مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

الفصل الرابع
رياضيات ١-٢

العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

4-3

المتباينات في المثلث

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

التاريخ:

اليوم:

المادة:

نعود بحذر

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

المتباينات في المثلث

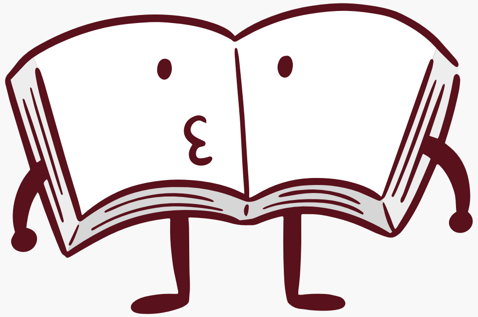
رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

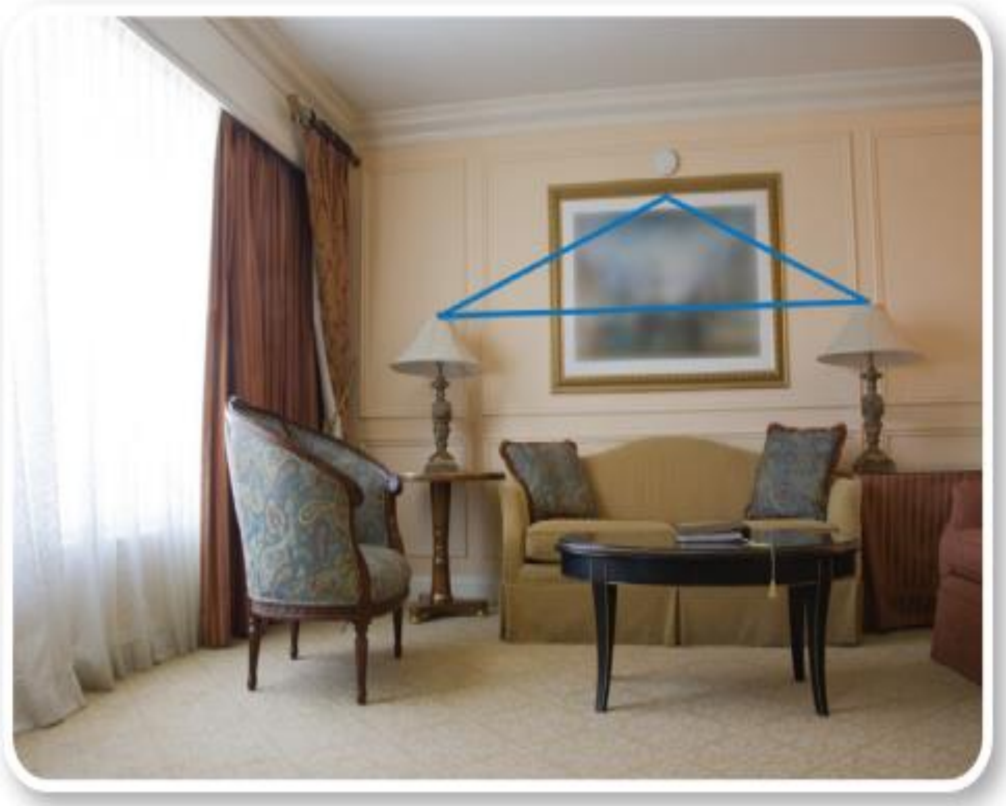
والآن

- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبّقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبّق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.



المتباينات في المثلث

لماذا؟



يستعمل المصمِّمون طريقة تُسمىّ التثليث؛ لإعطاء الغرفة مظهرًا يُوحي بالاتساع، ومن الأمثلة على هذه الطريقة وضع طاولة صغيرة عند كل طرف من طرفَي أريكة مع وضع لوحة فوقها. على أن يكون قياس كل زاوية من زاويتَي قاعدة المثلث أقل من قياس الزاوية الثالثة.

