واصل كفاحك مهما كسرت الأيام قوتك .. كن عظيما لأنك تستحق ذلك ..

خصائص اللوغاريتمات

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

خصائص اللوغاريتمات

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية . (الدرس 3–2)

والآن:

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

خصائص اللوغاريتمات

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

لماذا:

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $pH = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$\log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}} + \log_{10}[H^+]_{\text{للماء النقي}} = -pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$ والتي تكتب بالشكل :

$$\log_{10}\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$، وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي — خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي — خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y.$$

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

مـثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$$

$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$

$$= \log_4 4^3 + \log_4 3$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= 3 + \log_4 3$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\log_4 3 \approx 0.7925$

$$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

مفهوم أساسي

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال:

$$\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$$

مـثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$$\log_6 7.2 = \log_6 \left(\frac{36}{5}\right)$$

$$= \log_6 6^2 - \log_6 5$$

$$= 2 - 0.8982$$

$$= 1.1018$$

$$7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$\log_6 5 \approx 0.8982$$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $\mathrm{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

المعادلة الأصلية	$\mathrm{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$
$\mathrm{pH} = 4.2$	$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$
خاصية القسمة في اللوغاريتمات	$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$
$\log_{10} 1 = 0$	$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$
بسّط	$4.2 = -\log_{10} [H^+]$
اضرب كلا الطرفين في -1	$-4.2 = \log_{10} [H^+]$
تعريف اللوغاريتم	$10^{-4.2} = [H^+]$

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

الربط مع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو . والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية كما يظهر في الصورة أعلاه.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي

خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال:

$$\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$$

خصائص اللوغاريتمات

مثال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$$\log_2 25 = \log_2 5^2 \qquad 5^2 = 25$$

$$= 2 \log_2 5 \qquad \text{خاصية لوغاريتم القوة}$$

$$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438 \qquad \log_2 5 = 2.3219$$

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

خصائص اللوغاريتمات

مثال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$ $\quad \sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$

$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$ $\quad 4^3 = 64$

$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$ $\quad$ خاصية قوة القوة

$= \frac{3}{5} \log_4 4$ $\quad$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \frac{3}{5} (1) = \frac{3}{5}$ $\quad \log_b b = 1$

تحقق من فهمك

5A $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B $\log_7 \sqrt[6]{49}$

مـثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

(a $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$$

خاصية لوغاريتم القوة
$$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$$

(b $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$$

خاصية لوغاريتم القوة
$$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$$

(c $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$$

$\sqrt[5]{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{5}}$
$$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \log_3 (x-1) - \frac{1}{5}\log_3 (3-2x)$$

تحقق من فهمك

(6A $\log_{13} 6a^3bc^4$

(6B $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

(6C $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

مـثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

(a $4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x+6)$

$$4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$$ خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 \frac{x^4 \sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$$ بإنطاق المقام

(b $0.5 \log_7 (x+2) + 6 \log_7 2x$

$$0.5 \log_7 (x+2) + 6 \log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$$ خاصية لوغاريتم القوة

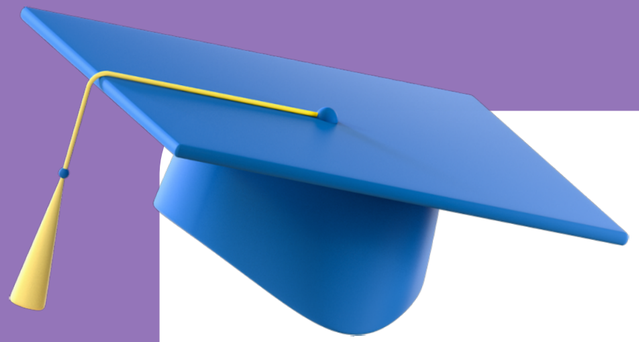
$$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64 x^6$$ $(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2}, 2^6 = 64$

$$= \log_7 64 x^6 \sqrt{x+2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

(7A $-5\log_2(x+1)+3\log_2(6x)$

(7B $\log_3(2x-1)-\frac{1}{4}\log_3(x+1)$



مسائل مهارات التفكير العليا

47) مسألة مفتوحة: اكتب مثالًا على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطولة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة.

49) تحدٍ: أوجد القيمة الدقيقة للعبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}}(a^2)$

50) اكتشف المختلف: حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك:

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$