مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الفصل الرابع
رياضيات ١-٢

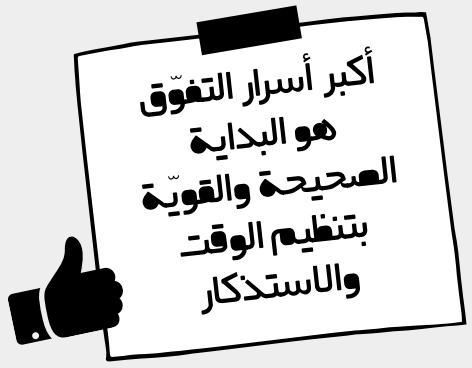
العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF
A_Shark_s

4-4

البرهان غير المباشر



التاريخ:

اليوم:

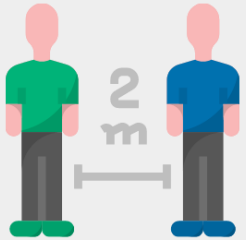
المادة:

نعود بحذر

الالتزام بارتداء الكمامة

عدم المصافحة

غسل اليدين



التباعد الاجتماعي

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

البرهان غير المباشر

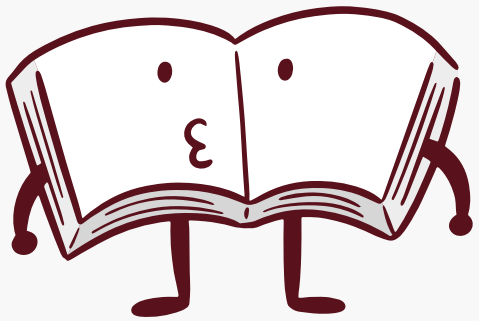
رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ البراهين الحرّة وذات العمودين والتسلسليّة.

و الآن

- أكتب براهين جبريَّة غير مباشرة.
- أكتُب براهين هندسيَّة غير مباشرة.



المفردات

التبرير المباشر	direct reasoning
البرهان المباشر	direct proof
التبرير غير المباشر	indirect reasoning
البرهان غير المباشر	indirect proof
البرهان بالتناقض	proof by contradiction

البرهان غير المباشر

أعلن محل أحذية عن تخفيض مقداره ٪25 على جميع القطع الموجودة في المحل، **فسألت هند أختها مها خلال تسوقهما في المحل قائلةً:** إذا كان ثمن القطعة 80 ريالًا بعد التخفيض، فهل كان ثمن القطعة أكثر من 100 ريالٍ قبل التخفيض؟

فأجابت مها: نعم؛ لأنه لو كان ثمن القطعة قبل التخفيض 100 ريالٍ أو أقل، فإن ثمنها بعد التخفيض سيكون 75 ريالًا أو أقل.

لماذا؟

البرهان غير المباشر

البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها **التبرير المباشر**، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة هذه الطريقة من البرهان تعتبر **برهانًا مباشرًا**، وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبيّن أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع أيّ حقيقةٍ سابقةٍ كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقيًّا، فإنّ هذا يكون إثباتًا لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحةً، ويسمّى هذا النوع من البرهان **برهانًا غير مباشر** أو **برهانًا بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عمليّة البرهان غير المباشر.

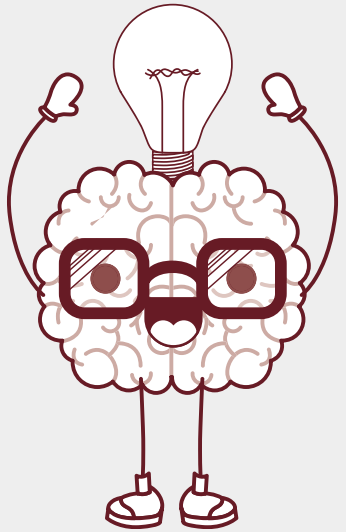
خطوات كتابة البرهان غير المباشر

مفهوم أساسي

الخطوة 1: حدّد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أنّ نفيها صحيح.

الخطوة 2: استعمل التبرير المنطقي لتبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع حقيقةٍ أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظريَّة.

الخطوة 3: بما أن الافتراض الذي بدأت به أدّى إلى تناقض، فبيِّن أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.



صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

مثال ١

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

a) $\angle ABC \ncong \angle XYZ$

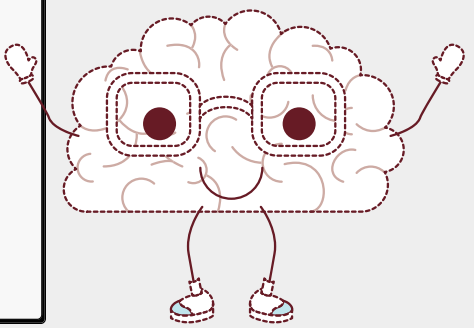
الافتراض هو: $\angle ABC \cong \angle XYZ$

b) **إذا كان العدد 6 عاملًا للعدد n ، فإن 2 عامل للعدد n .**

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي 2 عامل للعدد n ، ونفي هذه النتيجة هو 2 ليس عاملًا للعدد n ؛ لذا فالافتراض هو: العدد 2 ليس عاملًا للعدد n .

c) **$\angle 3$ زاوية منفرجة.**

الافتراض هو: $\angle 3$ ليست زاويةً منفرجةً.



صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

تحقق من فهمك

1A) $x > 5$

1B) النقاط J, K, L تقع على استقامة واحدة.

1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع.

كتابة برهان جبري غير مباشر

مثال ٢

اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنه: إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: إثبات أن $x < -4$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$ ؛ لذا افترض أن $x \geq -4$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \geq -4$	افترض
$-3x \leq 12$	اضرب الطرفين بـ -3
$-3x + 4 \leq 12 + 4$	اجمع 4 للطرفين
$-3x + 4 \leq 16$	بسّط

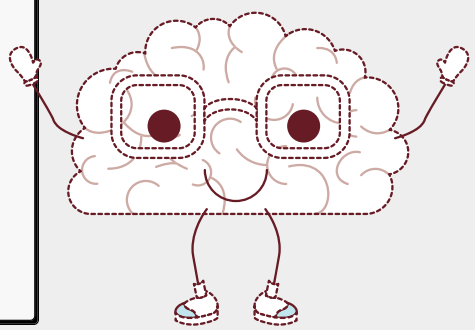
ولكن $-3x + 4 > 16$ معطى

الخطوة 3: الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $-3x + 4 > 16$ ؛ لذا فالافتراض بأن $x \geq -4$ يجب أن يكون خطأً، وأن النتيجة الأصليّة $x < -4$ هي الصحيحة.

قراءة الرياضيات

التناقض

التناقض مبدأ في المنطق ينصُّ على أنه لا يمكن تحقق الافتراض ونفيه في آنٍ واحدٍ.



كتابة برهان جبري غير مباشر

تحقق من فهمك

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

2A) إذا كانت $7x > 56$ ، فإنّ $x > 8$

2B) إذا كان $c-$ موجبًا ، فإنّ c سالبٌ.

استعمال البرهان الجبري غير المباشر

مثال ٣

تسوق: اشترى فهد قميصين بأكثر من 60 ريالًا، وبعد عدّة أسابيع سأله صديقه حامدٌ عن ثمن كل قميص، ولكن فهدًا لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا.

المعطيات: ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

$x + y > 60$ ، حيث x ثمن القميص الأول، وy ثمن القميص الثاني.

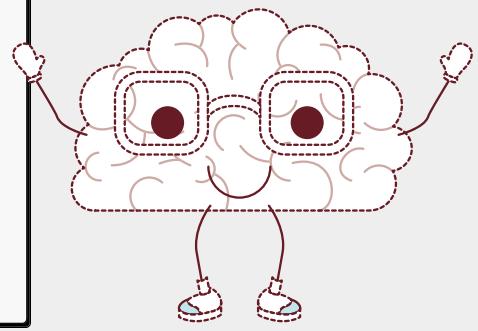
المطلوب: إثبات أن قميصًا واحدًا على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا؛ أي $x > 30$ أو $y > 30$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن ثمن كلٍّ من القميصين لا يزيد على 30 ريالًا، أي أنّ $x \le 30 , y \le 30$

الخطوة 2: إذا كانت $x \le 30 , y \le 30$ ، فإنّ $x + y \le 30 + 30$؛ أي $x + y \le 60$. وهذا تناقض، لأن ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

الخطوة 3: بما أن الافتراض أدّى إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فإن الافتراض بأن $x \le 30 , y \le 30$ افتراض خطأ. لذا يجب أن يكون ثمن أحد القميصين على الأقل أكثر من 30 ريالًا.



استعمال البرهان الجبري غير المباشر

تحقق من فهمك

3) **رحلة :** قطع رياض أكثر من 360 كيلومترًا في رحلة، وتوقّف في أثناء سفره مرتين فقط. استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضًا قطع أكثر من 120 كيلومترًا في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

مثال ٤

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًّا، فإنّ x عدد زوجي.

المعطيات: $x + 2$ عدد زوجي.

المطلوب: x عدد زوجي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد فردي ، وهذا يعني أن $x = 2k + 1$ ، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2:

$x + 2 = (2k + 1) + 2$ عوّض

$= (2k + 2) + 1$ خاصيّة الإبدال

$= 2(k + 1) + 1$ خاصية التوزيع

والآن حدّد ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا زوجيًّا أو فرديًّا. بما أن k عدد صحيح، فإنّ $k + 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن m تساوي $k + 1$ ، فيكون:

$2(k + 1) + 1 = 2m + 1$ عوّض

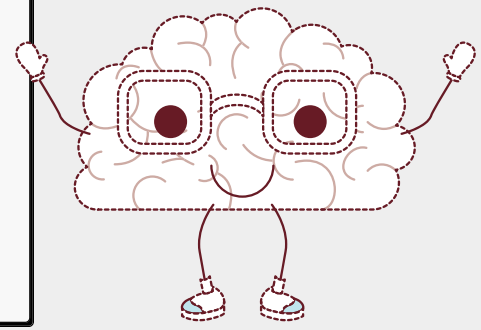
إذن $x + 2$ يمكن أن يُمثَّل بـ $2m + 1$ ، حيث m عدد صحيح، ولكن هذا التمثيل يعني أنّ $x + 2$ عدد فردي. وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة $x + 2$ عدد زوجي.

الخطوة 3: بما أنّ افتراض x عدد فردي أدّى إلى تناقضٍ مع العبارة المعطاة، فإنّ النتيجة الأصليّة x عدد زوجي يجب أن تكون صحيحةً.

إرشادات للدراسة

نظرية الأعداد

هي فرع من فروع الرياضيات تختص بدراسة الأعداد وخصائصها والعمليات عليها وتصنيفها إلى: زوجي، فردي، أولي، غير أولي...، وتثبت النظريات والحقائق لهذه الأعداد.



براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

تحقق من فهمك

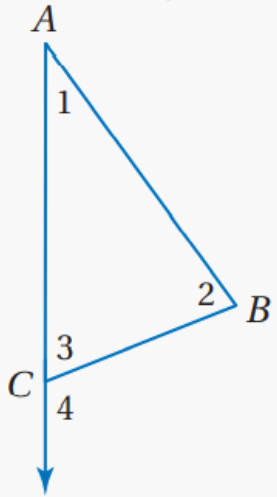
4) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه "إذا كانَ مربع عدد صحيح فرديًّا، فإنّ العدد الصحيح فرديٌّ".

برهان هندسي

مثال ٥

البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة.

أثبت أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث يكون أكبر من قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



ارسم شكلًا توضيحيًّا، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 2$ ، وأن $m\angle 4 > m\angle 1$.

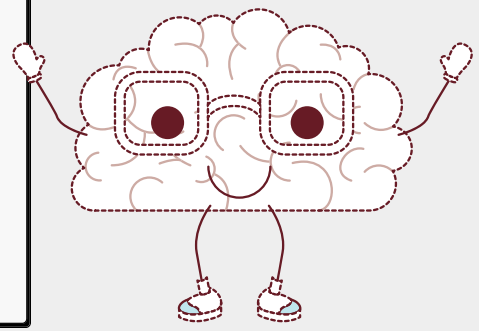
برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \ngtr m\angle 1$، أو $m\angle 4 \ngtr m\angle 2$.
أيْ أنّ $m\angle 4 \leq m\angle 1$، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

تنبيه!

البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد

البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يُستعمل المثال المضاد لإثبات خطأ تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.



برهان هندسي

مثال ٥

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن الافتراض $m\angle 4 \le m\angle 1$ يؤدي إلى تناقضٍ، وبالمثل سيؤدي الافتراض $m\angle 4 \le m\angle 2$ إلى تناقضٍ أيضًا .

الافتراض $m\angle 4 \le m\angle 1$ يعني أن: $m\angle 4 = m\angle 1$ أو $m\angle 4 < m\angle 1$.

الحالة 1: $m\angle 4 = m\angle 1$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	نظريه الزاوية الخارجيّة
$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$	عوّض
$0 = m\angle 2$	اطرح $m\angle 4$ من كلا الطرفين.

وهذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0 ؛ لذا فإن $m\angle 4 \ne m\angle 1$.

الحالة 2: $m\angle 4 < m\angle 1$

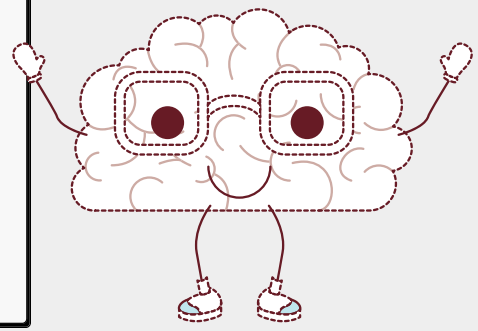
$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	نظرية الزاوية الخارجيّة
$m\angle 4 > m\angle 1$	قياسات الزوايا موجبة

الخطوة 3: في الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع نظرية أو تعريف؛ لذا فالنتيجة الأصليّة بأنّ $m\angle 4 > m\angle 2$ وأن $m\angle 4 > m\angle 1$ يجب أن تكون صحيحة.

تنبيه!

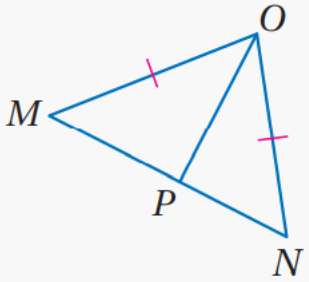
البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد

البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يُستعمل المثال المضاد لإثبات خطأ تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.



برهان هندسي

تحقق من فهمك



5) اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}\,,\ \overline{MP} \ncong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \ncong \angle NOP$

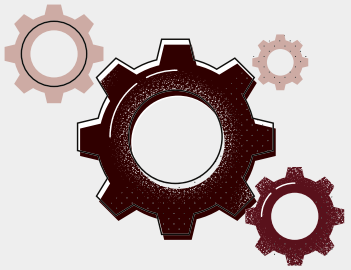
البرهان غير المباشر

تأكد

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

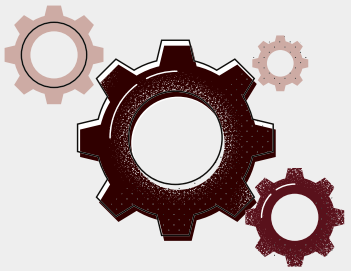
2) $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع.



البرهان غير المباشر

تأكد

كرة قدم: سجّل فهد 13 هدفًا لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أنّ متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3

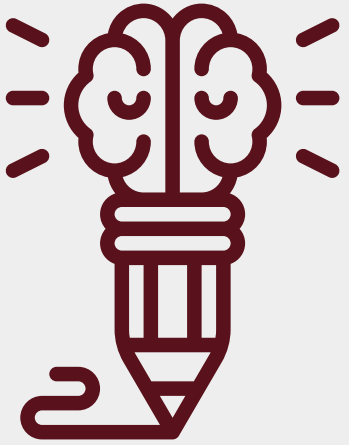


البرهان غير المباشر

تدرب
وحل

اكتب برهانًا غير مباشر

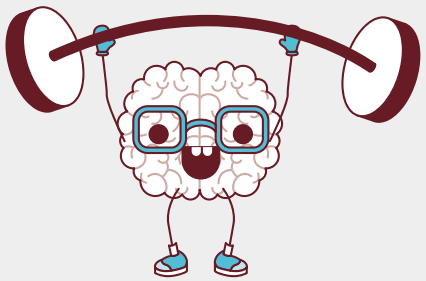
15) إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإنّ $x > -1$.



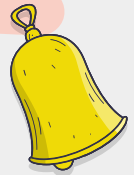
البرهان غير المباشر

مهارات التفكير العليا

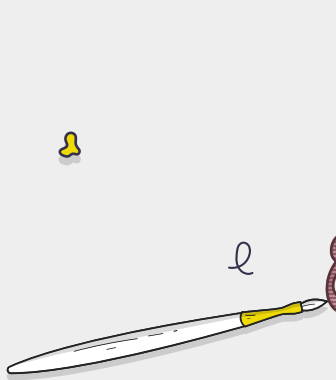
تحدٍّ: إذا كان x عددًا نسبيًّا، فإنه يمكن تمثيله بالصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a, b عددان صحيحان، و $b \neq 0$. ولا يمكن تمثيل العدد غير النسبي في صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهانًا غير مباشر تبيّن فيه أن ناتج ضرب عدد نسبي لا يساوي الصفر في عدد غير نسبي، هو عدد غير نسبي.



تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح



حساباتي على السوشيال ميديا