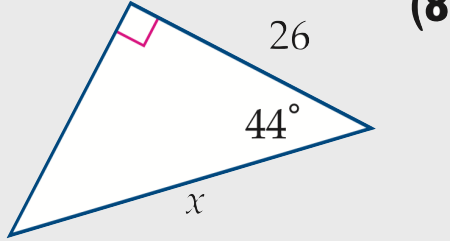
(4) $(-4, -1), (-6, -8)$

(3) $(2, -9), (-3, -7)$

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.



● أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.



● أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن

(11) $a = 15, b = 16, A = 127^\circ$

(10) $a = 10, b = 7, A = 128^\circ$

(12) $a = 15, b = 18, A = 52^\circ$

الموضوع:

مقدمة في المتجهات

التاريخ:

تحقق من فهمك:

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلّ مما يأتي:

(1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h

(1B) هبوط مظليّ رأسياً إلى أسفل

، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي .

، بسرعة 12.5 mi / h .

(1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

تدرب:

(1) طول محمد 125 cm .

(3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب.

التاريخ:

مقدمة في المتجهات

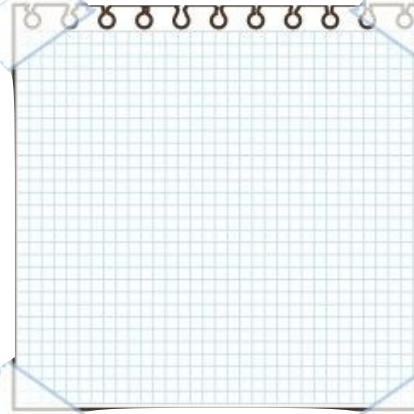
الموضوع:

تحقق من فهمك: استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكل من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

(2B) $u = 15 \text{ mi/h}$ ، باتجاه $S 25^\circ E$.



(2A) $t = 20 \text{ ft/s}$ ، باتجاه 065° .

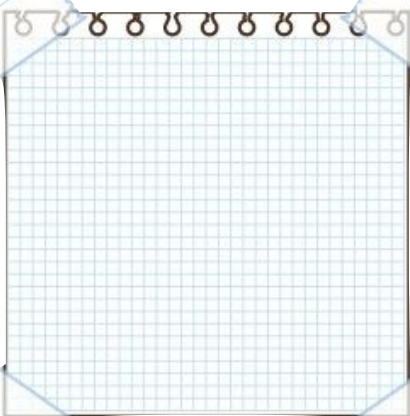


(2C) $m = 60 \text{ N}$ ، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي .

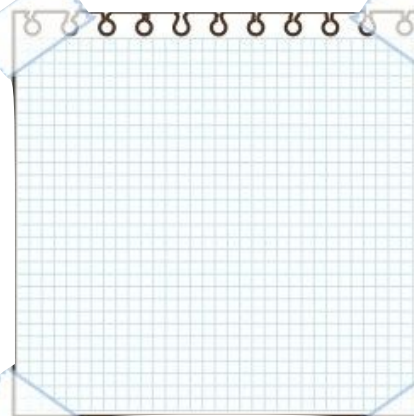


تدرب:

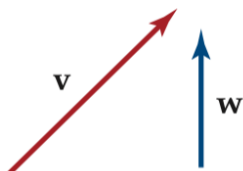
(8) $g = 6 \text{ km/h}$ ، باتجاه $N 70^\circ W$.



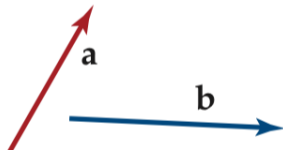
(7) $h = 13 \text{ in/s}$ ، باتجاه 205° .



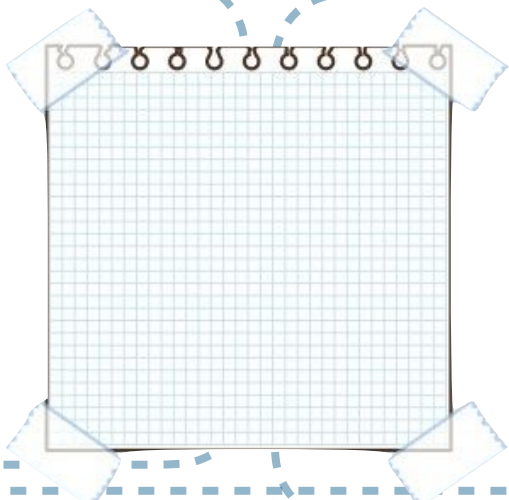
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.