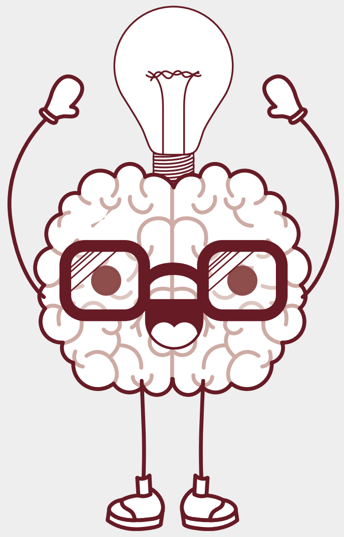
تعريف المتباينة

مفهوم أساسي

متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتُستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $a > b$ ، إذا وفقط إذا وُجِدَ عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$

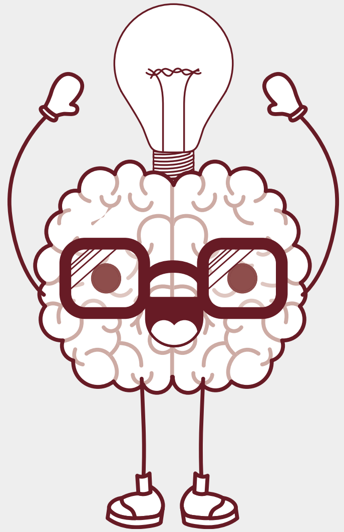
مثال إذا كان $5 = 2 + 3$ ، فإنّ $5 > 2$



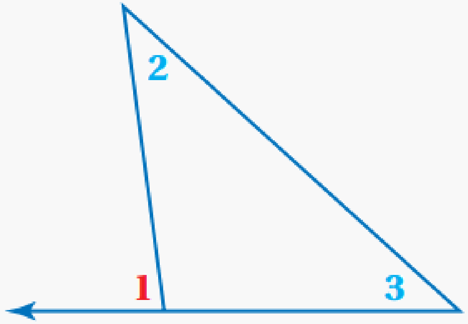
خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية

مفهوم أساسي

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c	
خاصيّة المقارنة	$a > b$ أو $a = b$ أو $a < b$.
خاصيّة التعدّي	1) إذا كان $a < b, b < c$ ، فإن $a < c$. 2) إذا كان $a > b, b > c$ ، فإن $a > c$.
خاصيّة الجمع	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصيّة الطرح	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.



المتباينات في المثلث



يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقية.

تأمّل $\angle 3$, $\angle 2$, $\angle 1$ في الشكل المجاور.

من نظرية الزاوية الخارجيّة، تعلم أنّ $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$

وبما أنّ قياسات الزوايا أعداد موجبة، إذن نستنتج أن:

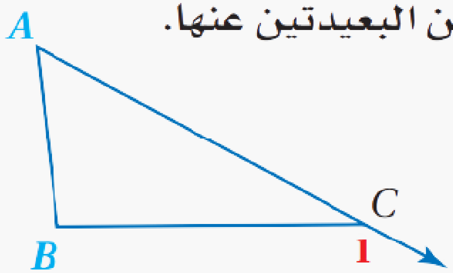
$m\angle 1 > m\angle 3$ وَ $m\angle 1 > m\angle 2$

وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:

متباينة الزاوية الخارجية

نظرية
4.8

قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أيّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



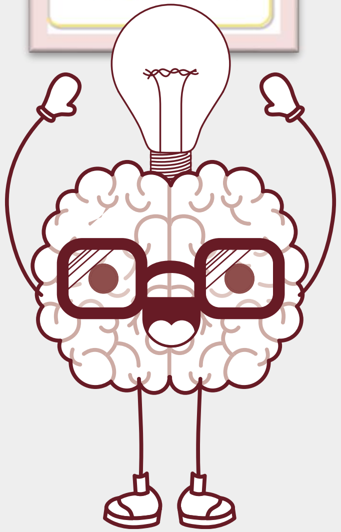
مثال: $m\angle 1 > m\angle A$

$m\angle 1 > m\angle B$

مراجعة المفردات

الزاويتان الداخليتان البعيدتان

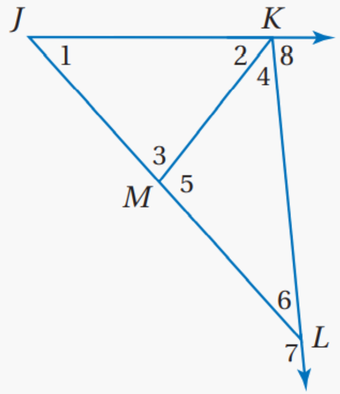
لكل زاوية خارجيّة لمثلث زاويتان داخليتان بعيدتان وهما الزاويتان غير المجاورتين لها.



استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجية

مثال ١

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ مما يأتي:



a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

$\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KML$، والزاويتان $\angle 5$, $\angle 4$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها، وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة يكون:

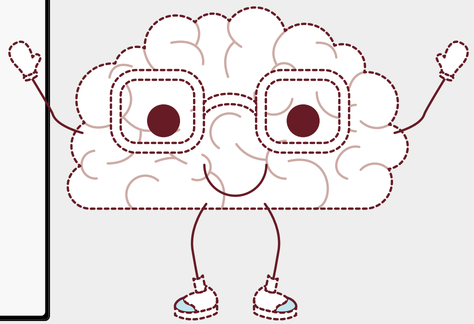
$m\angle 7 > m\angle 4 \;,\; m\angle 7 > m\angle 5$.

وكذلك $\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، والزاويتان $\angle 1 , \angle JKL$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها؛ لذا فإن $m\angle 7 > m\angle 1$ ، $m\angle 7 > m\angle JKL$. وبما أنّ $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$ ، وبالتعويض يكون $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$ ؛ إذن $m\angle 7 > m\angle 2$.

لذا فالزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 7$ هي $\angle 1, \angle 2, \angle 4, \angle 5$.

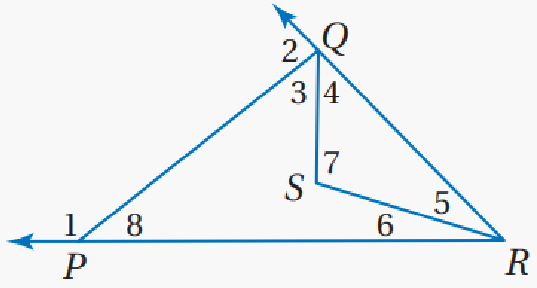
b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KLM$. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجية يكون $m\angle 3 > m\angle 6$. وبما أن $\angle 8$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$ ؛ لذا فقياس كلٍّ من $\angle 3 , \angle 8$ أكبر من $m\angle 6$.



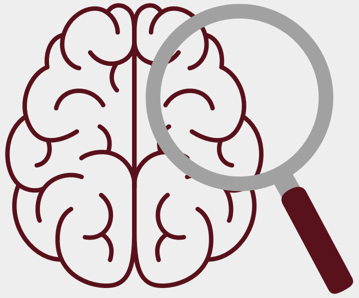
استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجية

تحقق من فهمك



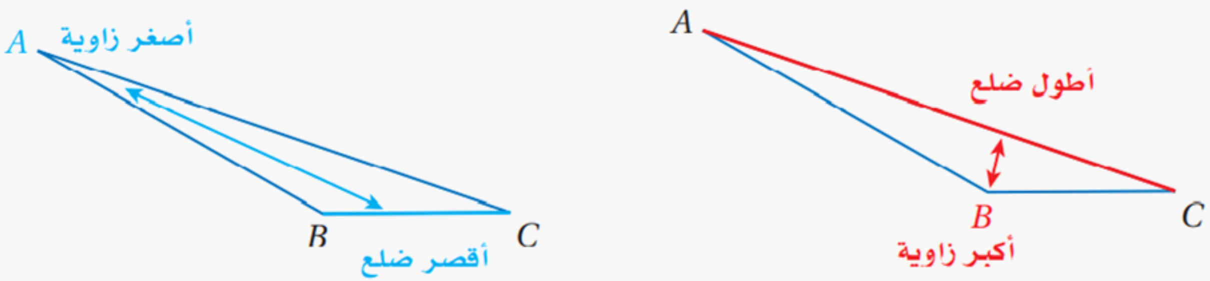
1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$

1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$



العلاقات بين زوايا المثلث و أضلاعه

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه: في الدرس 3-6، تعلمت أنّه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان. ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متطابقين. وللإجابة عن هذا السؤال، افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.



لاحظ أنّ أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاوية، وبالمثل فإن أقصر ضلع يقابل أصغر زاوية أيضًا.

تنبيه!

تحديد الضلع المقابل

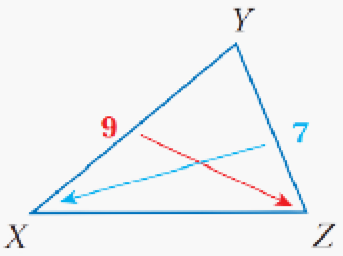
انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة، فالضلعان اللذان يشكّلان الزاوية لا يمكن أن يكون أحدهما مقابلًا لها.

العلاقات بين زوايا المثلث و أضلاعه

إن العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث المنفرج الزاوية والمختلف الأضلاع تكون صحيحة لجميع المثلثات، ويمكن صياغتها باستعمال المتباينات في النظريتين الآتيتين:

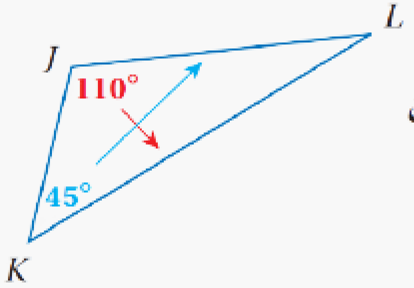
4.9 **متباينة ضلع-زاوية**: إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنَّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

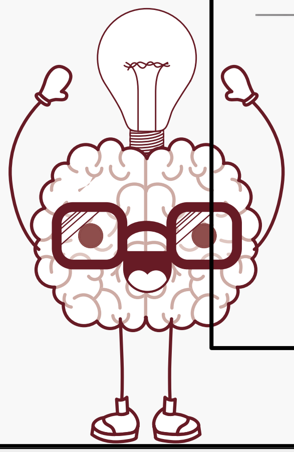
مثال بما أنَّ $XY > YZ$، فإن $m\angle Z > m\angle X$.



4.10 **متباينة زاوية-ضلع**: إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنَّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

مثال بما أنَّ $m\angle J > m\angle K$، فإن $KL > JL$.





نظريتان

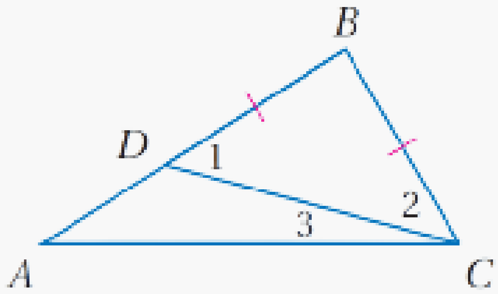
تنبيه!

رموز الزاوية والمتباينة

يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهًا لرمز أقل من ($<$)، وخاصة عند الكتابة باليد؛ لذا كن دقيقًا في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستعمل الرمزان معًا.

العلاقات بين زوايا المثلث و أضلاعه

برهان



المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه $AB > BC$.

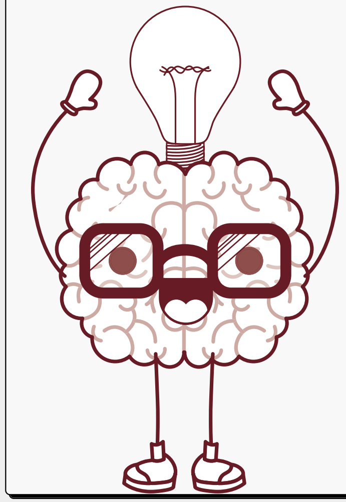
المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$.

البرهان:

بما أنّ $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنّه توجد نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم $\overline{CD}$ لتشكّل $\triangle BCD$ المتطابق الضلعين، وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 2 \cong \angle 1$ ، واستنادًا إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

واعتمادًا على مسلمة جمع قياسات الزوايا يكون $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة. وبالتعويض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

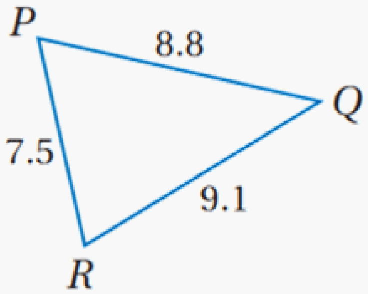
وبناءً على نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة يكون $m\angle 1 > m\angle A$. وبما أن $m\angle BCA > m\angle 1 , m\angle 1 > m\angle A$ ، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدّي للمتباينة.



ترتيب زوايا المثلث وفقاً لقياسها

مثال ٢

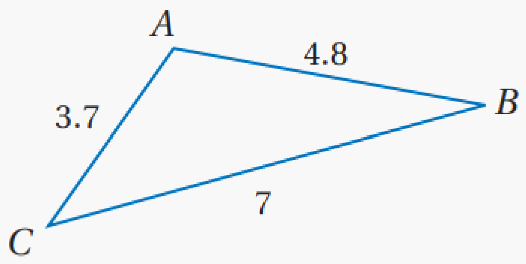
اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



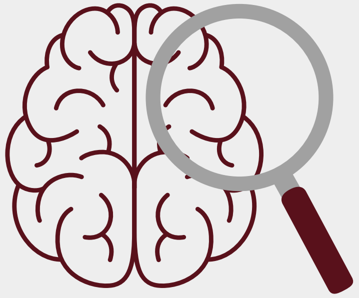
الأضلاع مرتَّبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{QR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$. والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle P$, $\angle R$, $\angle Q$ على الترتيب؛ لذا فالزوايا مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر تكون على النحو الآتي: $\angle P$, $\angle R$, $\angle Q$

ترتيب زوايا المثلث وفقاً لقياسها

تحقق من فهمك



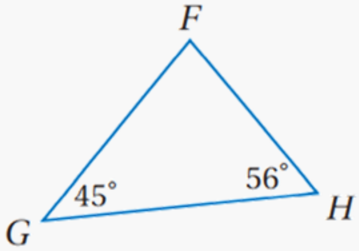
2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



ترتيب أضلاع المثلث وفقاً لأطوالها

مثال ٣

اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتبة من الاقصر إلى الأطول.



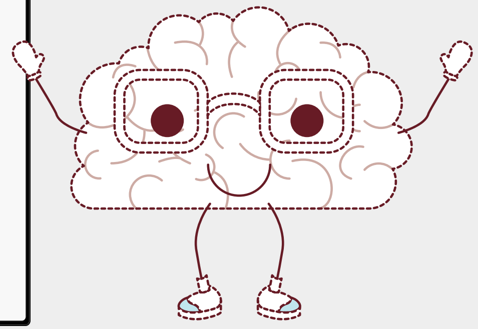
أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.

$$m\angle F = 180 - (45^\circ + 56^\circ) = 79^\circ$$

لذا فالزوايا مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle G, \angle H, \angle F$.

والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{GH}, \overline{FG}, \overline{FH}$ على الترتيب.

إذن فالأضلاع مرتبةً من الأقصر إلى الأطول تكون على النحو التالي: $\overline{GH}, \overline{FG}, \overline{FH}$.

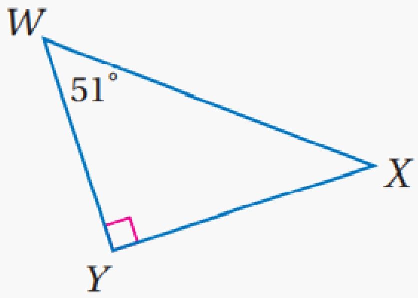


DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

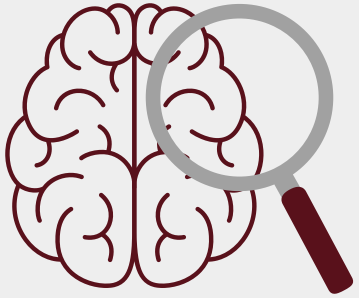
A_Shark_s

ترتيب أضلاع المثلث وفقاً لأطوالها

تحقق من فهمك



3) اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه، مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

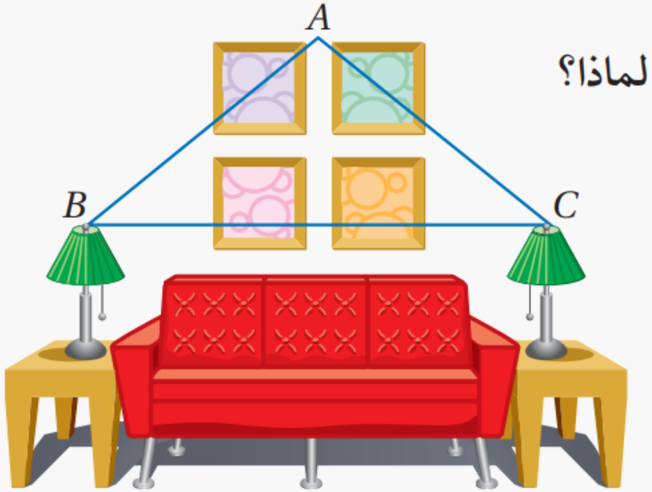


العلاقات بين الزوايا و الأضلاع

مثال ٤

تصميم داخلي: يستعمل مصمّمٌ فكرة التثليث الواردة في فقرة لماذا؟ لترتيب غرفة الاستقبال.

فإذا أراد المصمّم أن يكون $m\angle B$ أقلّ من $m\angle A$، فأي مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C؟ فسِّر إجابتك.

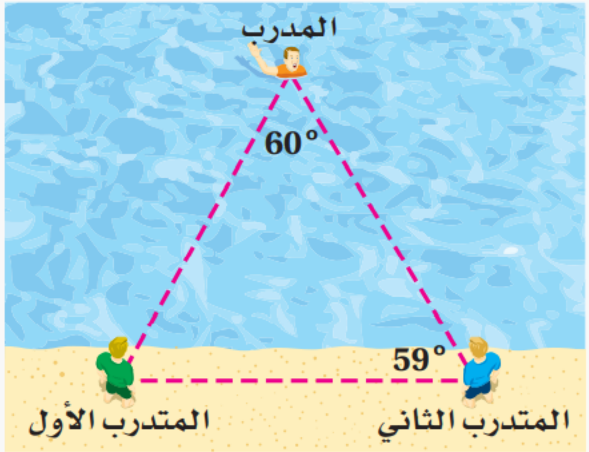


بحسب نظرية «متباينة زاوية– ضلع»، لكي يكون $m\angle B < m\angle A$، يجب أن يكون طول الضلع المقابل لِـ $\angle B$ أقصر من طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$. وبما أن $\overline{AC}$ يقابل $\angle B$، و $\overline{BC}$ يقابل $\angle A$، فإنّ $AC < BC$؛ لذا فالمسافة BC بين المصباحين ستكون أكبرَ من المسافة بين النقطتين A, C

العلاقات بين الزوايا و الأضلاع

تحقق من فهمك

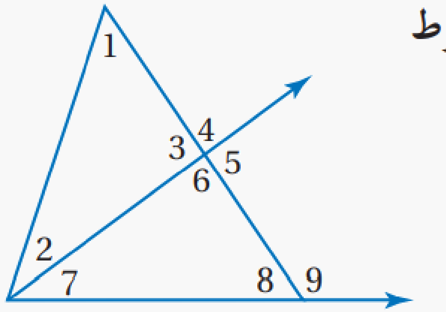
سبّاحو الإنقاذ: في أثناء التدريب يُمثّل المدرّب دور شخصٍ في خطر ليتمكّن المتدرِّبان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرّب والمتدرِّبان الأول والثاني في المواقع المبيّنة في الشكل، فأيُّ المتدربَين أقرب إلى المدرّب؟



المتباينات في المثلث

تأكد

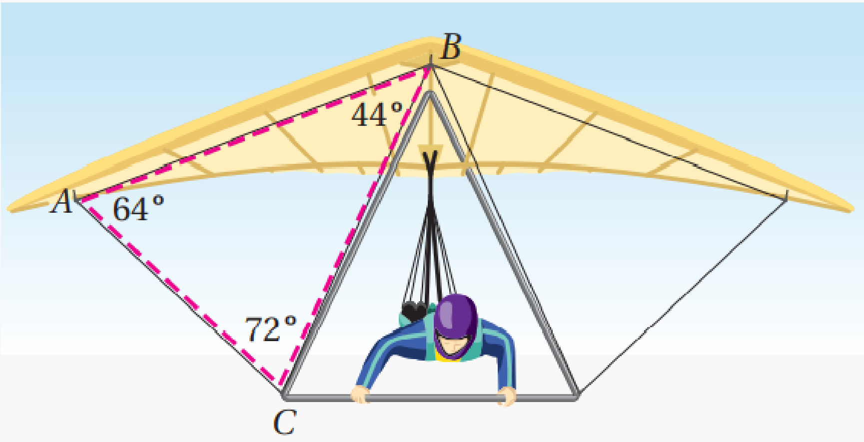
استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة، لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي :



1) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

المتباينات في المثلث

تأكد



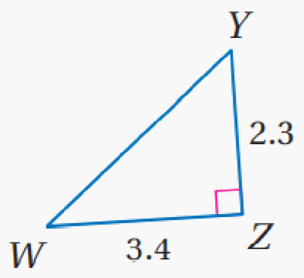
طيران شراعي: تشكّل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة . فأي دعامة تكون أطول: $\overline{AC}$ أم $\overline{BC}$ ؟ وضّح إجابتك.

المتباينات في المثلث

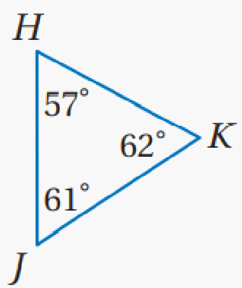
تدرب وحل

اكتب زوايا كل مثلث مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في كلٍّ مما يأتي:

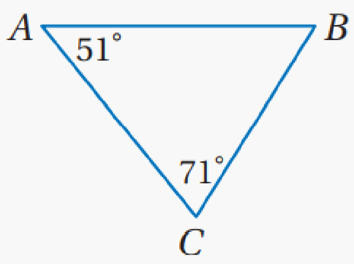
(12



(13



(14



المتباينات في المثلث

مهارات التفكير العليا

اكتب: وضِّح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائمًا ؟

تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا