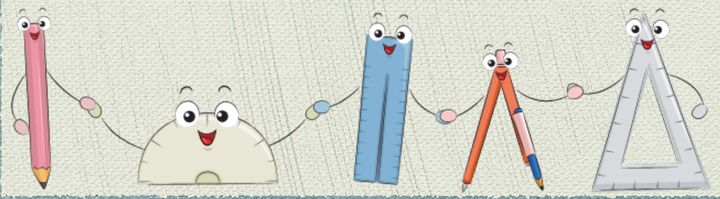
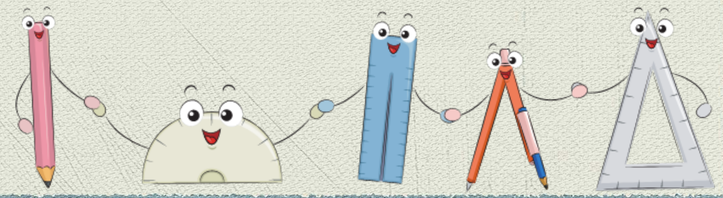
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يوماً ما ستصعد كل تلك القمم ، سيصبح كل ذلك التعب من الماضي وسنفتخر بوصولنا القمة..

القيم القصوى ومتوسط

معدل التغير





إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

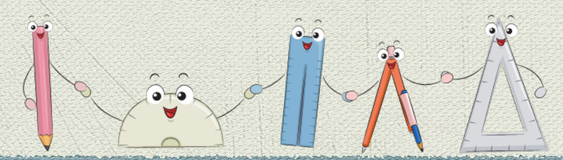
درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجِدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات:

الصغرى	minimum
القصوى	extrema
متوسط معدل التغير	average rate of change
القاطع	secant line
المتزايدة	increasing
المتناقصة	decreasing
الثابتة	constant
النقطة الحرجة	critical point
العظمى	maximum



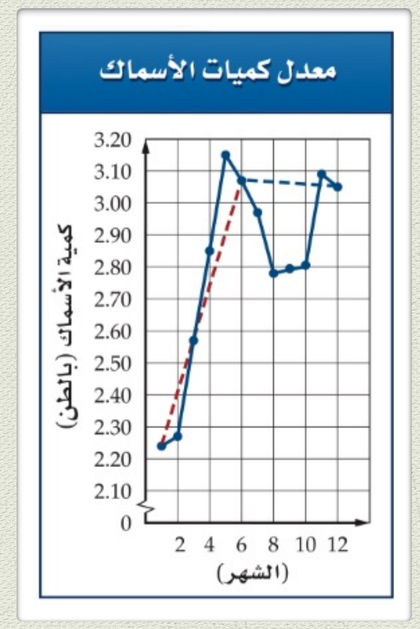
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا

يبيِّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

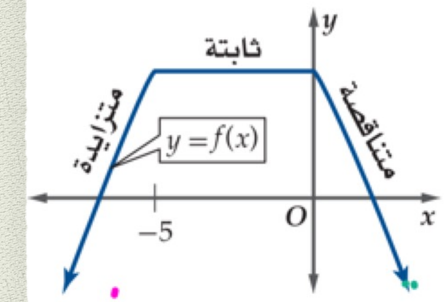
يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.



التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:



- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

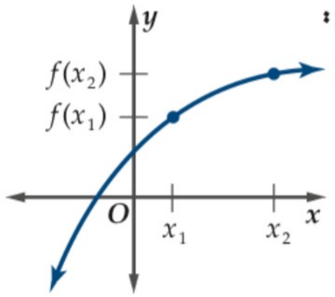
مفهوم أساسي

الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

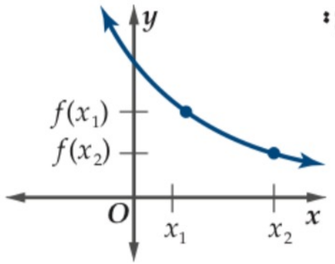
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

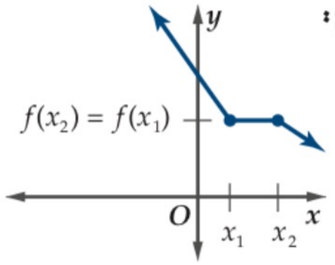
النموذج:

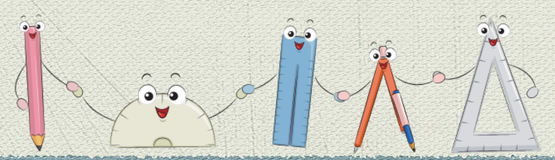


التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



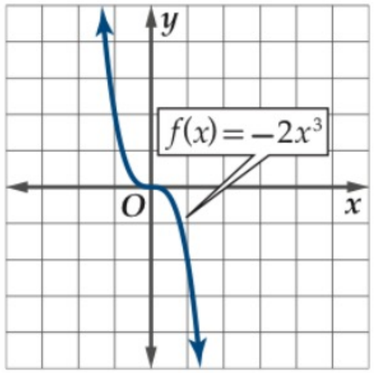


مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ١ تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.

a) $f(x) = -2x^3$



التحليل بيانيًّا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x ؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

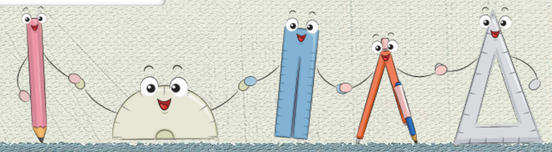
x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	−16	−128	−432	−1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x ، تتناقص قيم $f(x)$ ؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تنبيه!

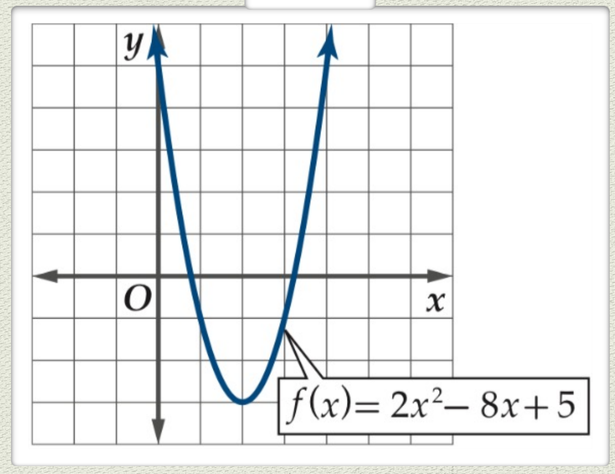
فترات:

لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (,) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

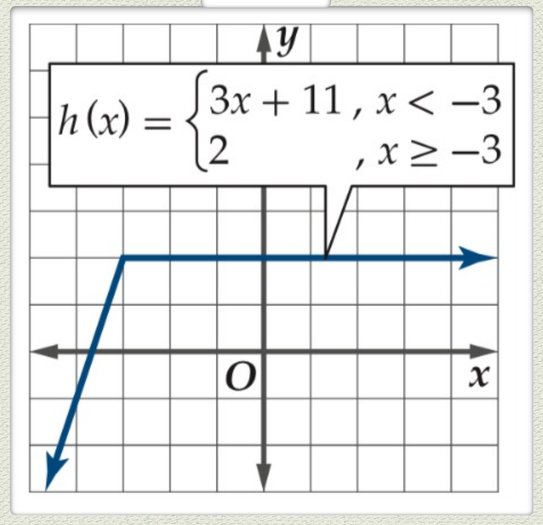


تحقق من فهمك

(1A



(1B



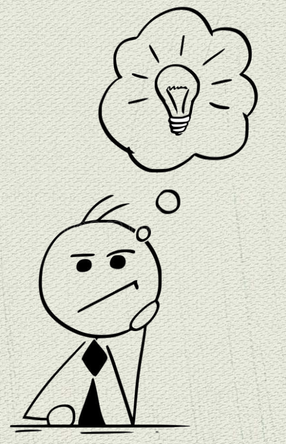
موضوع الدرس : القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

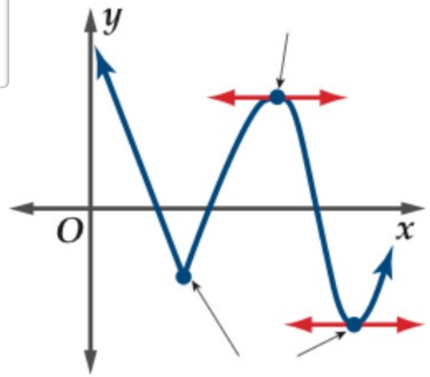
التاريخ : / / ١٤٤٣

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:

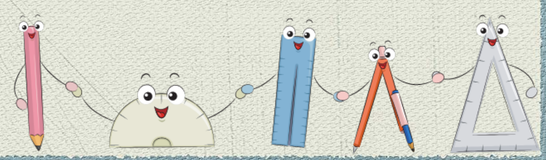
ليس من الضروري أن توجد قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.





لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًّا أو عموديًّا (أي أن ميله صفر أو غيرمعرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

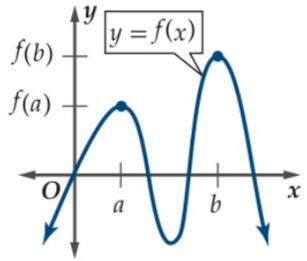
مفهوم أساسي

القيم القصوى المحلية والمطلقة

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

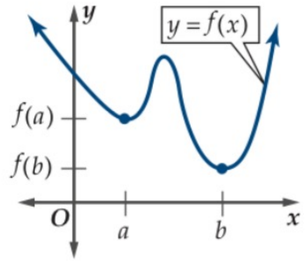
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمِّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمِّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

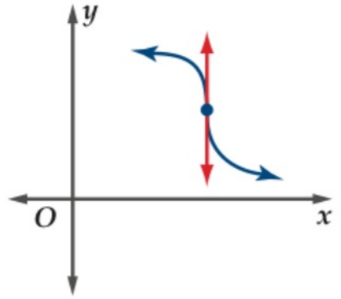
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمةً صغرى مطلقةً.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:

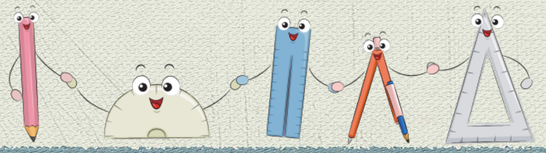
إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة الحرجة غير معرف كما في الشكل أدناه؛ فإنه لا توجد للدالة عند هذه النقطة قيمة عظمى أو صغرى.



إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية :

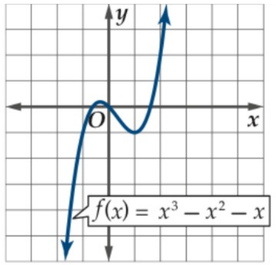
يُستعملُ مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ؟

تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا:

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1 . لاحظ كذلك أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًّا:

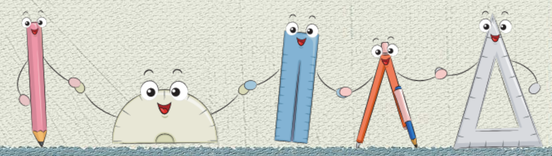
اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

بما أن $f(-1) < f(-0.5)$ و $f(0) < f(-0.5)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(1.5), f(1) < f(0.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولًا.

وبما أن $f(1) < f(-100), f(-0.5) < f(100)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

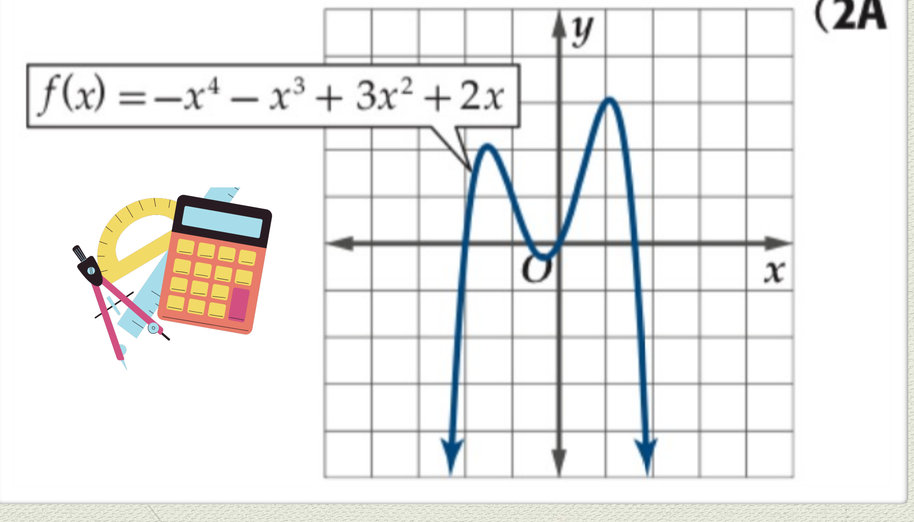


مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

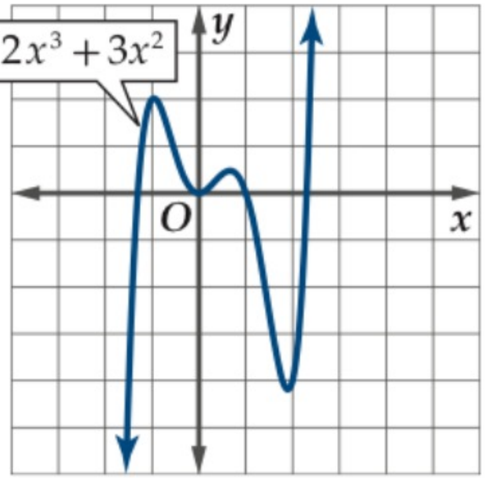
(2A

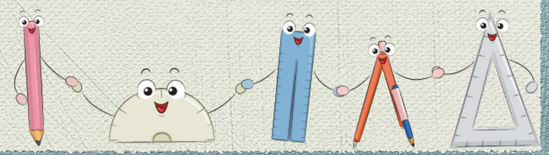
$f(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x$



(2B

$g(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2$





مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

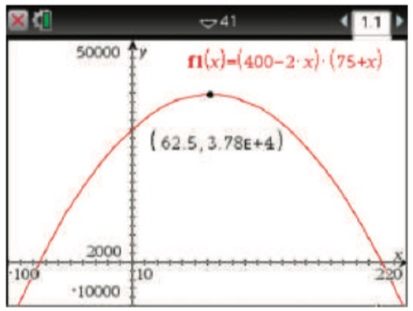
مثال ٤
من واقع الحياة

تطبيقات القيم القصوى

زراعة : يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان	=	عدد الأشجار في البستان	×	إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال
$f(x)$	=	$(75 + x)$	×	$(400 - 2x)$

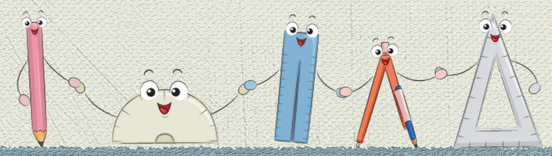


المطلوب هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$.
لذا مثِّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح menu ، ثم 6:تحليل الرسم البياني ، واختر منها 3:القيمة العظمى ، ثم مرّر المؤشر أفقيًّا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة العظمى، تقدر بـ 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$.

لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

الربط مع الحياة

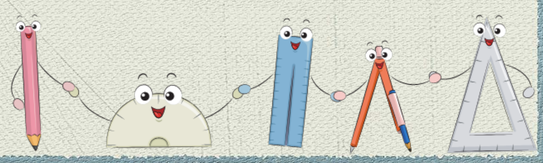
تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

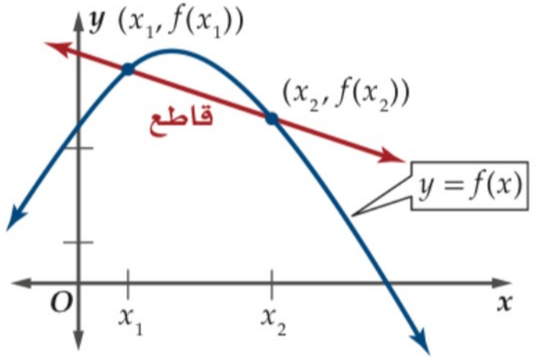
4) **صناعة :** يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.



متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

مفهوم أساسي

متوسط معدل التغير

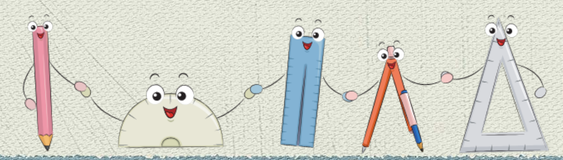


التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًّا: يُسمّى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٥ ايجاد معدل متوسط التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$

عوّض x_2 مكان -1 ، x_1 مكان -2

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$

عوّض $f(-1)$ ، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$

بسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4 .

b) $[0, 1]$

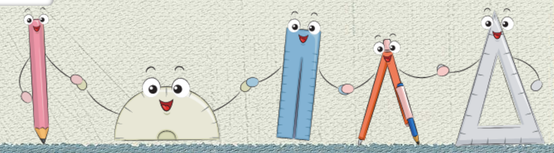
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

عوّض x_2 مكان 1 ، x_1 مكان 0

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

عوّض $f(1)$ ، $f(0)$ وبسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.

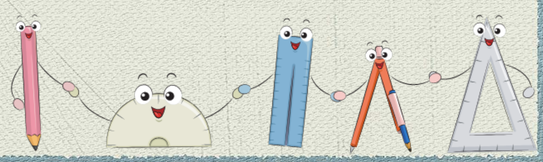


مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(5A $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

(5B $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٦
من واقع الحياة

ايجاد السرعة المتوسطة

فيزياء : إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ عوّض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32$$ عوّض $d(2)$ ، $d(0)$ ، وبسّط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ عوّض 4 مكان t_2 ، 2 مكان t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوّض $d(4)$ ، $d(2)$ ، وبسّط

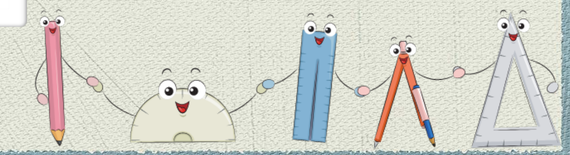
متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s ، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

تنبيه!

السرعة المتوسطة :
يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة؛ فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).

الربط مع الحياة

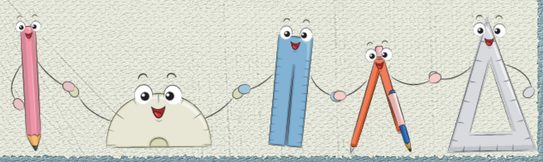
إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمّى السرعة الحديّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديّة (120 - 150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

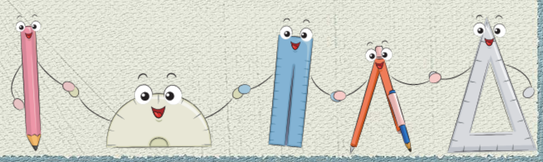
6) **فيزياء:** قَذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا

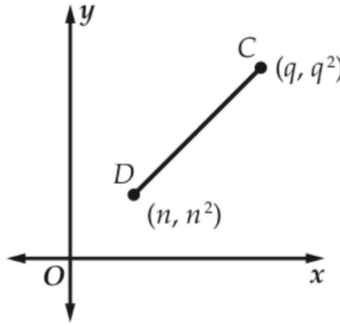
48) **اكتب:** صف متوسط معدل تغير الدالة إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة في فترة معينة.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدريب على الاختبار

61) في الشكل أدناه، إذا كان $q \neq n$، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD.



A $q + n$

B $q - n$

C $\frac{q^2 + q}{n^2 - n}$

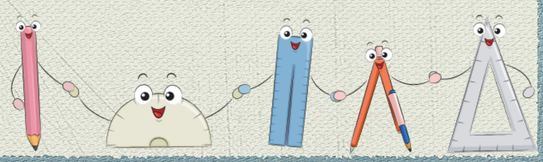
D $\frac{1}{q + n}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب

دليل على تفوقك وتميزك ...

بارك الله جهودك 🌹