(3A)

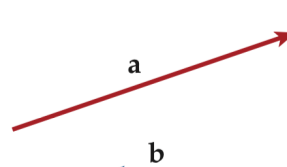


(3B)

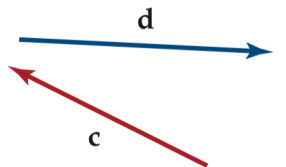


(3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرة صغيرة في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة 7 in/s ، باتجاه 310° ، فارتدت باتجاه 055° ، وبسرعة 4 in/s . أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها. (قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)

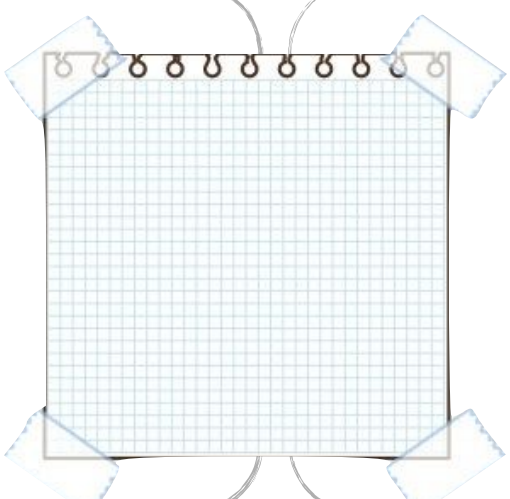
تدرب:



(13)



(14)



التاريخ:

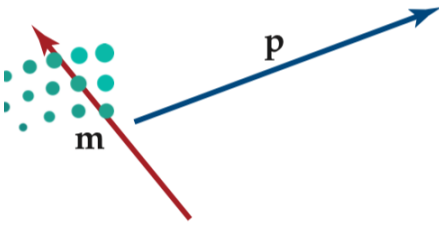
مقدمة في المتجهات

الموضوع:

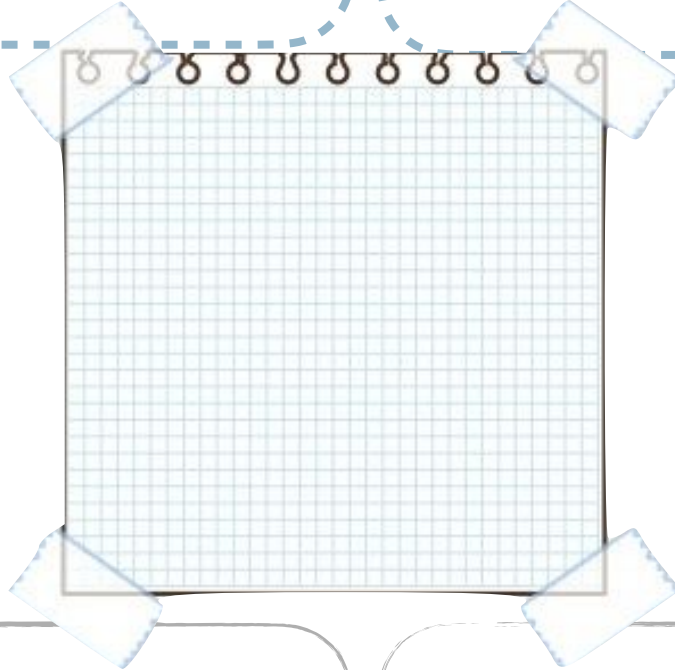
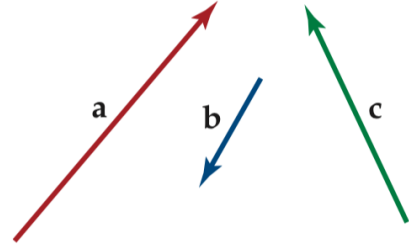
ارسم المتجه الذي يُمثّل كلّاً مما يأتي :

تحقق من فهمك:

$$m - \frac{1}{4}p \quad (4B)$$

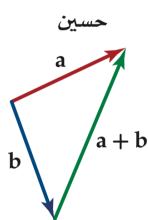
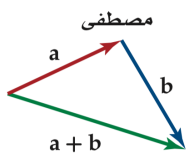


$$a - c + 2b \quad (4A)$$

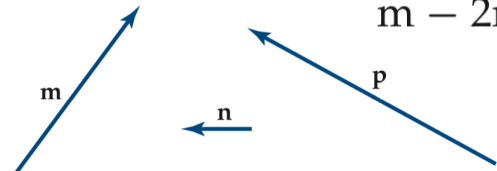


تدرب:

(43) **اكتشف الخطأ:** حاول كلّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين a, b . أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.



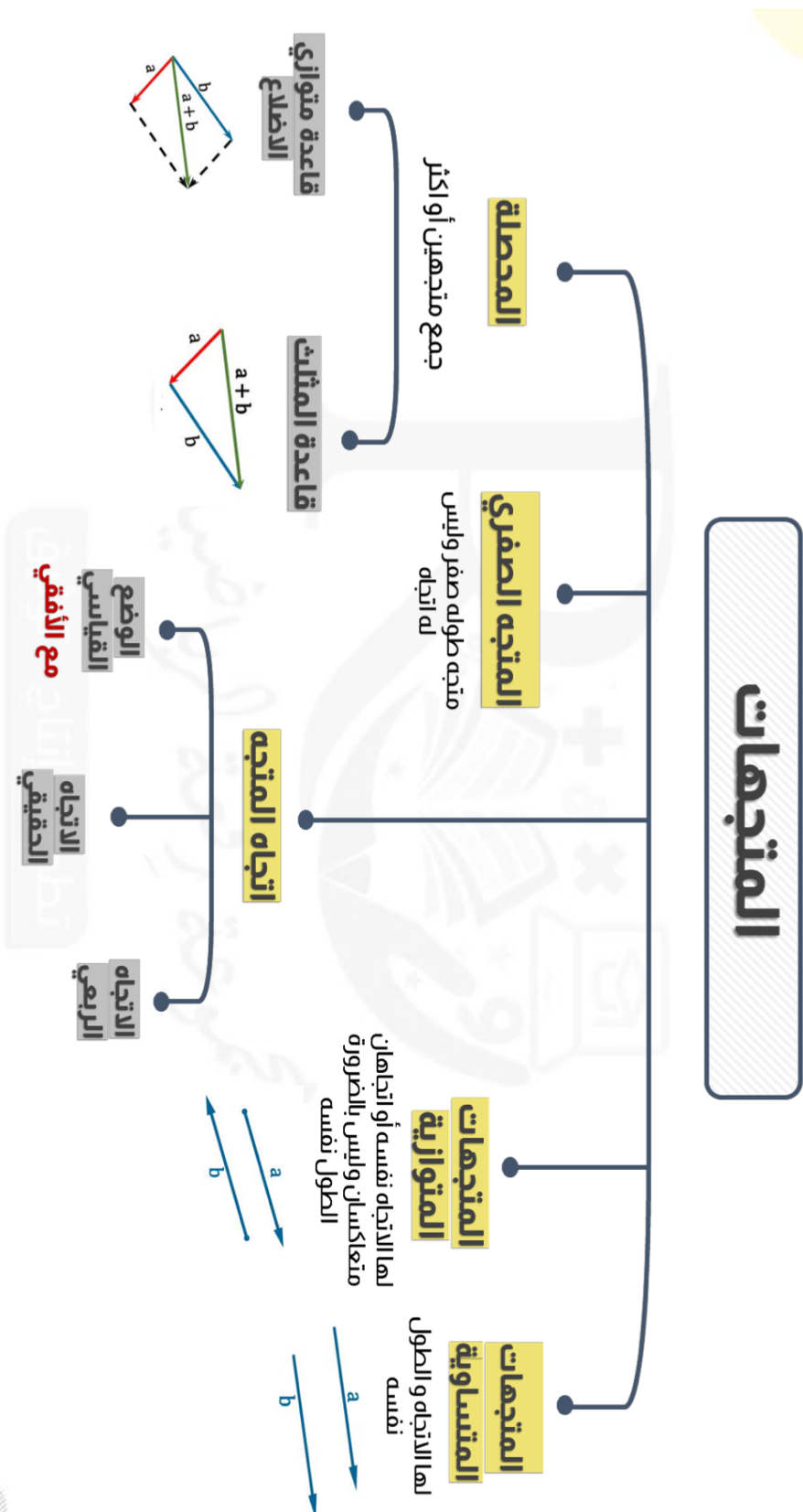
$$m - 2n \quad (22)$$



الموضوع:

مقدمة في المتجهات

التاريخ:



الموضوع:

المتجهات في المستوى الإحداثي

التاريخ:

تحقق من فهمك: أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$A(0, 8), B(-9, -3)$ (1B

$A(-2, -7), B(6, 1)$ (1A

$A(0, 8), B(-9, -3)$ (2B

$A(-2, -7), B(6, 1)$ (2A

تدرب:

$A(2, -7), B(-6, 9)$ (2

$A(-3, 1), B(4, 5)$ (1

التاريخ:

الموضوع: المتجهات في المستوى الإحداثي

تحقق من فهمك:

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

$-3\mathbf{c}$ (3B)

$4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ (3A)

$2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (3C)

تدرب:

إذا كان: $\mathbf{f} = \langle 8, 0 \rangle$, $\mathbf{g} = \langle -3, -5 \rangle$, $\mathbf{h} = \langle -6, 2 \rangle$ ، فأوجد

$\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$ (8)

$4\mathbf{h} - \mathbf{g}$ (7)

التاريخ:

الموضوع: المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلِّ ممَّا يأتي:

تحقق من فهمك:

$$\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle \quad (4B)$$

$$\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle \quad (4A)$$

$$\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle \quad (14)$$

$$\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle \quad (13)$$

تدرب

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلِّ ممَّا يأتي:

تحقق من فهمك:

$$D(-3, -8), E(7, 1) \quad (5B)$$

$$D(-6, 0), E(2, 5) \quad (5A)$$

التاريخ:

الموضوع: المتجهات في المستوى الإحداثي

تدرب:

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلِّ ممَّا يأتي :

$D(9, -6), E(-7, 2)$ (20)

$D(4, -1), E(5, -7)$ (19)

تحقق من فهمك: أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلِّ ممَّا يأتي :

$|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210^\circ$ (6B)

$|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45^\circ$ (6A)

تدرب

$|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330^\circ$ (26)

$|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60^\circ$ (25)

التاريخ:

الموضوع: المتجهات في المستوى الإحداثي

تحقق من فهمك: أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x .

$\langle -3, -8 \rangle$ (7B)

$-6i + 2j$ (7A)

تدرب

$-2i + 5j$ (30)

$3i + 6j$ (29)

تحقق من فهمك:

(8) كرة قدم: أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/s

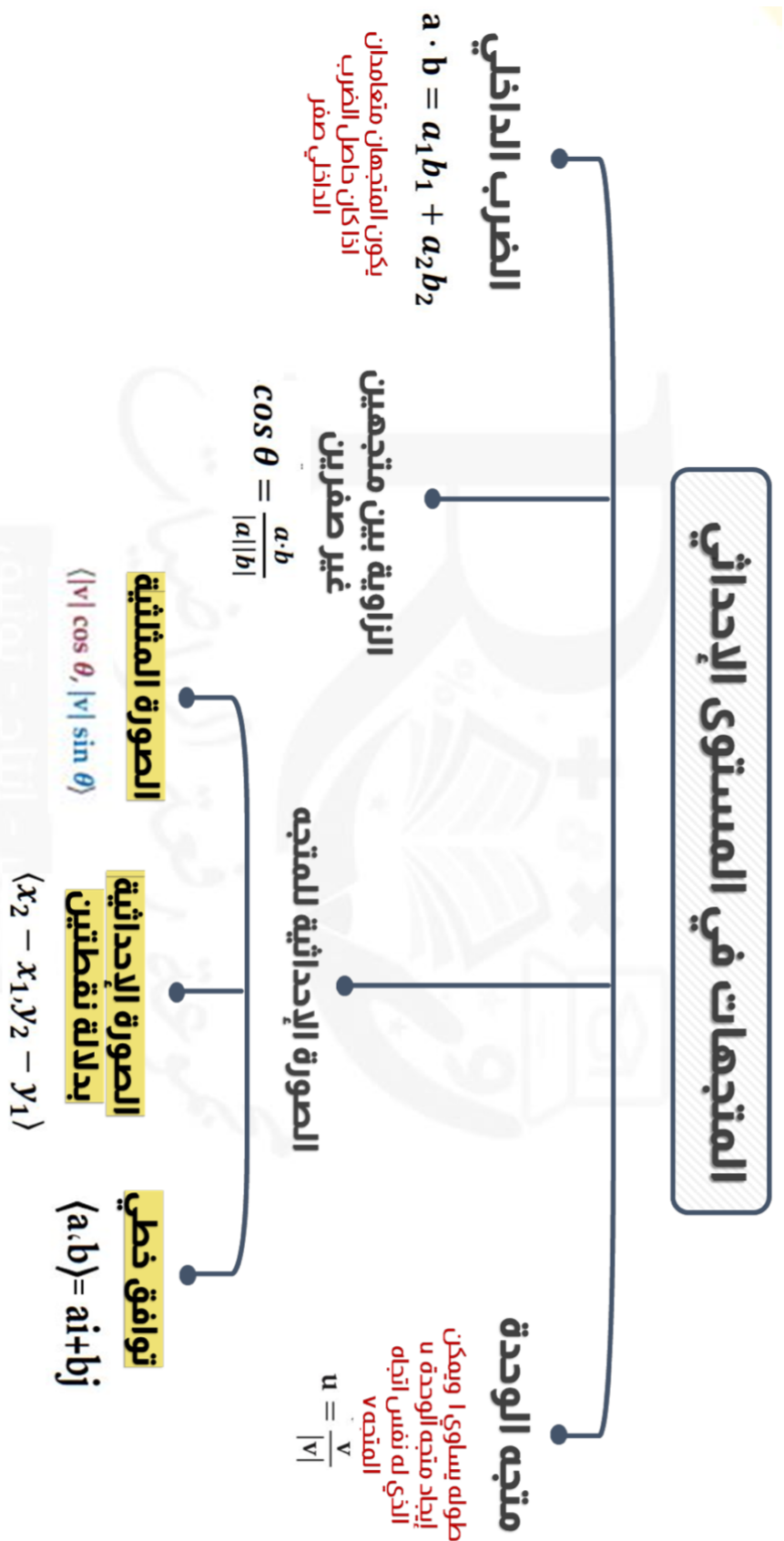
مهارات التفكير العليا:

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$ ، ونقطة نهايته $(-3, -4)$ ؟

$\sqrt{2}$ A $\sqrt{82}$ C

$\sqrt{106}$ D $\sqrt{26}$ B

43) **تبرير:** إذا كان a, b متجهين متوازيين، فعبر عن كل من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيناً العلاقة بين a, b .



تحقق من فهمك: أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

$$u = \langle -2, -3 \rangle, v = \langle 9, -6 \rangle \quad (1B)$$

$$u = \langle 3, -2 \rangle, v = \langle -5, 1 \rangle \quad (1A)$$

تدرب:

$$u = \langle 9, -3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle \quad (2)$$

$$u = \langle 3, -5 \rangle, v = \langle 6, 2 \rangle \quad (1)$$

تحقق من فهمك: استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية :

$$c = \langle -1, -7 \rangle \quad (2B)$$

$$b = \langle 12, 16 \rangle \quad (2A)$$

تدرب:

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى.

$$\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle \quad (8)$$

$$\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle \quad (7)$$

تحقق من فهمك: أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

$$\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle \quad (3B)$$

$$\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle \quad (3A)$$

تدرب

$$\mathbf{u} = \langle 7, 10 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4 \rangle \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle \quad (11)$$

تحقق من فهمك:

- 4 **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟

مهارات التفكير العليا:

- 33 **اكتشف الخطأ:** يدرس كلٌّ من فهد وفصيل خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ ، ولكن فصيل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضّح إجابتك.

- 46 إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$, $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$ ، فأَيُّ مما يأتي يمثل $\mathbf{r}$ ، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟

- A** $\langle 14, 8 \rangle$ **C** $\langle -14, 8 \rangle$
B $\langle 14, 6 \rangle$ **D** $\langle -14, -8 \rangle$

المتجهات في المستوى الإحداثي

الضرب الداخلي

$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$

يكون المتجهان متعامدان إذا كان حاصل الضرب الداخلي صفر

الزاوية بين متجهين غير صفريين

$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$

الصورة المثلثية

$\langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$

الصورة الإحداثية للمتجه

الصورة الإحداثية

بدلالة نقطتين

$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

توافق خطي

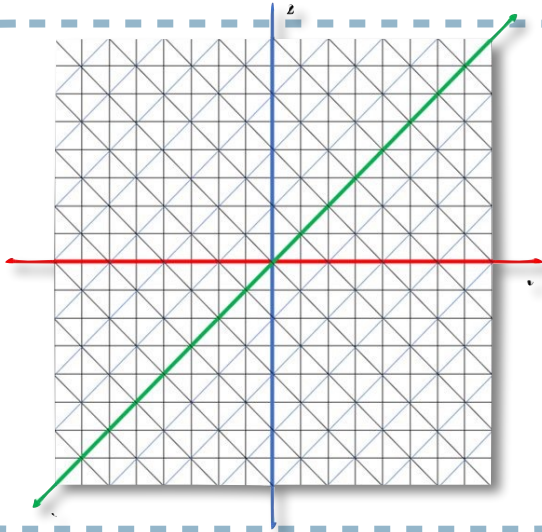
$\langle a, b \rangle = ai + bj$

متجه الوحدة

طوله يساوي 1 ويمكن إيجاد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه v

$u = \frac{v}{|v|}$

تحقق من فهمك: عيّن كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

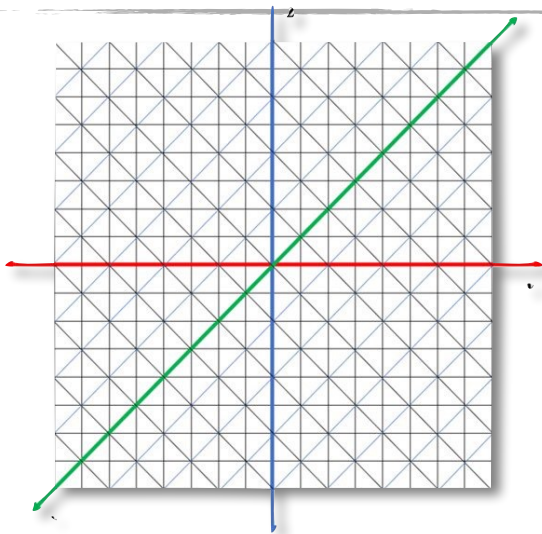


1A $(-3, -4, 2)$

1B $(3, 2, -3)$

1C $(5, -4, -1)$

تدرب



1 $(1, -2, -4)$

2 $(3, 2, 1)$

تحقق من فهمك:

2 طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن

طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين: $(450, -250, 28000)$ ، $(300, 150, 30000)$ ، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

وزارة التعليم

Ministry of Education
1 - 1443

A هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B إذا أطلقت ألعاب نارية، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشاد: الميل = 5280 قدمًا

تدرب

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كل مما يأتي: (مثال 2)

(7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

(8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

مثّل بيانياً كلّاً من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

تحقق من فهمك:

(3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

(3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$

(13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$

تحقق من فهمك: أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $y = \langle 3, -6, 2 \rangle$, $w = \langle -1, 4, -4 \rangle$, $z = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

$$3y + 3z - 6w \quad (4B)$$

$$4w - 8z \quad (4A)$$

$$a = \langle -5, -4, 3 \rangle, b = \langle 6, -2, -7 \rangle, c = \langle -2, 2, 4 \rangle$$

تدرب

$$7a - 5b \quad (21)$$

$$6a - 7b + 8c \quad (20)$$

تحقق من فهمك: أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overline{AB}$ في كل ما يلي:

$$A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8) \quad (5B)$$

$$A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2) \quad (5A)$$

الموضوع: المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد التاريخ:

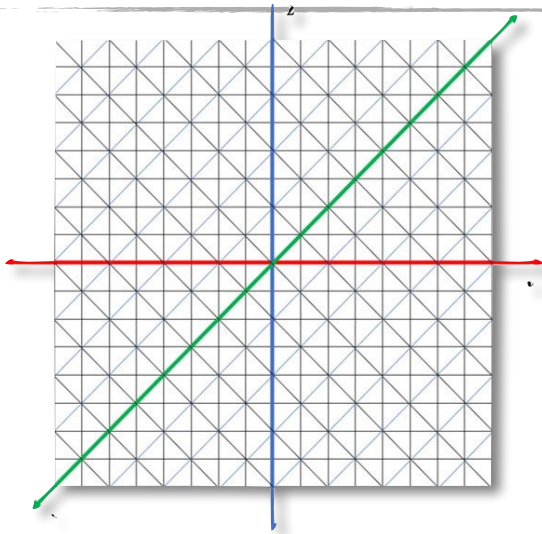
تدرب

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلِّ

مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

(33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

(32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$



مهارات التفكير العليا:

(53) تحدُّ: إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M .

(61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5), B(1, 0, 2), C(0, -3, 5)$ ؟

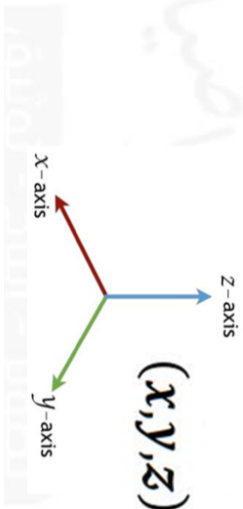
- A قائم الزاوية
- B متطابق الضلعين
- C متطابق الأضلاع
- D مختلف الأضلاع

نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

الضرب القياسي
الثلاثي

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

الثلاثي المرتب
شكل كتابة النقطة في
الفضاء



الضرب الاتجاهي
 $a \times b$
متجه عمودي على
المستوى الذي يحوي
المتجهين

الموضوع: الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء التاريخ:

تحقق من فهمك: أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

$u = \langle 4, -2, -3 \rangle, v = \langle 1, 3, -2 \rangle$ (1B)

$u = \langle 3, -5, 4 \rangle, v = \langle 5, 7, 5 \rangle$ (1A)

تدرب

$u = \langle 5, 0, -4 \rangle, v = \langle 6, -1, 4 \rangle$ (2)

$u = \langle 3, -9, 6 \rangle, v = \langle -8, 2, 7 \rangle$ (1)

تحقق من فهمك:

(2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $u = -4i + 2j + k, v = 4i + 3k$ ، إلى أقرب منزلة عشرية: -

الموضوع: الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء التاريخ:

تدرب

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة: (مثال 2)

(9) $u = \langle -8, 1, 12 \rangle, v = \langle -6, 4, 2 \rangle$

(8) $u = \langle 6, -5, 1 \rangle, v = \langle -8, -9, 5 \rangle$

تحقق من فهمك: أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم بين أن $u \times v$ يعامد كلا من u, v .

(3B) $u = \langle -2, -1, -3 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle$

(3A) $u = \langle 4, 2, -1 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle$

تدرب:

(13) $u = \langle 4, 7, -2 \rangle, v = \langle -5, 9, 1 \rangle$

(12) $u = \langle -1, 3, 5 \rangle, v = \langle 2, -6, -3 \rangle$

تحقق من فهمك:

(4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ ضلعان متجاوران.

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران:

تدرب:

(17) $u = \langle 4, 3, -1 \rangle$, $v = \langle 7, 2, -2 \rangle$

(16) $u = \langle -9, 1, 2 \rangle$, $v = \langle 6, -5, 3 \rangle$

تحقق من فهمك:

(5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $t = 2j - 5k$, $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ **ملاحظة:**

تدرب: أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه t, u, v أحرف متجاورة

(21) $t = \langle 2, -3, -1 \rangle, u = \langle 4, -6, 3 \rangle, v = \langle -9, 5, -4 \rangle$

(20) $t = \langle -1, -9, 2 \rangle, u = \langle 4, -7, -5 \rangle, v = \langle 3, -2, 6 \rangle$

مهارات التفكير العليا:

(54) أي مما يأتي متجهان متعامدان؟

A $\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle$

B $\langle 1, -2, 3 \rangle, \langle 2, -4, 6 \rangle$

C $\langle 3, 4, 6 \rangle, \langle 6, 4, 3 \rangle$

D $\langle 3, -5, 4 \rangle, \langle 6, 2, -2 \rangle$

(43) تحدّد: إذا كان: $u = \langle 4, 6, c \rangle, v = \langle -3, -2, 5 \rangle$ ، فأوجد قيمة c التي تجعل: $u \times v = 34i - 26j + 10k$.

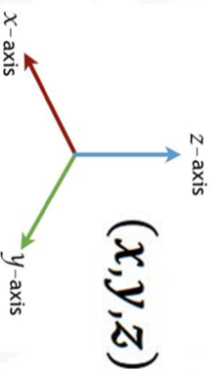
نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

الضرب القياسي الثلاثي

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

الثلاثي المرتب

شكل كتابة النقطة في
الفضاء



الضرب الاتجاهي

$$a \times b$$

متجه عمودي على
المستوى الذي يحوي
المتجهين

الموضوع:

التاريخ: