عوّد ودرب عقلك بأن يرى الجانب الإيجابي في كُل موقف ..

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

فيما سبق:

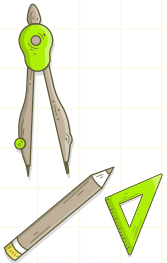
درستُ إيجاد قيم الدوال.
(الدرس 1–1)

والآن:

- أُجري العمليات على الدوال.
- أجِدُ تركيب الدوال.

المفردات:

تركيب الدالتين



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

لماذا:

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

موضوع الدرس : العمليات على الدوال وتركيب دالتين

العمليات على الدوال: ستتعلمُ في هذا الدرس إجراءَ العمليات الأربع على الدوال.

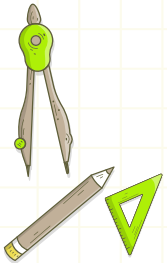
مفهوم أساسي — **العمليات على الدوال**

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.



مثال ١: العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = \sqrt{x+2}, h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

(a) $(f+g)(x)$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^2 + 4x) + \left(\sqrt{x+2}\right)\\ &= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}\end{aligned}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f, g، وهو $[-2, \infty)$.

(b) $(f-h)(x)$

$$\begin{aligned}(f-h)(x) &= f(x) - h(x)\\ &= (x^2 + 4x) - (3x - 5)\\ &= x^2 + 4x - 3x + 5\\ &= x^2 + x + 5\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$، لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

(c) $(f \cdot h)(x)$

$$\begin{aligned}(f \cdot h)(x) &= f(x) \cdot h(x)\\ &= (x^2 + 4x)(3x - 5)\\ &= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x\\ &= 3x^3 + 7x^2 - 20x\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

(d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$

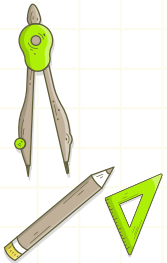
ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$.

تحقق من فهمك

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(f - g)(x)$ ، $(f + g)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B $f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x}$



موضوع الدرس : العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$ ، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

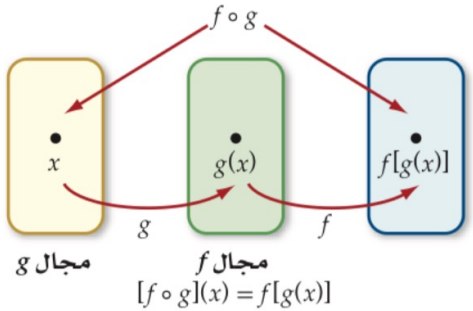
مفهوم أساسي

تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f وَ g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين:

يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيثُ تُطبَّقُ الدالة g أولًا ثم الدالة f.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ؟: تركيب دالتين

a $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x-4)$	$g(x) = x - 4$
$= (x-4)^2 + 1$	عوّض $(x-4)$ بدلًا من x في $f(x)$
$= x^2 - 8x + 16 + 1$	بسّط
$= x^2 - 8x + 17$	

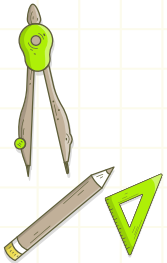
b $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف $g \circ f$
$= g(x^2 + 1)$	$f(x) = x^2 + 1$
$= (x^2 + 1) - 4$	عوّض $(x^2 + 1)$ بدلًا من x في $g(x)$
$= x^2 - 3$	بسّط

c $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع **a** عندما $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ عوّض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$



تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

بما أن مجال كل من f, g في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين:

من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

مثال ٣: ايجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x^2 - 9)$ $g(x) = x^2 - 9$

$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$ عوّض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

مثال ٣: ايجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x^2 - 9)$ $g(x) = x^2 - 9$

$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$ عوّض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

إرشادات للدراسة

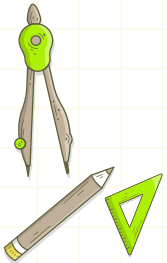
تحديد مجالي الدالتين:

من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

تحقق من فهمك

(3A $f(x)=\sqrt{x+1}\,,g(x)=x^2-1$

(3B $f(x)=\frac{5}{x}\,,g(x)=x^2+x$



مثال ٤: كتابة الدالة كتركيب دالتين

إرشادات للدراسة

كتابة الدالة كتركيب دالتين:

في المثال 4a، يمكنك إيجاد دالتين أخريين غير $g(h) = x + 5, f(x) = 2x^2$ بحيث إن: $h(x) = [f \circ g](x)$، وكذلك الأمر بالنسبة للفرع 4b

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

(a $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $g(x) = x + 5, f(x) = 2x^2$، وعندئذٍ:

$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

(b $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

لاحظ أن الدالة h يمكن أن تكتب كتركيب دالتين f, g حيث يمكن اختيار $g(x) = -7x$، وكتابة: $h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9\ (-7x)}{7}$، وعندئذ: $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{7}$

$$h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9\ (-7x)}{7} = \sqrt{g(x)} - \frac{9\ (g(x))}{7} = f(g(x)) = [f \circ g](x)$$

تحقق من فهمك

4A $h(x) = x^2 - 2x + 1$

4B $h(x) = \dfrac{1}{x + 7}$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٥ من واقع الحياة : على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية : تُصمِّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L ، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$.
أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L\,(L + 40) = L^2 + 40L$ ، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$ ، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$$A \circ L = A[L(t)] \quad \text{تعريف } A \circ L$$
$$= A(20 + 15t) \quad L(t) = 20 + 15t$$
$$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t) \quad \text{عوّض } (20 + 15t) \text{ بدلًا من } L \text{ في } A(L)$$
$$= 225t^2 + 1200t + 1200 \quad \text{بسّط}$$

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

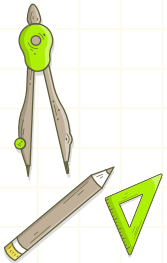
تحقق من فهمك

5) أعمال: أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.



مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كانت الدالة $(f \circ g)(x)$ زوجية، أم فردية أم غير ذلك.

65) f, g دالتان فرديتان.

66) f, g دالتان زوجيتان.

67) f زوجية، g فردية.

68) f فردية، g زوجية.

73) تبرير: حدّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرِّر إجابتك.

"إذا كانت f دالة جذر تربيعي و g دالة تربيعية، فإن $f \circ g$ هي دائمًا دالة خطية".

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math