سلسلة عروض مادة الرياضيات ٣-١

للعام الدراسي ١٤٤٥هـ

للمعلمة/ تغريد مسعود باجنيد

الأستاذة / **تغريد مسعود باجنيد**

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بـِ:

سلسلة عروض رفعة 1-3

تحت رقم إيداع **1445/14028** وتاريخ **1445/06/20** هـ، ورقم ردمك

978-603-04-8969-5

بسم اللّٰه والحمد لله والصلاة والسلام على رسول اللّٰه اللهم علمنا ما ينفعنا وانفعنا بما علمتنا وزدنا علما إنك أنت العليم الحكيم.

١

الفصل الأول

تحليل الدوال

مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال
Functions

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

1-1

القوانين الصفية

إستمعي جيداً لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند المشاركة

حافظي على الممتلكات ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك كفريق

حل الواجبات وإرسالها في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي قصار جهدك

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أصنف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

2. أتعرف الدوال وأحسب قيمتها وأجد مجالاتها.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

فيما سبق:

درست مجموعات الأعداد ورموزها.

والآن:

- ❖ أصنف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- ❖ أتعرف الدوال وأحسب قيمتها وأجد مجالاتها.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

الـمـفـردات

الصفة المميزة للمجموعة	رمز الفترة	الدالة
رمز الدالة	المتغير المستقل	
المتغير التابع	الدالة المتعددة التعريف	

الموضوع: الدوال

اليوم:

التاريخ:

لماذا؟

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

الموضوع: الدوال

اليوم:

التاريخ:

لماذا؟

أعط مثالاً على متغيرين يعطي الزيادة في أحدهما زيادة في الآخر؟

أعط مثالاً على متغيرين يعطي الزيادة في أحدهما نقصاناً في الآخر؟

هل يمكن أن تعطي الزيادة في أحد المتغيرين زيادة ونقصاناً في المتغير الآخر؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!

ما أريد أن أعرف؟!

ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أصنف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

٢- أصنف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

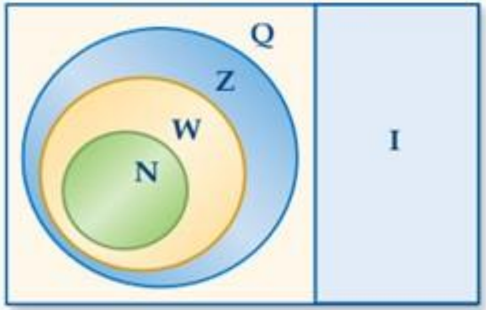
التاريخ:

الموضوع: الدوال

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية : تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقيّة R



الرمز	المجموعة	أمثلة
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -7\_8, \frac{2}{3} = 0.666\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3\ldots$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4\ldots$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

يمكنك وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. **ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في .**

$$\{x \mid -3 \le x \le 16,\ x \in Z\}$$

الأعداد x حيث...

x لها هذه الخصائص...

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

مثال 1 استعمال الصفة المميزة

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, \ldots\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \geq 8, x \in W\}$

وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، وَ x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تحقق من فهمك

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

1B) $x \leq -3$

1C) $-1 \leq x \leq 5$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

مثال 2 استعمال رمز الفترة

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \le 16$ $\quad(-8, 16]$

b) $x < 11$ $\quad(-\infty, 11)$

c) $x \le -16$ أو $x > 5$ $\quad(-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تحقق من فهمك

2A) $-4 \leq y < -1$

2B) $a \geq -3$

2C) $x > 9$ أو $x < -2$

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة بين مجموعتين من الأعداد الحقيقية هي:

1) **لفظيًّا:** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.

مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًّا:** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).
مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًّا:** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.

4) **جبريًّا:** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

مفهوم أساسي

الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

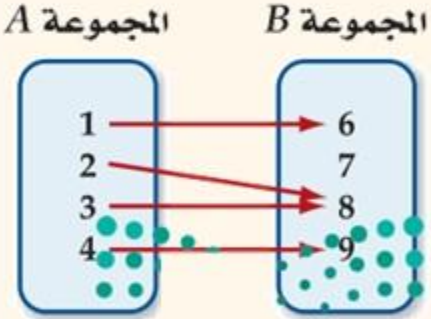
مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثَّلة في المخطط المجاور تمثِّل دالةً.

حيث تمثَّل المجموعة A مجال الدالة.

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.

وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.

المدى $= \{6, 8, 9\}$.



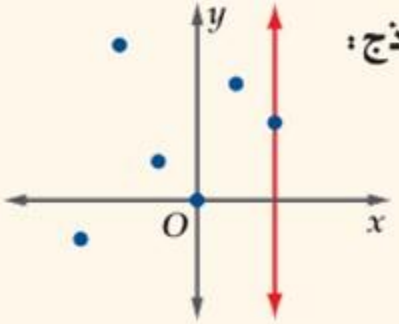
كما يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسيًّا لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي

اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



مثال 3 تحديد العلاقات التي تمثّل دوال

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

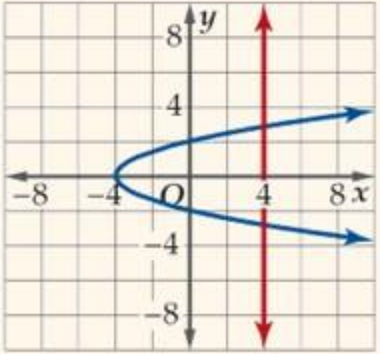
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثل دالةً في x .

b)

x	y
-8	-5
-5	-4
0	-3
3	-2
6	-3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ، وعليه فإن y تمثل دالةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإنّ y لا تمثّل دالةً في x .

مثال 3 تحديد العلاقات التي تمثّل دوال

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لِـ y.

$y^2 - 2x = 5$	المعادلة الأصلية
$y^2 = 5 + 2x$	أضف $2x$ لكلا الطرفين
$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثّل دالةً في x ؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين لِـ y، إحداها موجبة ، والأخرى سالبة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

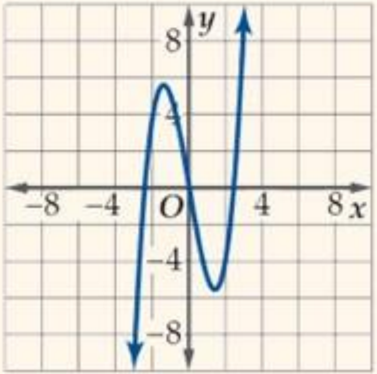
تحقق من فهمك

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C)



3D) $3y + 6x = 18$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

مجموعة رفعة الرياضيات

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة** ، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x ، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

الدالة المرتبطة بالمعادلة	المعادلة
$f(x) = -6x$	$y = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

اليوم:
التاريخ:

الموضوع: الدوال

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$	عوّض 6 مكان x
$= 36 + 48 - 24$	بسّط
$= 60$	بسّط

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

$f(-4x)$ (b

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$	عوّض $-4x$ مكان x
$= 16x^2 - 32x - 24$	بسّط

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

c) $f(5c + 4)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24$	عوّض $(5c + 4)$ مكان x
$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$	فك الأقواس $(5c + 4)^2$ و $8(5c + 4)$
$= 25c^2 + 80c + 24$	بسّط

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إبتكار - توثيق

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-2x+1}$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

4A) $f(12)$

4B) $f(6x)$

4C) $f(-3a+8)$

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًّا.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إبداع - توثيق

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \frac{2+x}{x^2-7x}$

تكون العبارة $\frac{2+x}{x^2-7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2 - 7x = 0$، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x = 0$ و $x = 7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$ و $x = 7$، أي $D = \{x \mid x \neq 0, x \neq 7, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, 0) \cup (0, 7) \cup (7, \infty)$.

b) $g(t) = \sqrt{t-5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t - 5 \geq 0$؛ أي أنّ مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D = \{x \mid x \geq 5, x \in R\}$ أو $D = [5, \infty)$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

تكون هذه الدالة معرّفة إذا كان المقام معرّفًا، وقيمته لا تساوي صفرًا، وهذا يعني أنها معرفة عندما يكون $x^2 - 9 > 0$ ، وعليه فإن $x^2 > 9$ وهذا يعني أن $|x| > 3$ ؛ لأن $\sqrt{x^2} = |x|$ ، ويكون مجال $h(x)$ هو $D = \{x \mid x < -3 \text{ أو } x > 3, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$

5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

5C) $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوالّ المتعددة التعريف**.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 & , \quad 63 < x < 66 \\ 3x - 132 & , \quad 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 & , \quad x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ عوّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

مجموعة رفعة الرياضيات

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 \ , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 \ , & 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 \ , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لايجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ عوّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تحقق من فهمك

6) **سرعة :** إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \quad 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \quad 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ **6B)** $v(15)$ **6C)** $v(245)$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تدرب وحل المسائل

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2)

1) $x > 50$

2) $x < -13$

3) $x \leq -4$

4) $\{-3, -2, -1, \ldots\}$

5) $-31 < x \leq 64$

6) $x < -19$ أو $x > 21$

7) $x \leq 61$ أو $x \geq 67$

8) $x \leq -45$ أو $x > 86$

9) المضاعفات الموجبة للعدد 5

10) $x \geq 32$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله: إن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. في حين قال سلمان: أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

54) اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

64) $\frac{2r - 4}{r - 2}$

65) $\frac{r^2 - 7r - 30}{r^2 - 5r - 24}$

66) $\frac{y}{4} - \frac{4y}{3x} + \frac{3y}{4x}$

67) $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{16}}$

68) $\frac{6x^2 - 11x + 4}{6x^2 + x - 2} \cdot \frac{12x^2 + 11x + 2}{8x^2 + 14x + 3}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

تدريب على اختبار

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

مجموعة رفعة الرياضيات

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال

اليوم تعلمت

لم أفهم

الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال

انتهى درس اليوم

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

Analyzing Graphs of Functions and Relations

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

1-2

القوانين الصفية

إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند
المشاركة

حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك
كفريق

حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً

مجموعة رفعة الرياضيات

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أستعمل التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة وإيجاد مجالها ومداها ومقطعها y وأصفارها.

2. أستكشف تماثل منحنيات الدوال وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

فيما سبق:

درست الدوال وكيفية إيجاد قيمتها.

والآن:

- ❖ أستعمل التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة وإيجاد مجالها ومداها ومقطعها y وأصفارها.
- ❖ أستكشف تماثل منحنيات الدوال وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

الـمـفـردات

- الأصفار
- الجذور
- التماثل حول مستقيم
- التماثل حول نقطة
- الدالة الزوجية
- الدالة الفردية

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

مجموعة رفعة الرياضيات

لماذا؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلًا يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1440 – 1433) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07 \ , \ 1 \leq x \leq 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1433هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

لماذا؟

ما نوع الدالة $f(x)$ ؟

ماذا تمثل القيمة $f(1)$ ؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أستعمل التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة وإيجاد مجالها ومداها ومقطعها y وأصفارها.

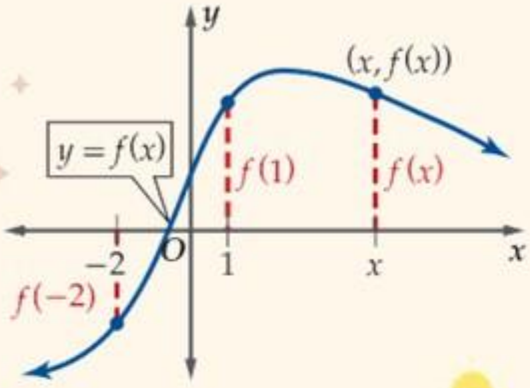
٢- أستكشف تماثل منحنيات الدوال وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

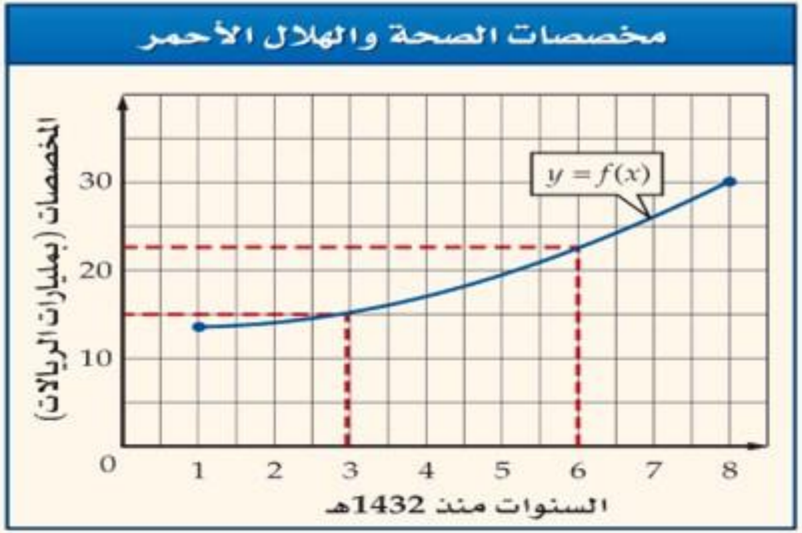
تحليل التمثيل البياني للدالة : التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ ، حيث x أحد عناصر مجال f. وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. ومن ثم تكون القيمة المطلقة لقيمة الدالة مساويةً طول العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة، كما هو موضح في الشكل المجاور.



يُستعملُ التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

مثال 1 من واقع الحياة — تقدير قيم الدوال

مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:



a) قدّر قيمة المخصصات سنة 1438 هـ ، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

السنة 1438 هـ هي السنة السادسة بعد 1432 هـ ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1438هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا.

وللتحقُّق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولًا.

b) قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3 ، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1435 هـ . وللتحقق جبريًّا أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

لذا تعد السنة التقريبية 1435هـ معقولة.

مجموعة رفعة الرياضيات

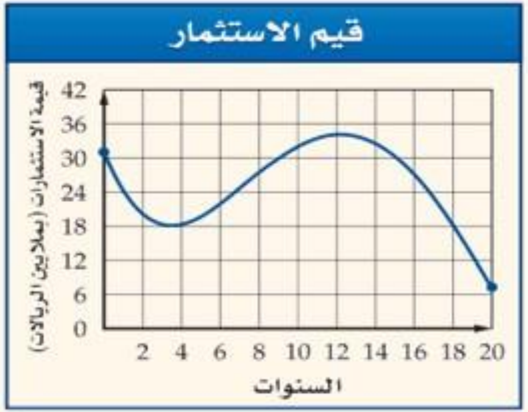
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

1) **استثمار:** تمثل الدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31,\ 0 \le d \le 20$ تقديرًا لاستثمارات أحد رجال الأعمال في السوق المحلية؛ حيث $v(d)$ قيمة الاستثمارات بملايين الريالات في السنة d.



1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة الاستثمارات في السنة العاشرة. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد السنوات التي بلغت فيها قيمة الاستثمارات 30 مليون ريال. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

لا يقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها. حيث يُعدُّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدِّد بنقطة أو دائرة.

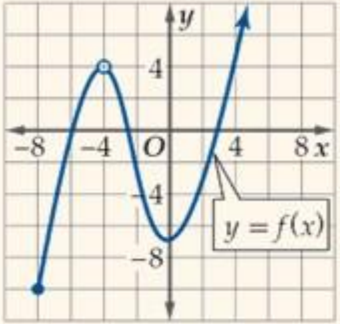
الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

اليوم:

التاريخ:

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .



المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f.
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid x \geq -8, x \neq -4, x \in R\}$.

المدى:

إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10 ، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

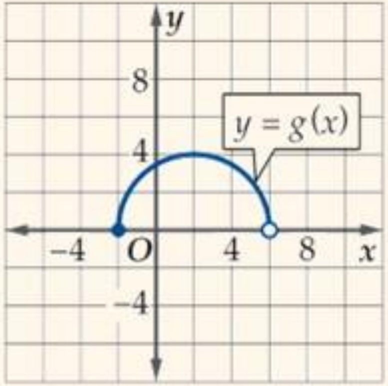
اليوم:

التاريخ:

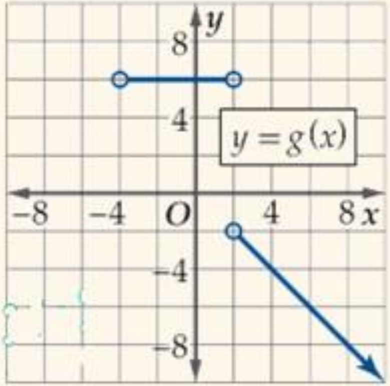
الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

(2A



(2B

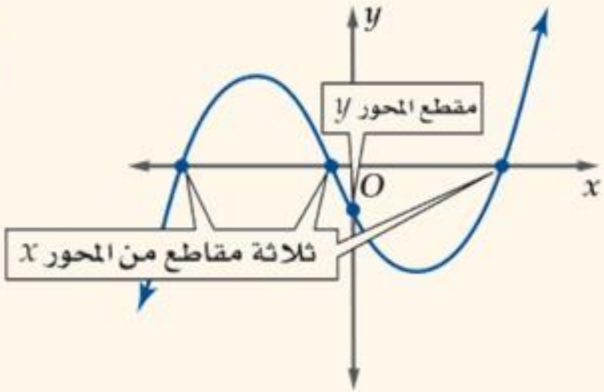


اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.

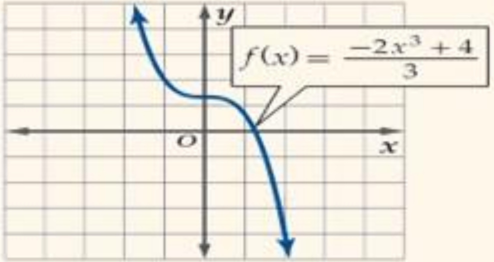


ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نوجد $f(0)$.

مثال 3 إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًا:

(a



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

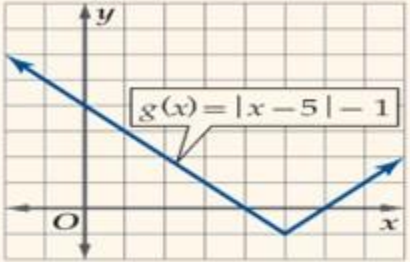
الحل جبريًا:

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3+4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

أي أن المقطع y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$.

(b



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$ ، وعليه فإن المقطع y هو 4 .

الحل جبريًا:

أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0-5| - 1 = 4$$

أي أن المقطع y هو 4 .

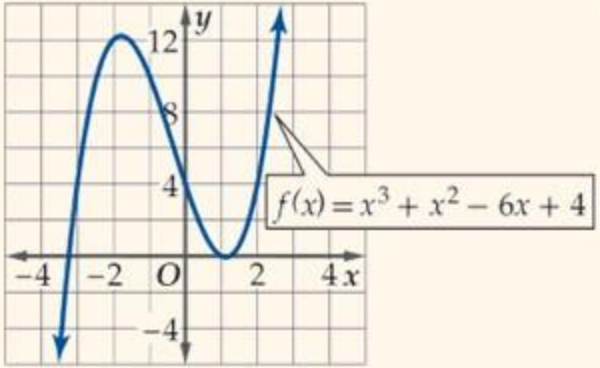
اليوم:

التاريخ:

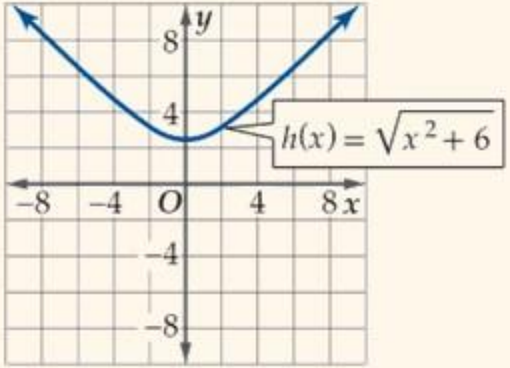
الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

3A)



3B)



اليوم:

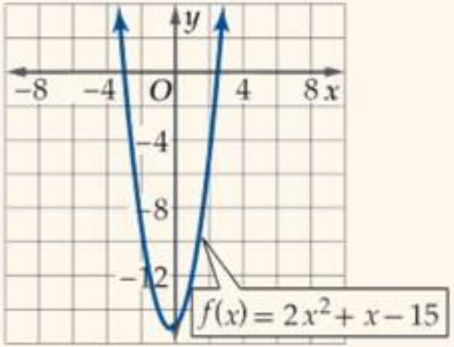
التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

مثال 4 إيجاد الأصفار

استعمل التمثيل البياني المجاور، الذي يمثل الدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.



التقدير من المنحنى:

يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 وَ 2.5 تقريبًا.
لذا فإن صفري الدالة f هما -3 وَ 2.5

الحل جبريًا:

$2x^2 + x - 15 = 0$ ضع $f(x) = 0$

$(2x - 5)(x + 3) = 0$ حلّل

$2x - 5 = 0$ أو $x + 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 2.5$ أو $x = -3$ حل كل معادلة

أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 وَ 2.5 وهما صفرا الدالة f .

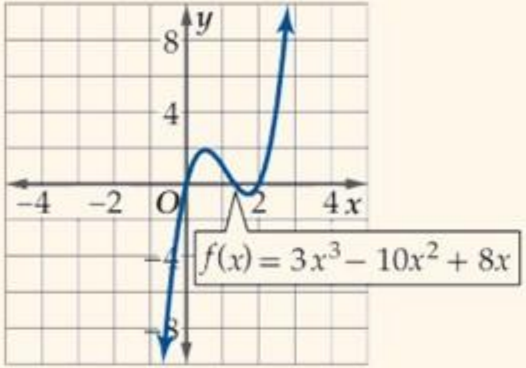
اليوم:

التاريخ:

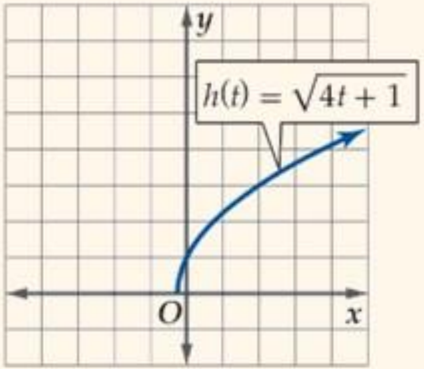
الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

(4A



(4B



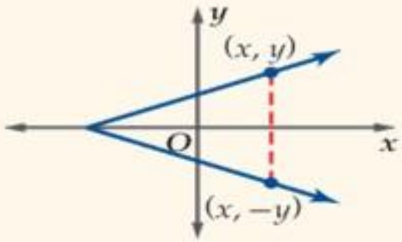
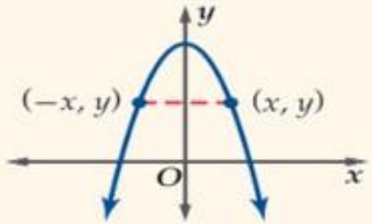
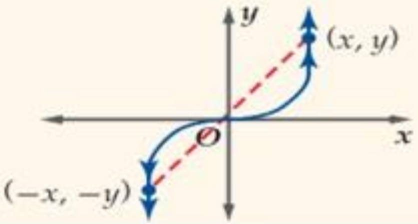
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: **تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات**

التماثل: يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها $180°$ حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأهم أنواع التماثل:

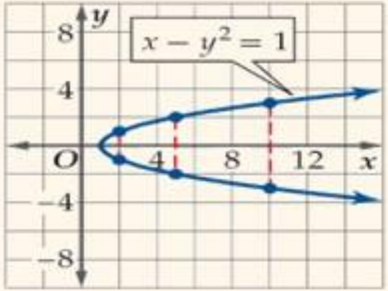
مفهوم أساسي   اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

مثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقّق منها جبريًا.

a) $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x:

x	2	2	5	5	10	10
y	1	-1	2	-2	3	-3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

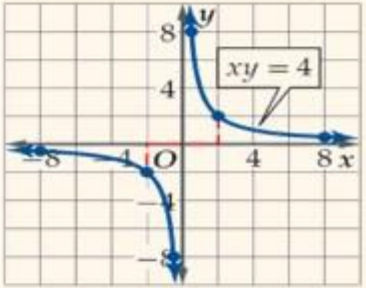
التحقق جبريًا:

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

مثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقَّق منها جبريًا.

b) $xy = 4$



التحليل بيانيًا :

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا :

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

x	-8	-2	-0.5	0.5	2	8
y	-0.5	-2	-8	8	2	0.5
(x, y)	$(-8, -0.5)$	$(-2, -2)$	$(-0.5, -8)$	$(0.5, 8)$	$(2, 2)$	$(8, 0.5)$

التحقق جبريًا :

بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

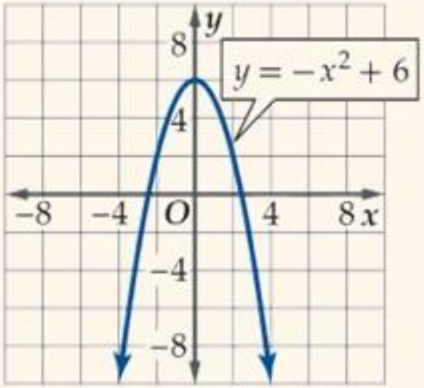
اليوم:

التاريخ:

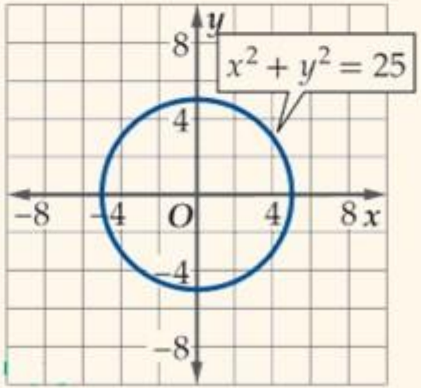
الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

(5A



(5B



يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

مفهوم أساسي الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

اليوم:

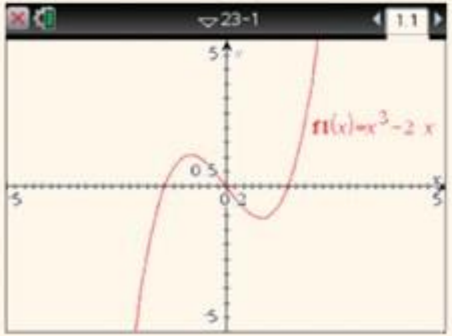
التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

a) $f(x) = x^3 - 2x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

$= -x^3 + 2x$ بسّط

$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

اليوم:

التاريخ:

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

b) $f(x) = x^4 + 2$

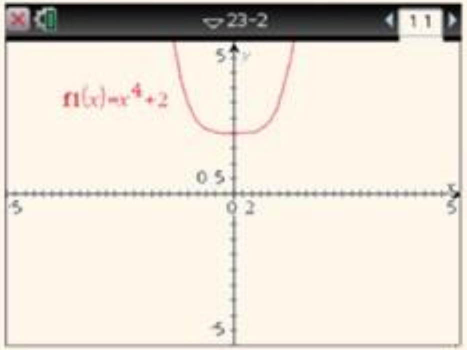
يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^4 + 2$ عوّض $-x$ مكان x

$= x^4 + 2$ بسّط

$= f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^4 + 2$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.



الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

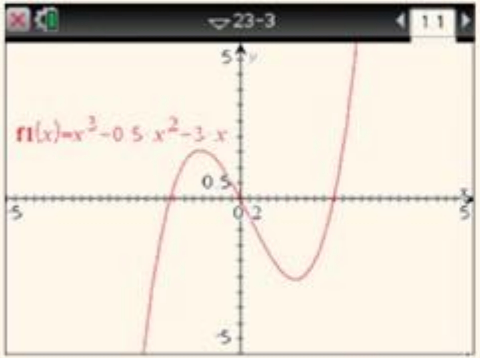
اليوم:

التاريخ:

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًا.

c) $f(x) = x^3 - 0.5\,x^2 - 3x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست متماثلة حول المحور y وليست متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريًا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$ بسّط

وبما أن $-f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$ ،

فإن $f(-x) \neq f(x)$ ، وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$ ؛

لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

6B) $g(x) = 4\sqrt{x}$

6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

اليوم:

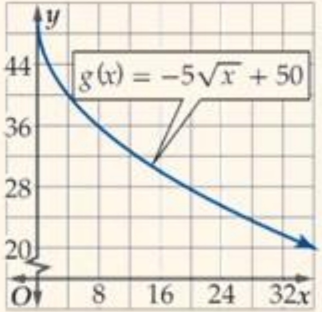
التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

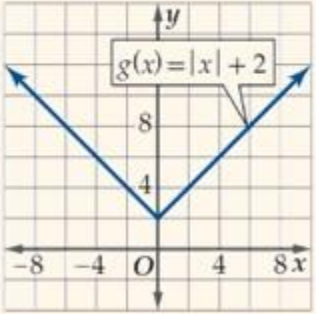
تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة ، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك: (مثال 1)

1)

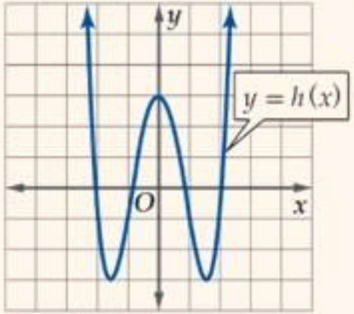


2)

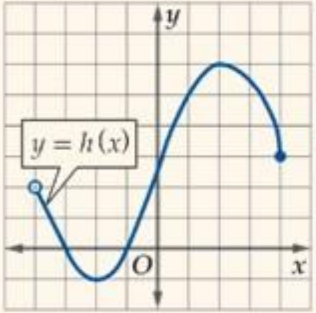


استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. (مثال 2)

6)



7)



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مَثِّل بيانيًا منحنًى يحقق الشروط في كل حالة مما يأتي:

50) منحنى يمر بالنقاط $(-3, 8), (-4, 4), (-5, 2), (-8, 1)$، ومتماثل حول المحور y.

51) منحنى يمر بالنقاط $(0, 0), (2, 6), (3, 12), (4, 24)$، ومتماثل حول المحور x.

52) منحنى يمر بالنقاط $(-3, -18), (-2, -9), (-1, -3)$، ومتماثل حول نقطة الأصل.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

69) $g(x) = x^2 - 10x + 3$

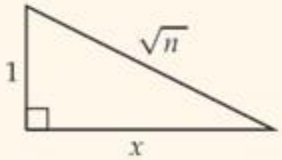
a) $g(2)$

b) $g(-4x)$

c) $g(1 + 3n)$

تدريب على اختبار معياري

81) إذا كان n عددًا حقيقيًّا أكبر من 1، فأوجد قيمة x بدلالة n في الشكل أدناه.



A $\sqrt{n^2 - 1}$

B $\sqrt{n - 1}$

C $\sqrt{n + 1}$

D $n - 1$

82) ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$، إذا كان مجالها $-2 < x < 3$ ؟

A $5 < f(x) < 9$

B $5 < f(x) < 10$

C $1 < f(x) < 9$

D $1 \leq f(x) < 10$

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل
منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما
تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال	اليوم تعلمت	لم أفهم	الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

انتهى درس اليوم

مجموعة رفعة الرياضيات

الاتصال والنهايات
Continuity and Limits

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

1-3

القوانين الصفية

- إستمعي جيداً لنصائح المعلمة
- إرفعي يدك عند المشاركة
- حافظي على الممتلكات ونظافة فصلك
- إعملي مع زميلاتك كفريق
- حل الواجبات وإرسالها في الوقت المحدد
- الالتزام بالوقت
- الاستعداد الجيد وإبذلي قصار جهدك

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا اللّٰه ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أستعمل النهايات للتحقق من اتصال دالة وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.

2. أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

فيما سبق:

درست إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني.

والآن:

- ❖ أستعمل النهايات للتحقق من اتصال دالة وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- ❖ أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

الــمــفــردات

الدالة المتصلة	عدم الاتصال القفزي
النهاية	عدم الاتصال القابل للإزالة
الدالة غير المتصلة	عدم الاتصال غير القابل للإزالة
عدم الاتصال اللانهائي	سلوك طرفي التمثيل البياني

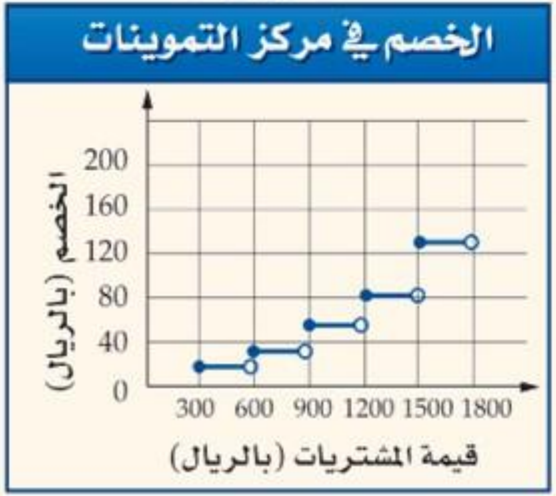
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

لماذا؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=900$, $x=600$.



الموضوع: الاتصال والنهايات

اليوم:

التاريخ:

لماذا؟

أوجد الحد الأدنى للخصم عند الشراء بقيمة ٤٠٠ ريال؟

أوجد الحد الأدنى للخصم عند الشراء بقيمة ١٢٠٠ ريال؟

ماذا تعني الدوائر الصغيرة المظللة والمفتوحة على التمثيل البياني؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أستعمل النهايات للتحقق من اتصال دالة وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.

٢- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

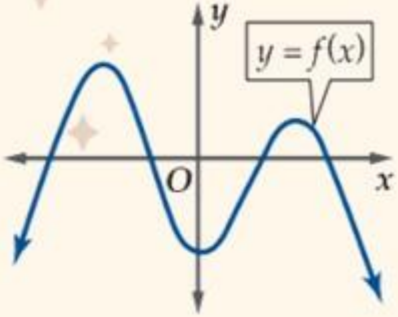
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

اليوم:

التاريخ:

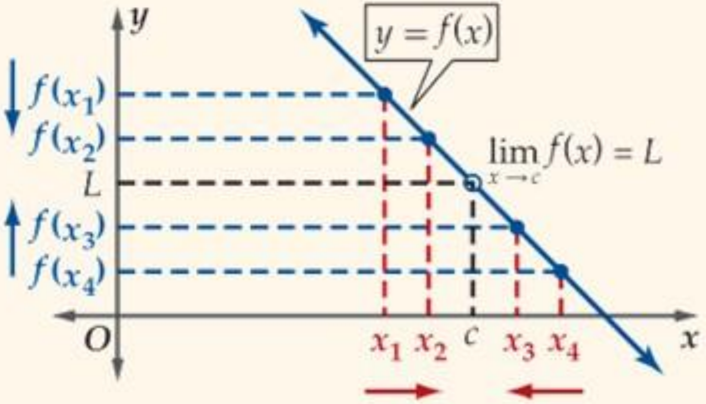
الموضوع: الاتصال والنهايات

مفهوم أساسي

النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

الرموز: نقول: إن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .



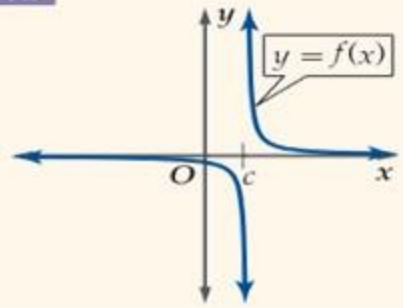
إن التمثيل البياني **للدالة غير المتصلة** يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال. وفيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

للدالة عدم اتصال **لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

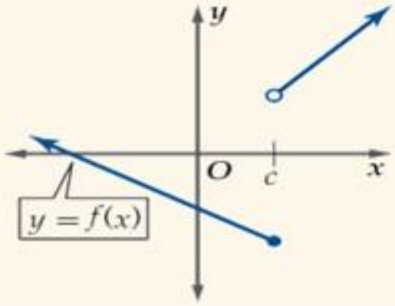
مجموعة رفعة الرياضيات

مثال:



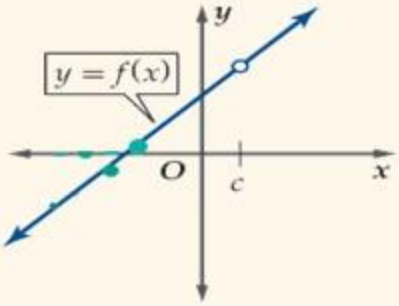
للدالة عدم اتصال **قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة عدم اتصال **قابل لإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (ο) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



اليوم:

التاريخ:

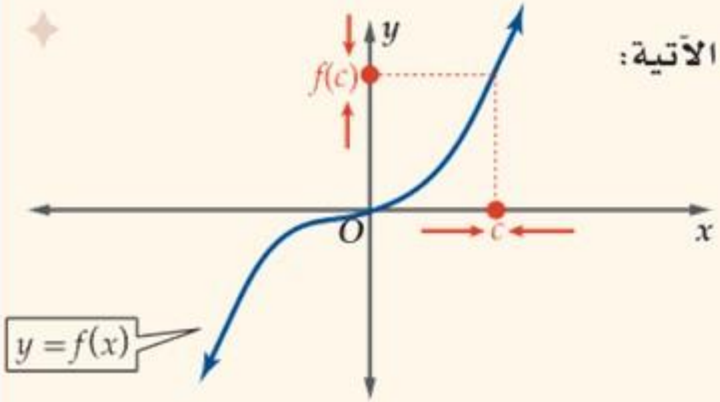
الموضوع: الاتصال والنهايات

تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

ملخص المفهوم
اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.



مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

2) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

3) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

مـثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , \quad x > -3 \\ 2 - x & , \quad x \le -3 \end{cases}$ عند $x = -3$.

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3) = 5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x = -3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x = -3$.

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = -3$, $x = 3$.

عند $x = 3$

1) $f(3) = \frac{6}{0}$، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = 3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim_{x \to 3} f(x)$ غير موجودة.

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x = 3$؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

عند $x = -3$

1) $f(-3) = \frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3.

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim_{x \to -3} f(x) \approx -0.167$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = -3$. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

اليوم:

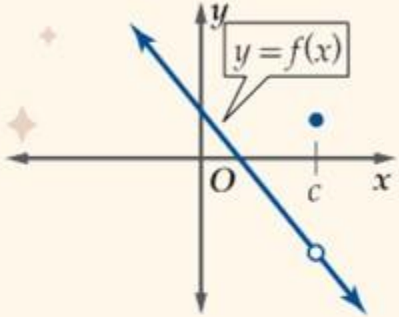
التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

تحقق من فهمك

2A) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

2B) $f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , \quad x > 2 \\ 2 - x & , \quad x \leq 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$



لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

مثال 3 إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

1) $f(4) = \frac{0}{0}$، أي أن $f(4)$ غير موجودة.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x \to 4} f(x) = 8$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \to 4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$

4) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 8, & x = 4 \end{cases}$$

لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

00:01:00

Start Clear

تحقق من فهمك

3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

مجموعة رفعة الرياضيات

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a ($\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$) ، ومتصلة من اليسار عند b ($\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$) . ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

اليوم:

التاريخ:

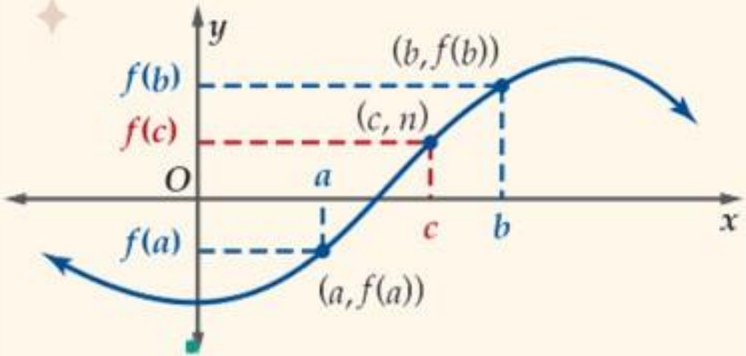
الموضوع: الاتصال والنهايات

مجموعة رفعة الرياضيات

نظرية

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b، بحيث $f(c) = n$.



نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

مثال 4 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -2، -3 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 وَ -2 ، والعددين 0 وَ 1 والعددين 1 وَ 2. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

تحقق من فهمك

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

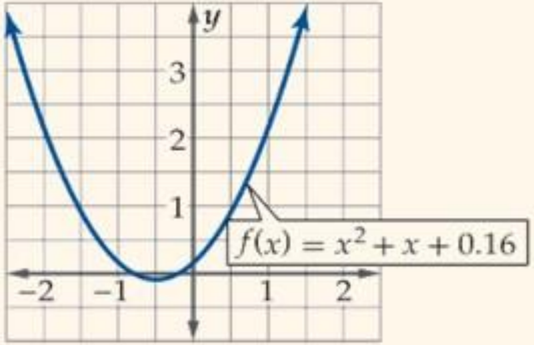
4B) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

مثال 5 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$ ؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0.
مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.



يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

الموضوع: الاتصال والنهايات

اليوم:

التاريخ:

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

إرشاد: استعمل الآلة الحاسبة البيانية (إذا لزم الأمر)

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

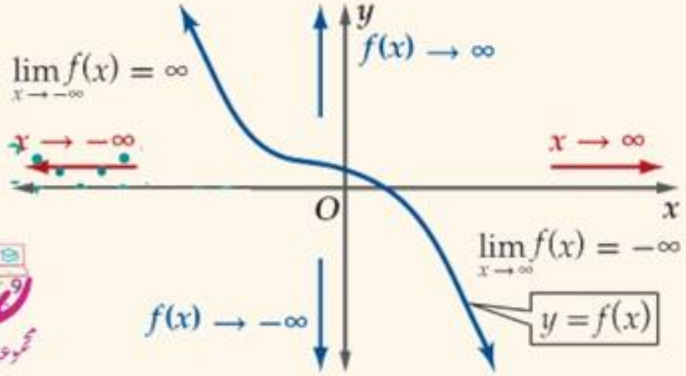
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

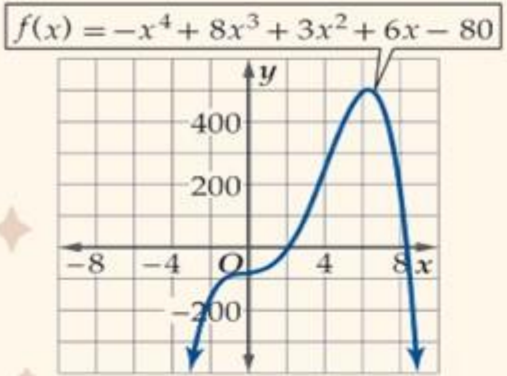
$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.



مثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا :

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ،

وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًا :

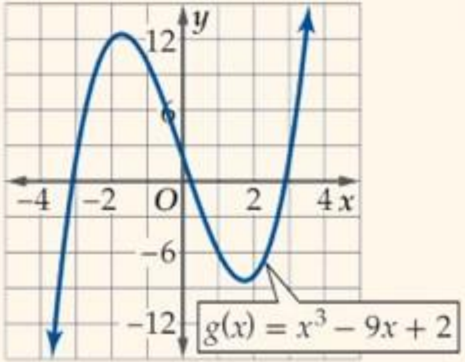
كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	-80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

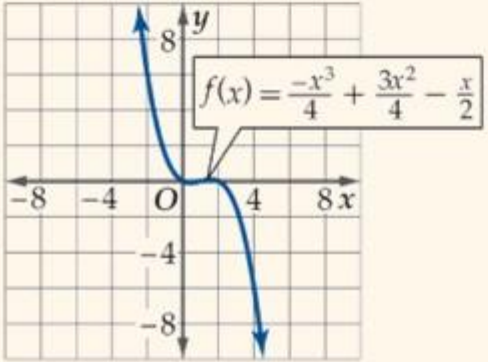
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

6A)



6B)



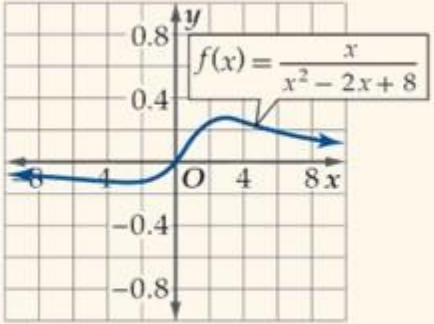
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

مثال 7 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

التعزيز عدديًا:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to 0$ و عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

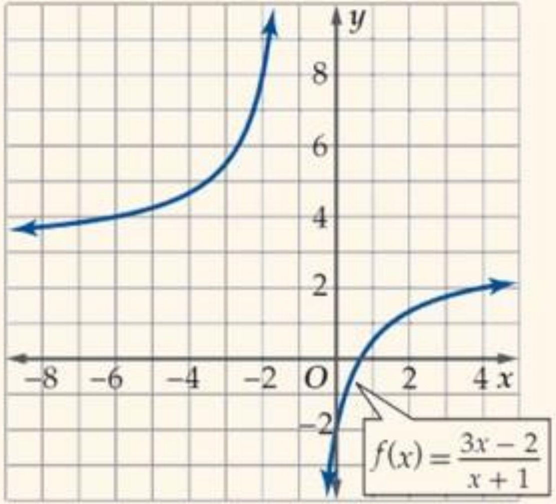
اليوم:

التاريخ:

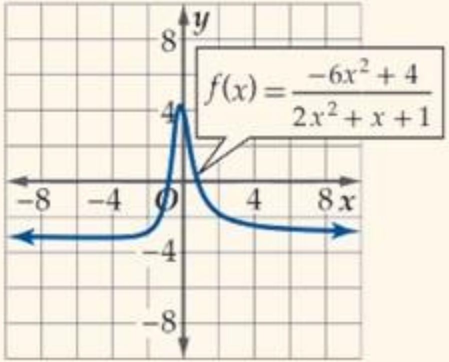
الموضوع: الاتصال والنهايات

تحقق من فهمك

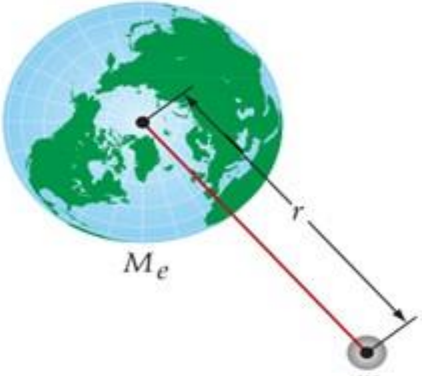
7A)



7B)



فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟



المطلوب من المسألة وصف سلوك طرف التمثيل البياني لِـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيرًا، أي إيجاد $\lim\limits_{r\to\infty} U(r)$.
وبما أن كلًّا من G , m , M_e ثوابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا. وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر؛ لذا فإن $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = 0$ ، ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

تحقق من فهمك

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

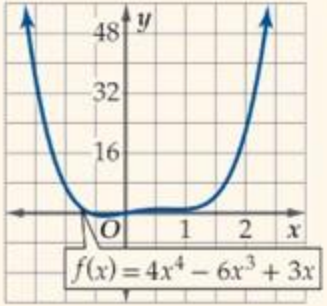
1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، عند $x = -5$.

2) $f(x) = \sqrt{x + 5}$ ، عند $x = 8$.

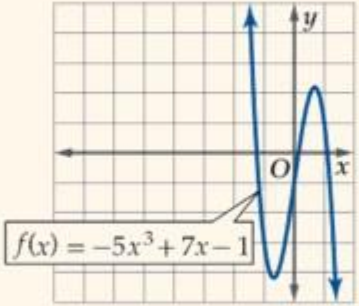
3) $h(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$ ، عند $x = -6$, $x = 6$.

استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا. (المثالان 6, 7)

17)



18)



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

39) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^6}{x^5}$

40) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^5}$

41) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , \quad x \geq 3 \\ bx + a & , \quad -3 < x < 3 \\ -b - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$$

مراجعة تراكمية

استعمل الحاسبةِ البيانية لتمثيل كلٍّ من الدوال الآتية بيانيًا، وتحديد أصفارها. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا: (الدرس 2-1)

47) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x}$

48) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$

49) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

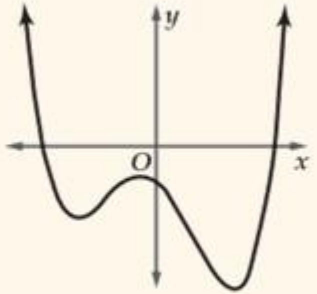
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

تدريب على اختبار

58) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟



A 1

B 2

C 3

D 4

59) في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$؟

A $[6, 7]$

B $[7, 8]$

C $[8, 9]$

D $[9, 10]$

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال	اليوم تعلمت	لم أفهم	الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاتصال والنهايات

الواجب

الموضوع: الاتصال والنهايات

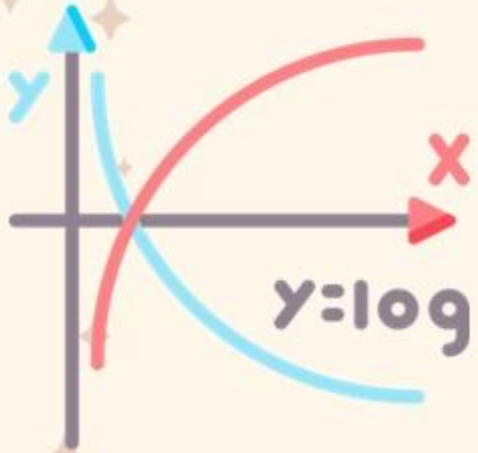
اليوم:

التاريخ:

انتهى درس اليوم

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

Extrema and Average Rates of Change



معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

1-4

القوانين الصفية

إستمعي جيداً لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند المشاركة

حافظي على الممتلكات ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك كفريق

حل الواجبات وإرسالها في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي قصار جهدك

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها

اليوم تفيدك غداً

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أستعمل التمثيل البياني لدالة لأحد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ثابتة متناقصة وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
2. أجد متوسط معدل التغير للدالة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

فيما سبق:

درست كيفية إيجاد قيم الدوال.

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة لأحد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ثابتة متناقصة وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجد متوسط معدل التغير للدالة.

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

اليوم:

التاريخ:

الـمـفـردات

المتزايدة	العظمى	القاطع
المتناقصة	الصغرى	
الثابتة	القصوى	
النقطة الحرجة	متوسط معدل التغير	

اليوم:

التاريخ:

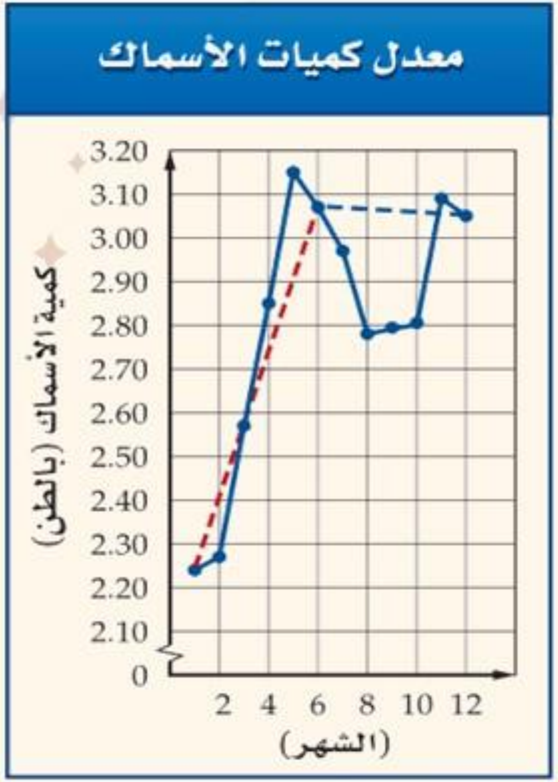
الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

لماذا؟

يبيِّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ.

يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

لماذا؟

ما المواقف التي تفضل فيها الدوال المتزايدة على الدوال المتناقصة؟

عمل أحد رجال الأعمال على تحسين أداء مصنعة بعد ما تراجعت أرباحه فإذا أثمر هذا التحسن خلال الأشهر شوال وذي الحجة فمتى يتغير منحنى دالة الربح من التناقص إلى التزايد؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

لماذا؟

إذا تذبذبت معدلات الإيراد الشهرية لأحد المصانع بين الزيادة والنقصان خلال معدل التغير خلال شهرين؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

اليوم:

التاريخ:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أستعمل التمثيل البياني لدالة لأحد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ثابتة متناقصة وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.

٢- أجد متوسط معدل التغير للدالة.

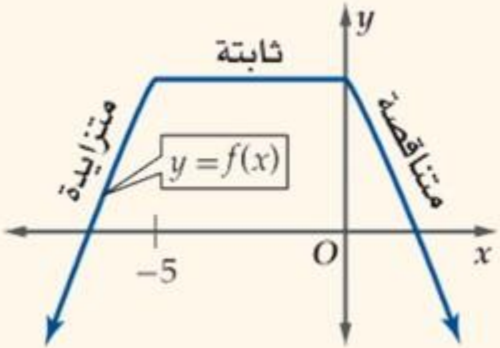
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:



- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

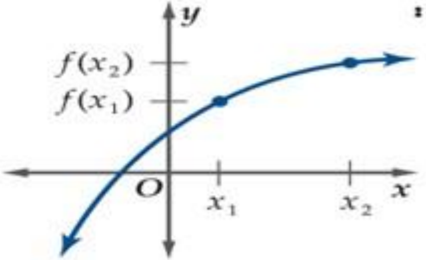
مفهوم أساسي

الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

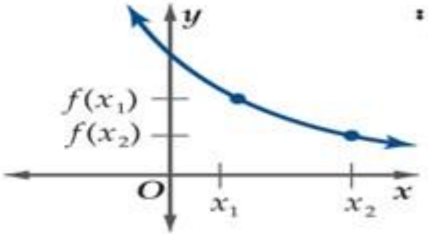
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

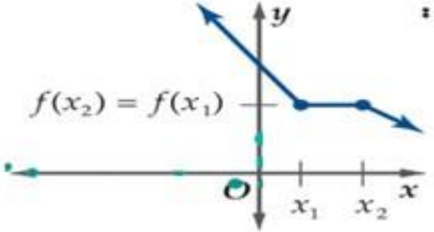
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

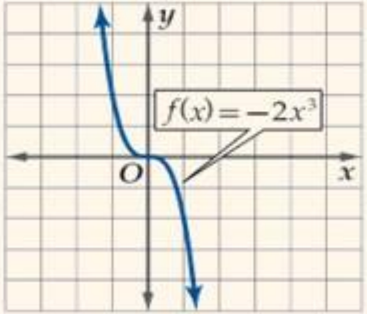
التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًا.

a) $f(x) = -2x^3$



التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x ؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

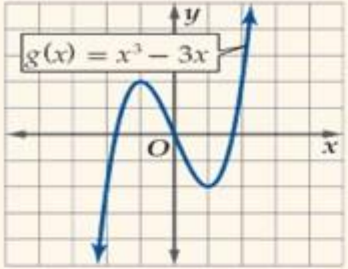
x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x ، تتناقص قيم $f(x)$ ؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًا.

b) $g(x) = x^3 - 3x$



التحليل بيانيًا :

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًا :

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

x	−11	−9	−7	−5	−3	−1
$g(x)$	−1298	−702	−322	−110	−18	2

$(-1, 1)$:

x	−1	−0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	−1.375	−2

$(1, \infty)$:

x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	−2	18	110	322	702	1298

توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1 ، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1 ، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1 ، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

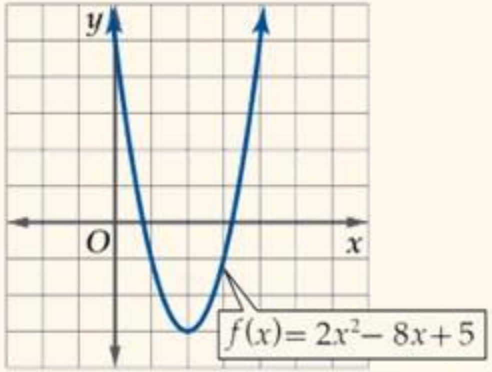
اليوم:

التاريخ:

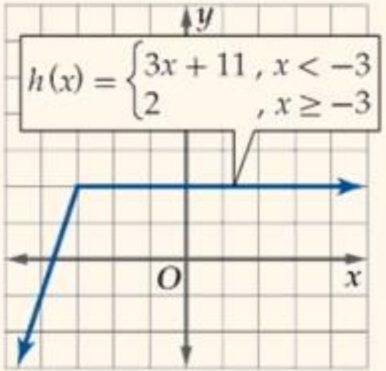
الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

تحقق من فهمك

(1A



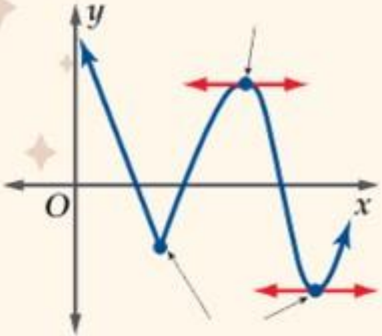
(1B



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير



لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًا أو عموديًا (أي أن ميله صفر أو غيرمعرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

مفهوم أساسي القيم القصوى المحلية والمطلقة

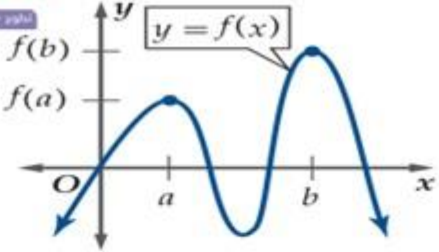
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

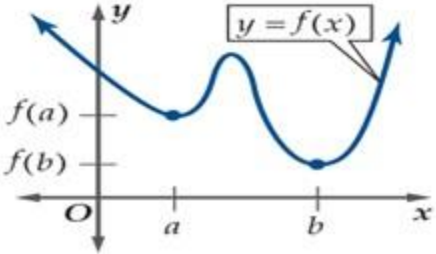
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمّيَت قيمةً صغرى مطلقةً.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

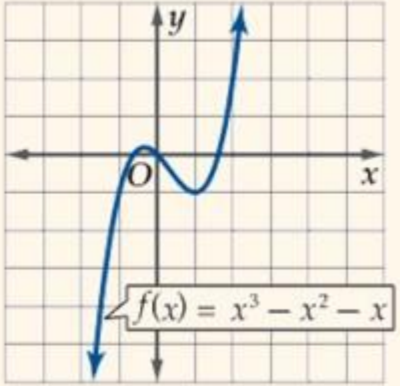
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًا.

التحليل بيانيًا :

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1 . لاحظ كذلك أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها

التعزيز عدديًا:

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

بما أن $f(-1) < f(-0.5)$ و $f(0) < f(-0.5)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(1.5), f(1) < f(0.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولًا.

وبما أن $f(-100) < f(1), f(100) > f(-0.5)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

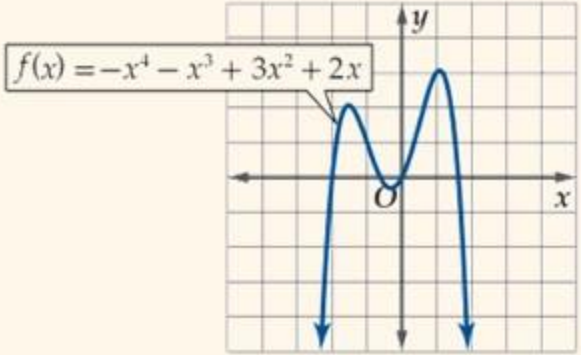
الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

اليوم:

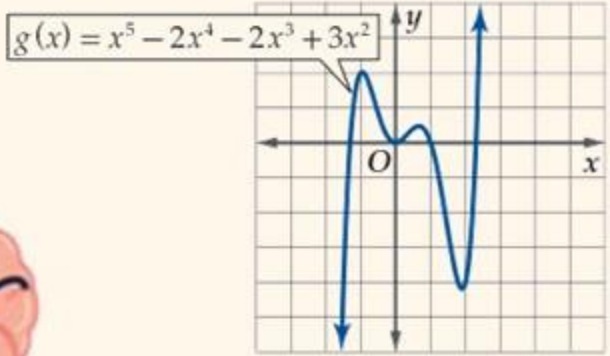
التاريخ:

تحقق من فهمك

(2A



(2B



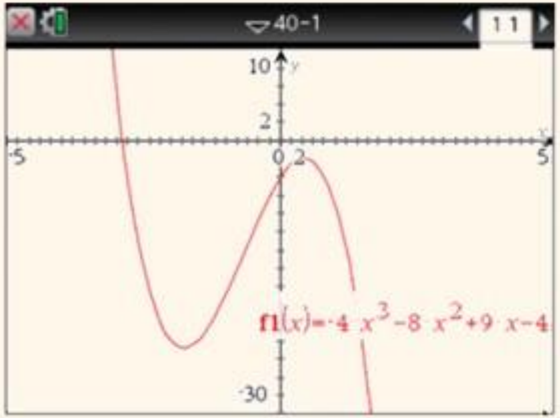
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

الحاسبة البيانية : استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.



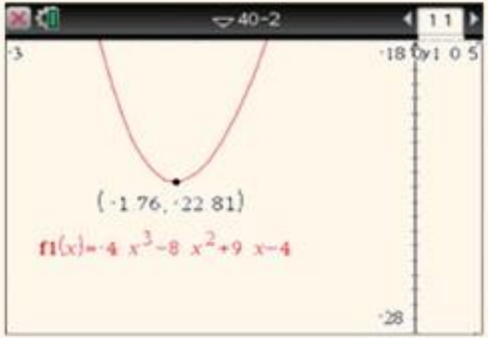
مثّل الدالة بيانيًّا، واختر التدريج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

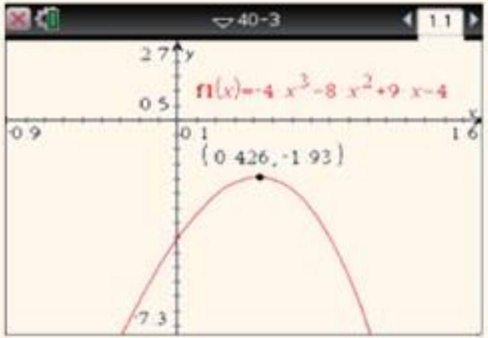
بالضغط على المفاتيح: on ، ثم اكتب الدالة واضغط enter

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محليةٍ واحدة في الفترة $(-2, -1)$ ، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$ ، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اضغط على مفتاح menu ، ثم على 6: تحليل الرسم البياني ، واختر منها 3: القيمة العظمى أو 2: القيمة الصغرى ، ثم مرّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x = -1.76$ ، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$





اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

تحقق من فهمك

$h(x) = 7 - 5x - 6x^2$ (**3A**

$g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$ (**3B**

إن البحث عن الحل الأمثل هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة الأمثل.

مثال 4 من واقع الحياة — تطبيقات القيم القصوى

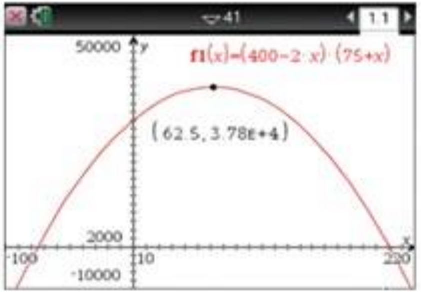
زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان = عدد الأشجار في البستان × إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال

$$f(x) = (75 + x) \times (400 - 2x)$$

المطلوب هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$.
لذا مثِّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح menu، ثم 6: تحليل الرسم البياني، واختر منها 3: القيمة العظمى، ثم مرّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة العظمى، تقدر بـ 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$.



لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

الربط مع الحياة

تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

اليوم:

التاريخ:

تحقق من فهمك

4) صناعة : يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

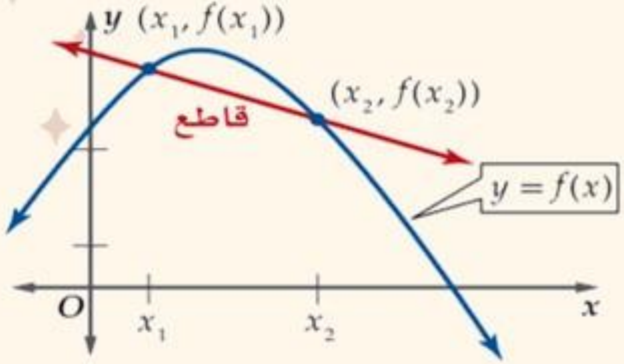
متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

مفهوم أساسي — متوسط معدل التغير



التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز $m_{\sec}$.

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{\sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ عوّض -1 مكان x_2 ، -2 مكان x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ عوّض $f(-1)$ ، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$ بسّط

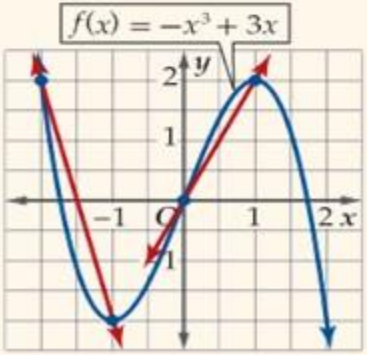
أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4.

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ عوّض 1 مكان x_2 ، 0 مكان x_1

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$ عوّض $f(1)$ ، $f(0)$ وبسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.



الشكل 1.4.1

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2,\ [2, 3]$

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x,\ [-5, -3]$

مثال 6 من واقع الحياة — إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ عوّض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32$$ عوّض $d(2)$ ، $d(0)$ ، وبسّط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ عوّض 4 مكان t_2 ، 2 مكان t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوّض $d(4)$ ، $d(2)$ ، وبسّط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s ، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغي

تحقق من فهمك

6) **فيزياء :** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

اليوم:

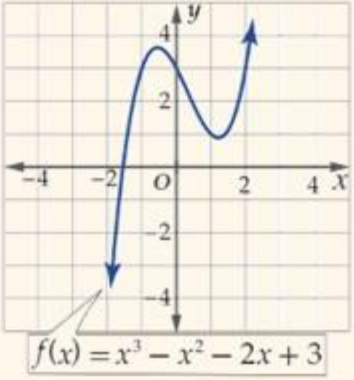
التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

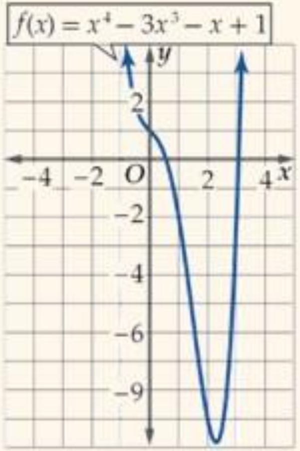
تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزّز إجابتك عدديًّا: (مثال 1)

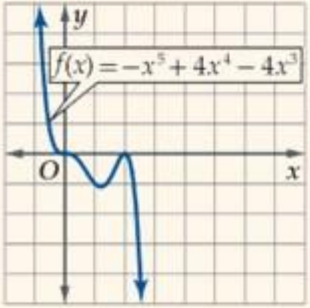
(1



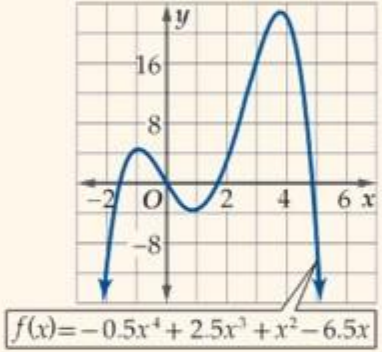
(2



(10



(11



الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3)

(12 $g(x)=-2x^3+7x-5$

(13 $f(x)=x^4-2x^2+5x$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة : مثل بيانيًا الدالة $f(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

42) متصلة

متزايدة على $(-\infty, 4)$

ثابتة على $[4, 8]$

متناقصة على $(8, \infty)$

$f(5) = 3$

43) لها نقطة عدم اتصال لانهائي عند $x = -2$

متزايدة على $(-\infty, -2)$

متزايدة على $(-2, \infty)$

$f(-6) = -6$

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة أو قيم x المعطاة معتمدًا على اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيِّن نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (الدرس 3-1)

49) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}\ , x = -3$

50) $f(x) = \sqrt{x + 1}\ , x = 3$

51) $h(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}\ ; x = -5\ , x = 5$

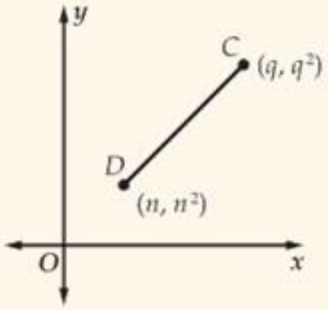
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

تدريب على اختبار

61) في الشكل أدناه، إذا كان $n \neq q$، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD.



A $q + n$

B $q - n$

C $\dfrac{q^2 + q}{n^2 - n}$

D $\dfrac{1}{q + n}$

62) يوجد للدالة $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ قيمة عظمى محلية ، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

C عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

- لدي سؤال
- اليوم تعلمت
- لم أفهم
- الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

انتهى درس اليوم

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

Parent Functions and Transformations

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

1-5

القوانين الصفية

- إستمعي جيداً لنصائح المعلمة
- إرفعي يدك عند المشاركة
- حافظي على الممتلكات ونظافة فصلك
- إعملي مع زميلاتك كفريق
- حل الواجبات وإرسالها في الوقت المحدد
- الالتزام بالوقت
- الاستعداد الجيد وإبذلي قصار جهدك

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها

اليوم تفيدك غداً

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أقوم بتعيين الدوال الرئيسة (الأم) وأصفها وأمثلها بيانياً.

2. أقوم بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة وأمثلها بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

فيما سبق:

درست التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها.

والآن:

- أقوم بتعيين الدوال الرئيسة (الأم) وأصفها وأمثلها بيانياً.
- أقوم بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة وأمثلها بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الـمـفـردات

- الدالة الرئيسة (الأم)
- الدالة التكعيبية
- الدالة الثابتة
- دالة الجذر التربيعي
- الدالة المحايدة
- دالة المقلوب
- الدالة التربيعية
- دالة القيمة المطلقة

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الـمـفـردات

- الدالة الدرجية
- الانعكاس
- دالة أكبر عدد صحيح
- التمدد
- التحويل الهندسي
- الإزاحة (الانسحاب)

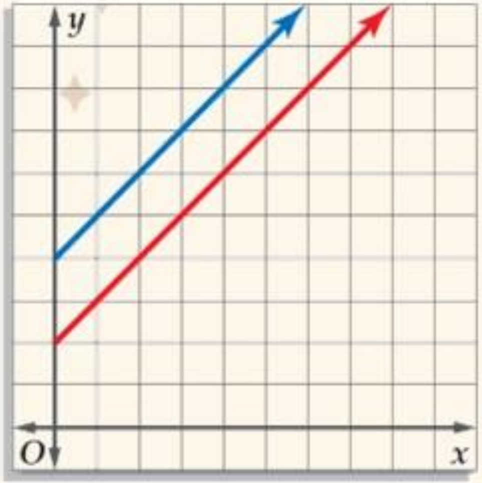
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

لماذا؟

استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.



الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

اليوم:

التاريخ:

لماذا؟

ما أوجه الشبه والاختلاف بين الدالتين

$f(x) = x$ و $g(x) = x + 2$ ؟

صنف أثر قيم a المختلفة في الدالة $f(x) = x + a$.

تعمل قيم a في انسحاب

ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدالتين

$f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 2$ ؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أقوم بتعيين الدوال الرئيسة (الأم) وأصفها وأمثلها بيانياً.

٢- أقوم بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة وأمثلها بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

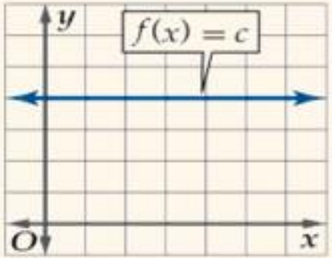
الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

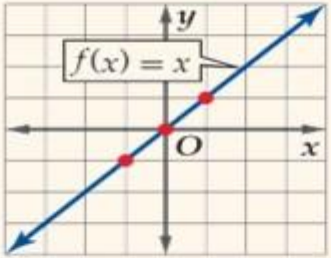
مفهوم أساسي

الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

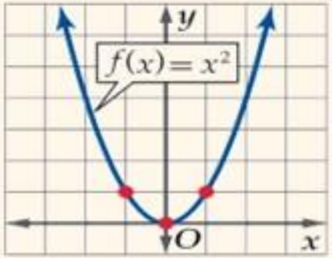
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّلُ بمستقيم أفقي.



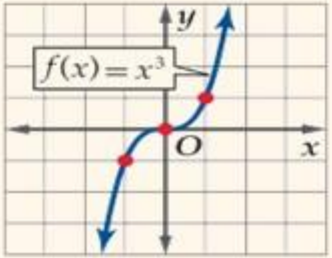
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



مجموعة رفعة الرياضيات

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

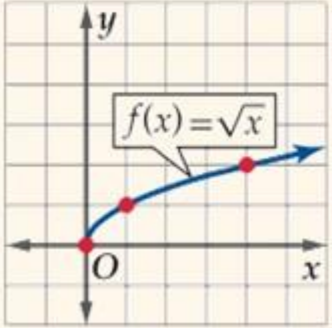
اليوم:

التاريخ:

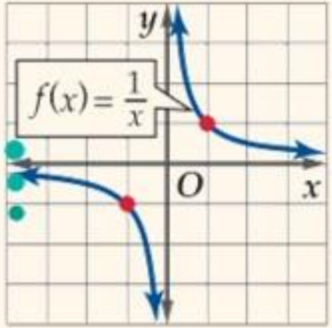
مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ x \geq 0$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\ ,\ x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

مفهوم أساسي

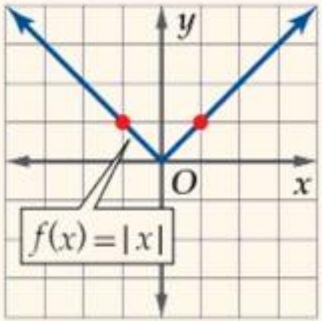
دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, \ |0| = 0, \ |4| = 4$

النموذج



أما **الدالة الدرجية**، فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

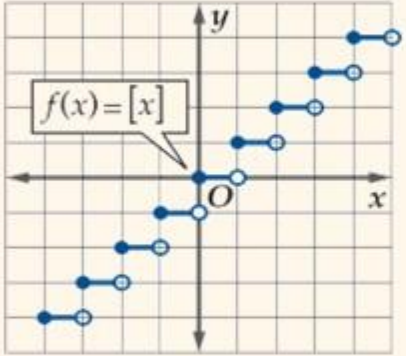
مفهوم أساسي

دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

أمثلة: $[-4] = -4, [-1.5] = -2, [\frac{1}{3}] = 0$

النموذج



اليوم:

التاريخ:

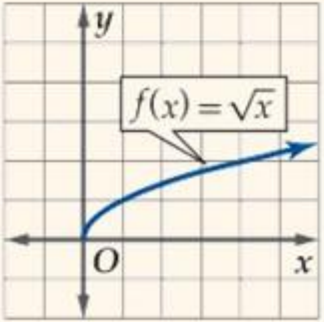
الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

مثال 1 وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل **1.5.1**): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

تحقق من فهمك

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: **الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية**

التحويلات الهندسية : تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعض التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: **الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية**

الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

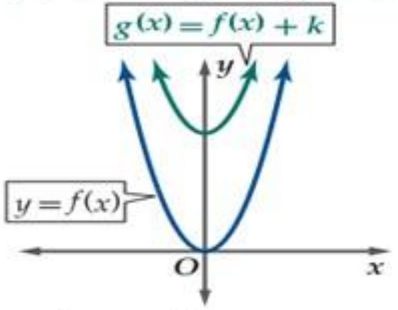
مفهوم أساسي

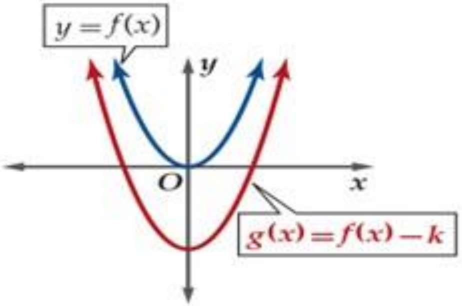
الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

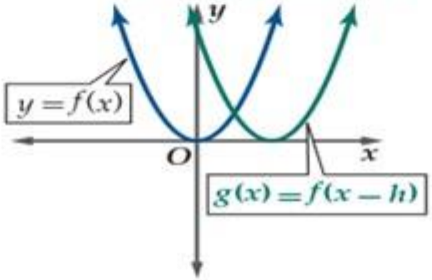


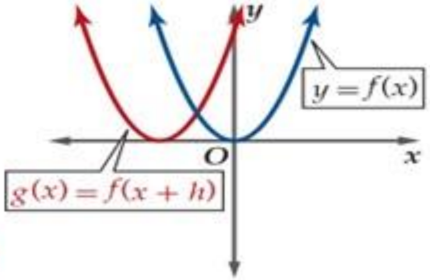


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

مثال 2 انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 4$

هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

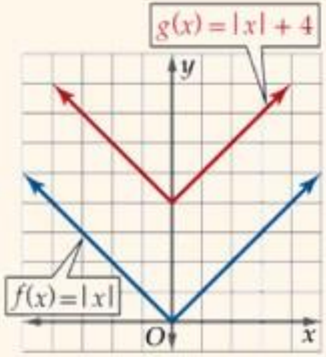
مجموعة رفعة الرياضيات

مثال 2 انسحاب منحنى الدالة

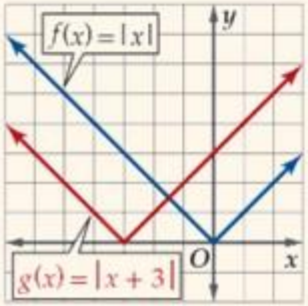
استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

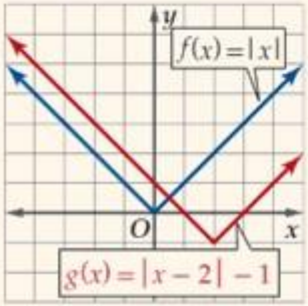
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

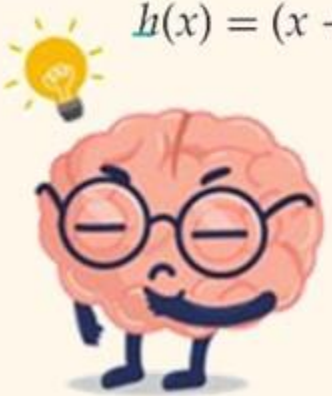
تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

(2A $h(x) = x^3 - 5$

(2B $h(x) = 8 + x^3$

(2C $h(x) = (x+2)^3 + 4$



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

مجموعة رفعة الرياضيات

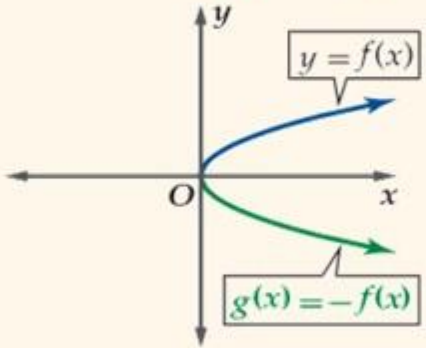
من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس**، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

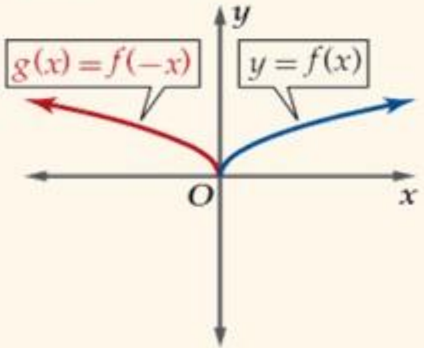
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x .



الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .

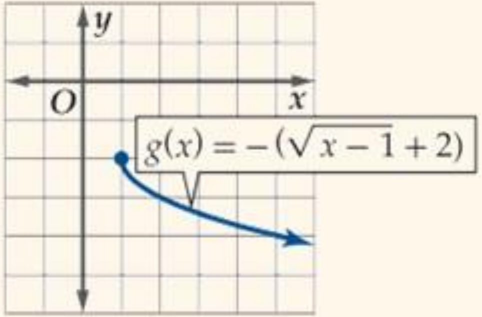


اليوم:

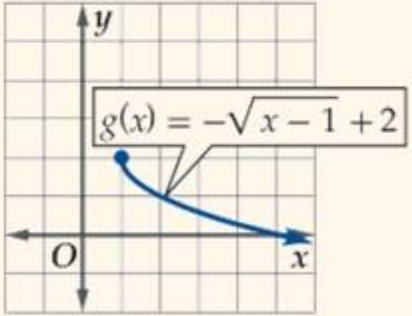
التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -\left(\sqrt{x-1} + 2\right)$.



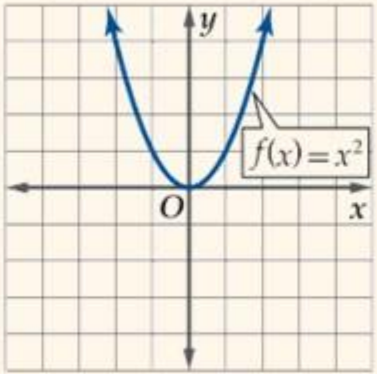
انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

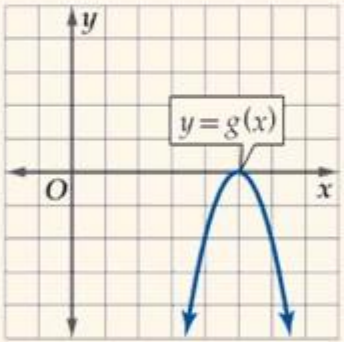
مثال 3 كتابة معادلات التحويل

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



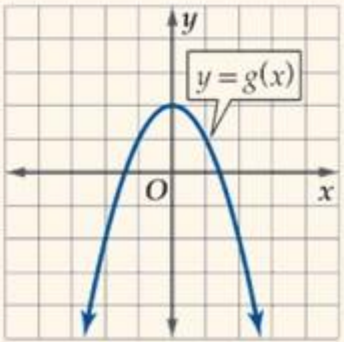
الشكل 1.5.5

a)



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x، أي أن $g(x) = -(x - 5)^2$.

b)



منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

اليوم:

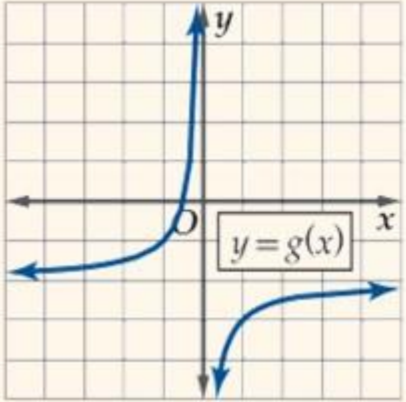
التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

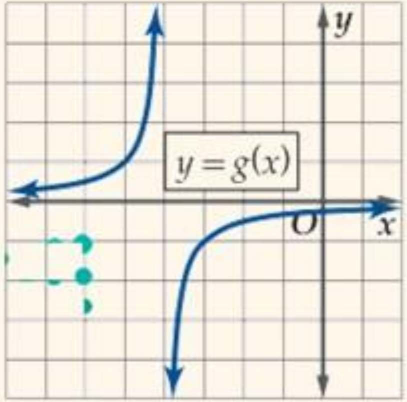
تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3A



(3B



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

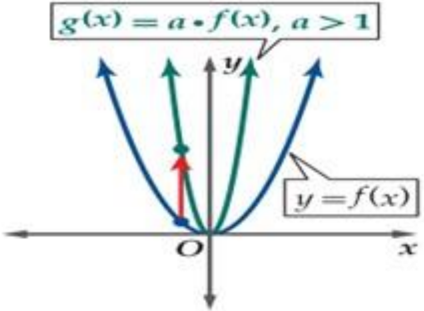
مفهوم أساسي

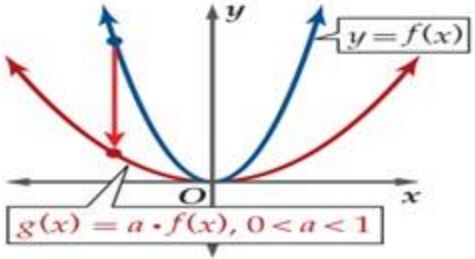
التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$

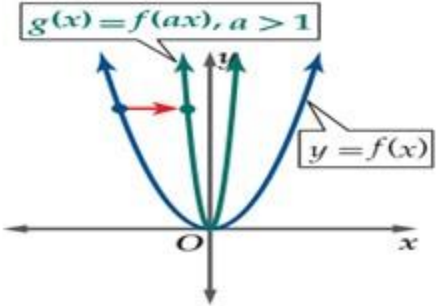


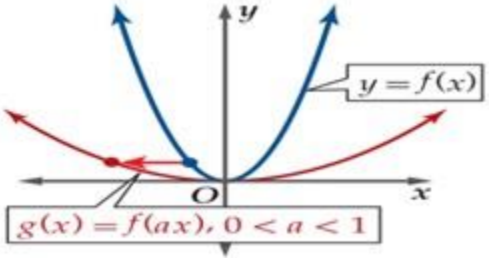


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$



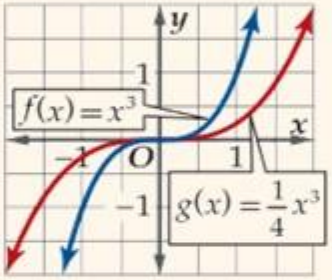


مـثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

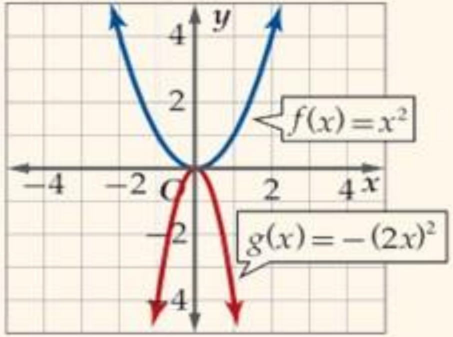
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(2x)^2$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ أولًا؛ لأن $f(x) = x^2, f(2x) = (2x)^2$ وَ $2 > 1$، ثم انعكاس حول المحور x؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

تحقق من فهمك

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

4B) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

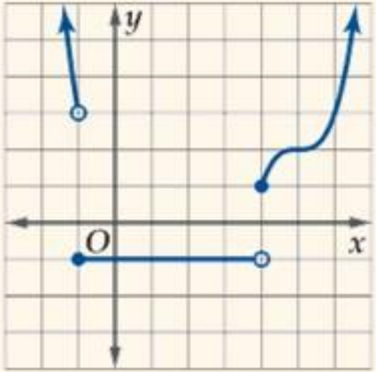
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

مثال 5 تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانيًا

مثّل الدالة بيانيًا: $f(x)=\begin{cases}3x^2 & , \quad x<-1\\ -1 & , \quad -1\le x<4\\ (x-5)^3+2 & , \quad x\ge 4\end{cases}$.



في الفترة $(-\infty, -1)$، أمثّل الدالة $y = 3x^2$.

في الفترة $[-1, 4)$، أمثّل الدالة الثابتة $y = -1$.

في الفترة $[4, \infty)$ أمثّل الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطة عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

تحقق من فهمك

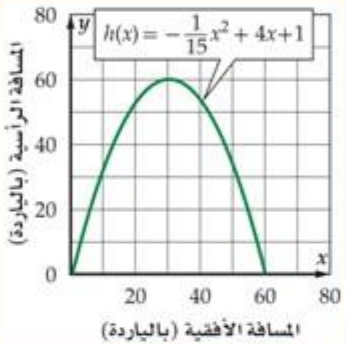
5A) $g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \leq 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$

5B) $h(x) = \begin{cases} (x+6)^2 & , \quad x < -5 \\ 7 & , \quad -5 \leq x \leq 2 \\ |4 - x| & , \quad x > 2 \end{cases}$

مثال 6 من واقع الحياة

كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.

مسار الكرة



أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x-h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

$h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$	الدالة الأصلية
$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$	حلّل $-\frac{1}{15}x^2 + 4x$
$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$	أكمل المربع
$= -\frac{1}{15}(x-30)^2 + 61$	اكتب $x^2 - 60x + 900$ على صورة مربع كامل ثم بسّط

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

الربط مع الحياة

SAUDI ARABIAN FOOTBALL FEDERATION

تأسس الاتحاد العربي السعودي لكرة القدم عام 1956 م، وقد انضم إلى الفيفا والاتحاد الآسيوي في العام نفسه.

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

تحقق من فهمك

6) كهرباء: إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

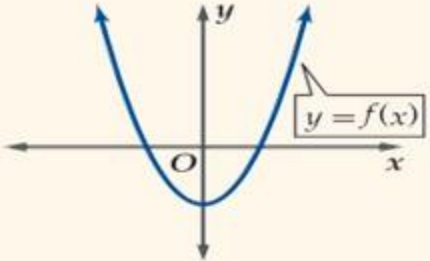
B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

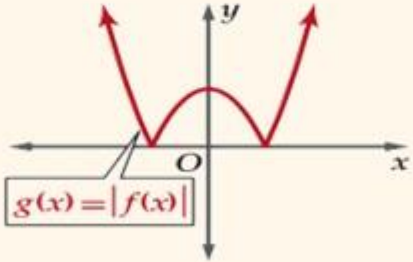
مفهوم أساسي

التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$$g(x) = |f(x)|$$

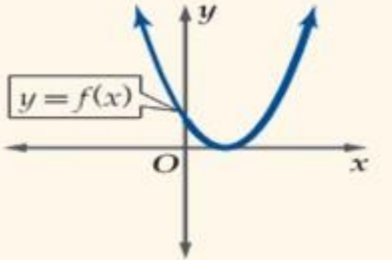
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

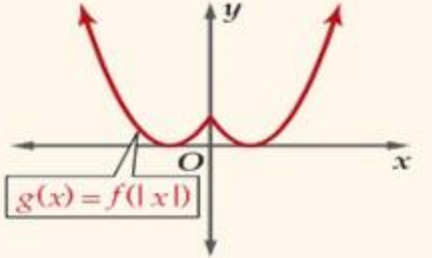




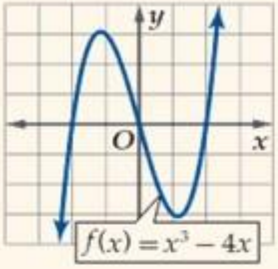
$$g(x) = f(|x|)$$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





مثال 7 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

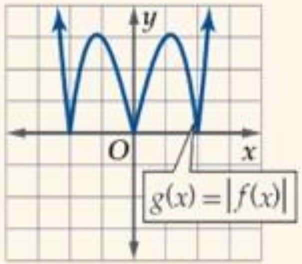


الشكل 1.5.6

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

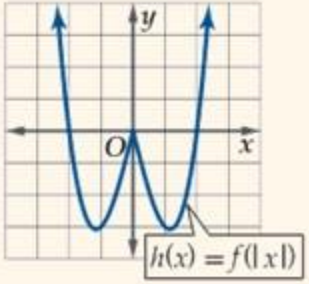
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

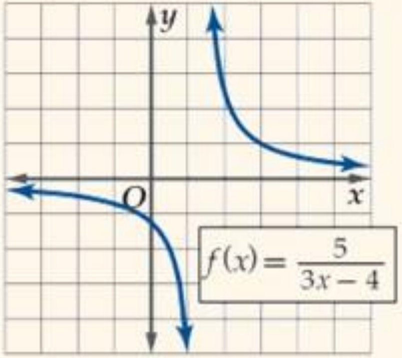
اليوم:

التاريخ:

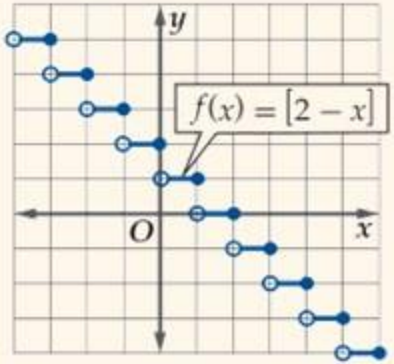
تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

(7A



(7B



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

تدرب وحل المسائل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال 1)

1) $f(x) = [x]$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$

3) $f(x) = x^3$

4) $f(x) = x^2$

5) $f(x) = c$

6) $f(x) = x$

مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًا: (مثال 5)

21) $$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -2 \\ 3 & , \quad -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$$

22) $$g(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < -6 \\ \frac{1}{x} & , \quad -6 \le x < 4 \\ 6 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

مسائل مهارات التفكير العليا

50) **اكتشف الخطأ:** وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [x + 4]$. فقال محمد: أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار. وقال عبد الملك: إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى أعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

51) **تبرير:** إذا كانت $f(x)$ دالة فردية وكانت $g(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x و $h(x)$ انعكاسًا للدالة $g(x)$ حول المحور y ، فما العلاقة بين $h(x)$, $f(x)$؟ برِّر إجابتك.

مراجعة تراكمية

أوجد متوسط معدل التغير لكلٍّ من الدوال الآتية في الفترة المعطاة: (الدرس 4-1)

57) $g(x) = -2x^2 + x - 3, [-1, 3]$

58) $g(x) = x^2 - 6x + 1, [4, 8]$

59) $f(x) = -2x^3 - x^2 + x - 4, [-2, 3]$

مجموعة رفعة الرياضيات

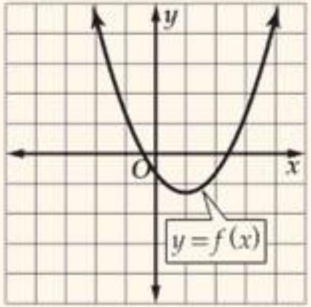
الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

اليوم:

التاريخ:

تدريب على اختبار

66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟



A $(0,\infty)$

B $(-\infty,1)$

C $(-1,\infty)$

D $(1,\infty)$

67) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2+8}{2}$ ؟

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل
منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما
تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال

اليوم تعلمت

لم أفهم

الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

انتهى درس اليوم

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

Function Operations and Composition of Functions

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

1-6

القوانين الصفية

إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند
المشاركة

حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك
كفريق

حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أُجري العمليات على الدوال.
2. أجد تركيب الدوال.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوال.

والآن:

- ❖ أجري العمليات على الدوال.
- ❖ أجد تركيب الدوال.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

الــمــفــردات

تركيب الدالتين

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

لماذا؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الملك سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

لماذا؟

إذا تم بيع منتجين بمتوسط شهري مختلف، فكيف يمكنك المقارنة بين المتوسطين؟

تهتم شركة بالنسبة بين عدد البيوت التي تم بيعها والبيوت المعروضة للبيع، فما العبارة التي تدل على هذه النسبة؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أُجري العمليات على الدوال.

٢- أجد تركيب الدوال.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

العمليات على الدوال: ستتعلمُ في هذا الدرس إجراءَ العمليات الأربع على الدوال.

مفهوم أساسي

العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

الضرب: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

القسمة: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مثال 1 العمليات على الدوال

إذا كانت $h(x) = 3x - 5$ ، $g(x) = \sqrt{x+2}$ ، $f(x) = x^2 + 4x$ ، فأوجد كلًّا من الدوال الآتيةِ، ثم حدد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2 + 4x) + (\sqrt{x+2})$$
$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$ ؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f, g ، وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f-h)(x)$

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (x^2 + 4x) - (3x - 5)$$
$$= x^2 + 4x - 3x + 5$$
$$= x^2 + x + 5$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$،
لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c) $(f \cdot h)(x)$

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$$
$$= (x^2 + 4x)(3x - 5)$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x$$
$$= 3x^3 + 7x^2 - 20x$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛
لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$
ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو
$\{x \mid x \neq 0 , x \neq -4, x \in R\}$.

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

(1A $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(1B $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x - 3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$ ، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

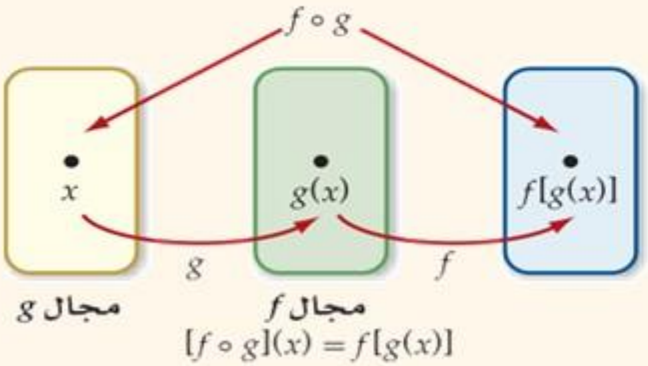
مفهوم أساسي

تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f وَ g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيثُ تُطبَّقُ الدالة g أولًا ثم الدالة f.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

مثال 2 تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x - 4)$ $g(x) = x - 4$

$= (x - 4)^2 + 1$ عوّض $(x - 4)$ بدلًا من x في $f(x)$

$= x^2 - 8x + 16 + 1$ بسّط

$= x^2 - 8x + 17$

مثال 2 تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف $g \circ f$
$= g(x^2 + 1)$	$f(x) = x^2 + 1$
$= (x^2 + 1) - 4$	عوّض $(x^2 + 1)$ بدلًا من x في $g(x)$
$= x^2 - 3$	بسّط

c) $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع **a** عندما $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ عوّض 2 مكان x في $x\ 2 - 8x + 17$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

بما أن مجال كل من f, g في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$ ، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ ، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] \qquad \text{تعريف } f \circ g$$

$$= f(x^2 - 9) \qquad g(x) = x^2 - 9$$

$$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8} \qquad \text{عوّض } (x^2 - 9) \text{ بدلًا من } x \text{ في } f(x)$$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2} , x \in R\}$.

مـثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

b) $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x-3}$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$، ونطرح منها 2.
لذا فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.
نجد الآن $[f \circ g](x)$:

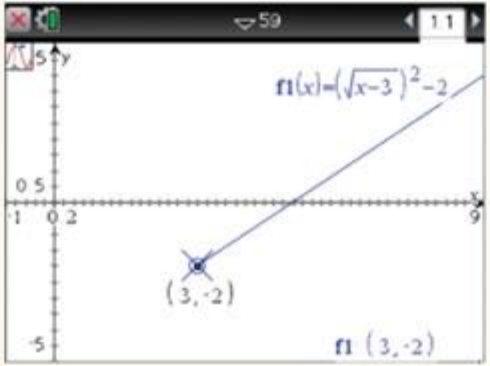
$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f\left(\sqrt{x-3}\right)$	$g(x) = \sqrt{x-3}$
$= \left(\sqrt{x-3}\right)^2 - 2$	عوّض $\sqrt{x-3}$ بدلاً من x في $f(x)$
$= x - 3 - 2 = x - 5$	بسّط

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$؛ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$ ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

التحقق: استعمل الحاسبة البيانية لاختبار الإجابة. أدخل الدالة $f1(x) = (\sqrt{x-3})^2 - 2$. فيظهر التمثيل جزءًا من المستقيم $y = x - 5$. استعمل الإمكانات المتاحة في الحاسبة البيانيّة بالضغط على مفتاح menu، ثم على 5: تتبع المسار ، واختر منها 1: تتبع مسار التمثيل ؛ لمساعدتك على تحديد مجال $f \circ g$ والذي يبدأ عند $x = 3$ ويمتد إلى ∞ .



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \sqrt{x+1}\,,\ g(x) = x^2 - 1$

3B) $f(x) = \frac{5}{x}\,,\ g(x) = x^2 + x$

مثال 4 كتابة الدالة كتركيب دالتين

أوجد دالتين f , g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x + 5$ ، وعندئذٍ:

$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

b) $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

لاحظ أن الدالة h يمكن أن تكتب كتركيب دالتين f, g حيث يمكن اختيار $g(x) = -7x$، وكتابة: $h(x) = \sqrt{-7x} - 9^{(-7x)}\text{\_}7$ وعندئذ: $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{7}$

$$h(x) = \sqrt{-7x} - 9^{(-7x)}\text{\_}7 = \sqrt{g(x)} - 9^{(g(x))}\text{\_}7 = f(g(x)) = [f \circ g](x)$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تحقق من فهمك

4A) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

4B) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

مثال 5 من واقع الحياة على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية: تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $\mathrm{L} + 40$.
أي أن مساحة المستطيل $A(L) = \mathrm{L}\,(\mathrm{L} + 40) = \mathrm{L}^2 + 40\mathrm{L}$، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $\mathrm{L}(t) = 20 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$	تعريف $A \circ L$
$= A(20 + 15t)$	$L(t) = 20 + 15t$
$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$	عوّض $(20 + 15t)$ بدلًا من L في $A(L)$
$= 225t^2 + 1200t + 1200$	بسِّط

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن

مثال 5 من واقع الحياة على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية: تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟

مساحة المستطيل الأصلي 60×20 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. وبحل المعادلة بالنسبة إلى t تجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. وبما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال $L(t)$، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريبًا.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تحقق من فهمك

5) **أعمال:** أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تدرب وحل المسائل

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$ للدالتين $g(x)$, $f(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1)

1) $f(x) = x^2 + 4$

$g(x) = \sqrt{x}$

2) $f(x) = 8 - x^3$

$g(x) = x - 3$

3) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

$g(x) = x + 2$

4) $f(x) = x^2 + x$

$g(x) = 9x$

حدِّد مجال $f \circ g$ ، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 3)

15) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$g(x) = x^2 - 4$

16) $f(x) = \frac{2}{x-3}$

$g(x) = x^2 + 6$

17) $f(x) = \sqrt{x+4}$

$g(x) = x^2 - 4$

18) $f(x) = \frac{5}{x}$

$g(x) = \sqrt{6-x}$

19) $f(x) = -\frac{4}{x}$

20) $f(x) = \sqrt{x+5}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كانت الدالة $(f \circ g)(x)$ زوجية، أم فردية أم غير ذلك.

65) f, g دالتان فرديتان.

66) f, g دالتان زوجيتان.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكلٍّ من الدوال الآتية مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة، ثم حدّد قيم x التي تقع عندها هذه القيم: (الدرس 4-1)

75) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

76) $g(x) = -x^3 + 5x - 3$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تدريب على اختبار

81) إذا كانت $g(x) = x^2 + 9x + 21$, $h(x) = 2(x-5)^2$ ، فإن $[h \circ g](x)$ تساوي:

A $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$

B $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

C $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$

D $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

82) إذا كان $f(2)=3, g(3)=2, f(3)=4, g(2)=5$ ، فما قيمة $[f \circ g](3)$؟

A 2

B 3

C 4

D 5

مجموعة رفعة الرياضيات

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال	اليوم تعلمت	لم أفهم	الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

الواجب

اليوم:

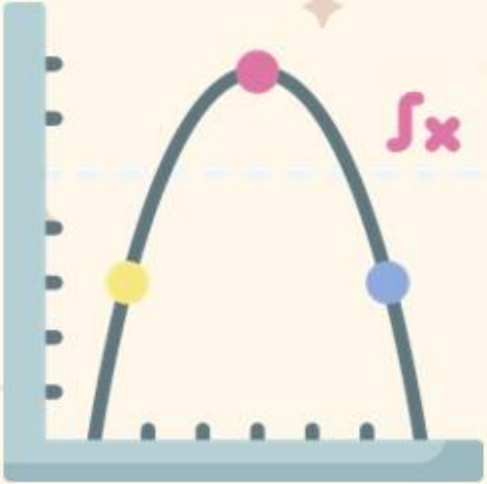
التاريخ:

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

انتهى درس اليوم

العلاقات والدوال العكسية

Inverse Relations and Functions



معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

1-7

القوانين الصفية

إستمعي جيداً لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند المشاركة

حافظي على الممتلكات ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك كفريق

حل الواجبات وإرسالها في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي قصار جهدك

كن **صبوراً**؛ الدروس التي تتعلمها
اليوم تفيدك **غداً**

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أستعمل اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.

2. أجد الدالة العكسية جبرياً وبيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

فيما سبق:

درست إيجاد تركيب دالتين.

والآن:

- ❖ أستعمل اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.
- ❖ أجد الدالة العكسية جبرياً وبيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

المفردات

العلاقة العكسية

الدالة العكسية

الدالة المتباينة

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

لماذا؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

مجموعة رفعة الرياضيات

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أستعمل اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.

٢- أجد الدالة العكسية جبرياً وبيانياً.

اليوم:

التاريخ:

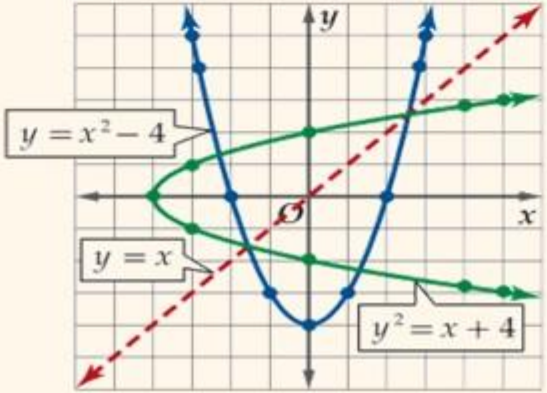
الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

الدالة العكسية : العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلًّا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالَّ. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لِـ f، ويرمز لها بالرمز f^{-1} .

لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

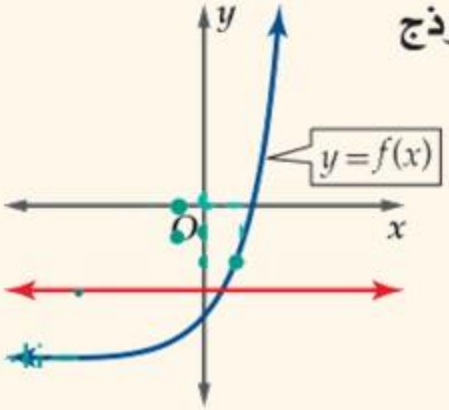
مفهوم أساسي

اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج



اليوم:

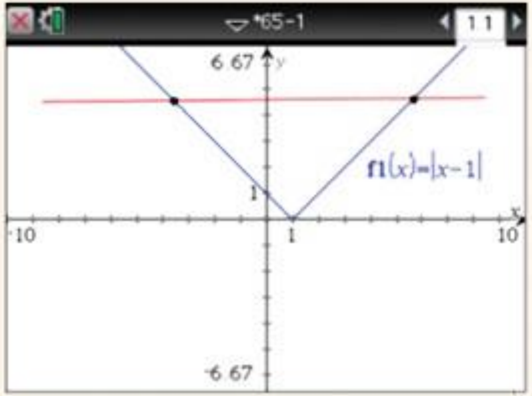
التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

a) $f(x) = |x - 1|$



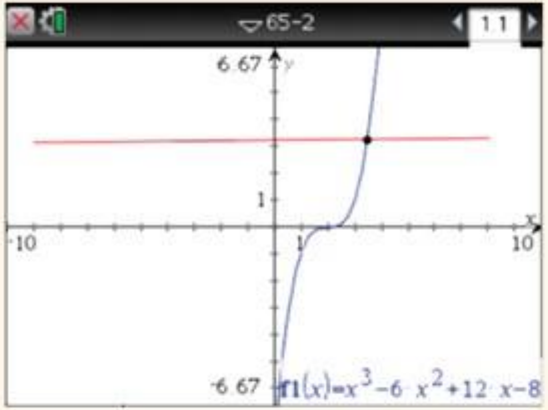
يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

تحقق من فهمك

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$

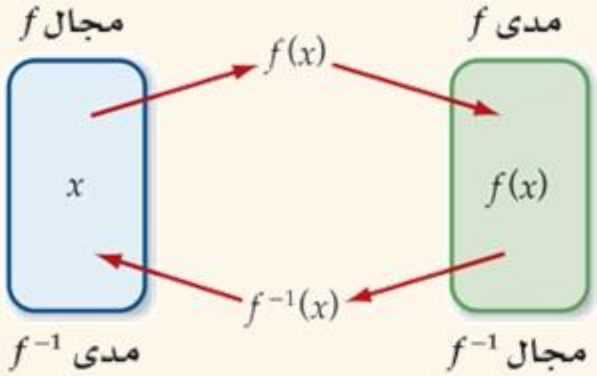
الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

اليوم:

التاريخ:

إيجاد الدالة العكسية : إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y، ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y .

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y ، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1} . وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}.

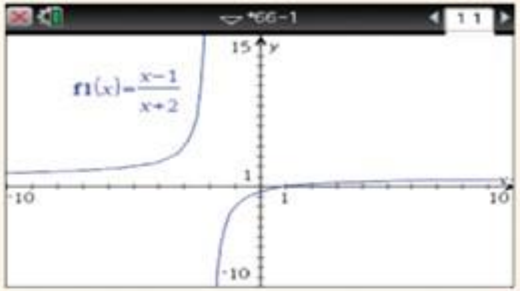
مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

يوضِّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

والآن أوجد f^{-1}.



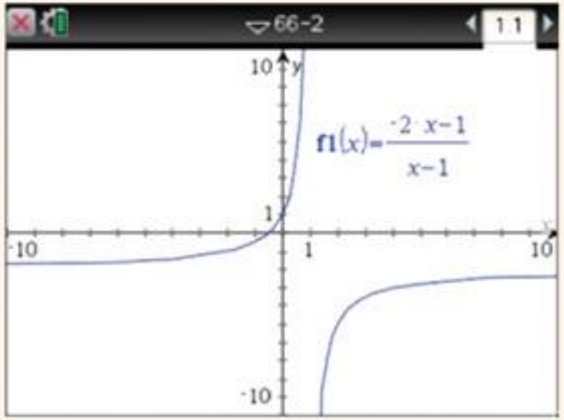
$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$	الدالة الأصلية
$y = \dfrac{x-1}{x+2}$	عوِّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \dfrac{y-1}{y+2}$	بدِّل بين x, y
$xy + 2x = y - 1$	اضرب الطرفين في $(y + 2)$، ثم طبق خاصية التوزيع
$xy - y = -2x - 1$	ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد
$y(x-1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	حل بالنسبة لـ y
$f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	عوِّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y، لاحظ أن $x \neq 1$

مجموعة رفعة الرياضيات

مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

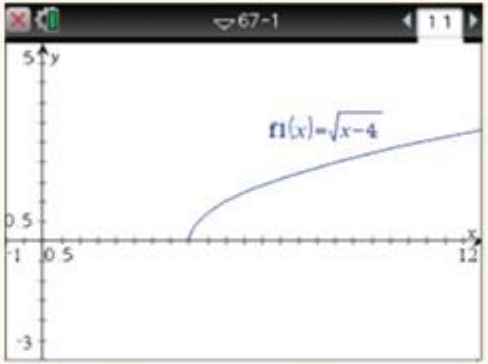


يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$،
ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان
مدى ومجال f^{-1} على الترتيب.
لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1}.

مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$

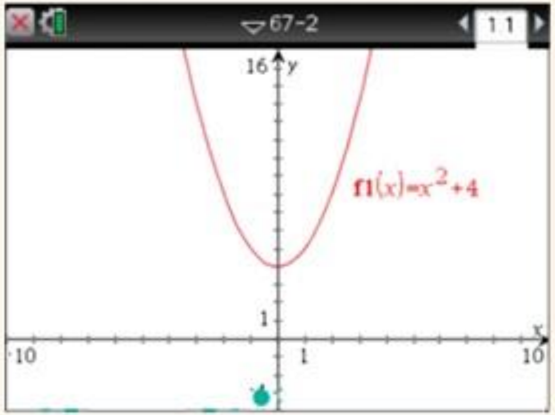


يوضّح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة f متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $[4, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x-4}$	الدالة الأصلية
$y = \sqrt{x-4}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \sqrt{y-4}$	بدّل بين x و y
$x^2 = y - 4$	ربّع الطرفين
$y = x^2 + 4$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.



يظهر من التمثيل البياني المجاور أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$، ومداها $[4, \infty)$. ومن ثم فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًا لمدى f وهو $[0, \infty)$، ويبقى مداها $[4, \infty)$. والآن يصبح مجال f ومداها مساويان لمدى f^{-1} ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

تحقق من فهمك

2A) $f(x) = -16 + x^3$

2B) $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$

2C) $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي — تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ **لجميع قيم x في مجال** $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ **لجميع قيم x في مجال** $f(x)$.

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

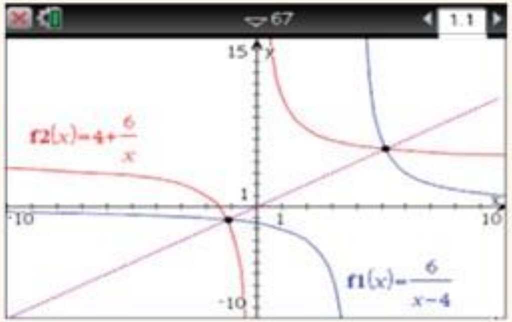
مثال 3 إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وَ $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4} = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 = x - 4 + 4 = x$$



بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، فإن كلًّا من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

اليوم:

التاريخ:

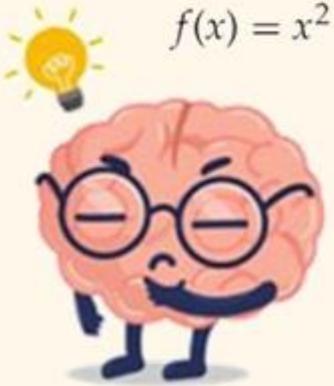
الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

تحقق من فهمك

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A) $f(x) = 18 - 3x\,,\, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

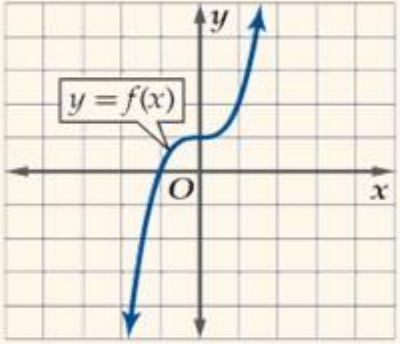
3B) $f(x) = x^2 + 10\,,\, x \geq 0\,,\, g(x) = \sqrt{x - 10}$



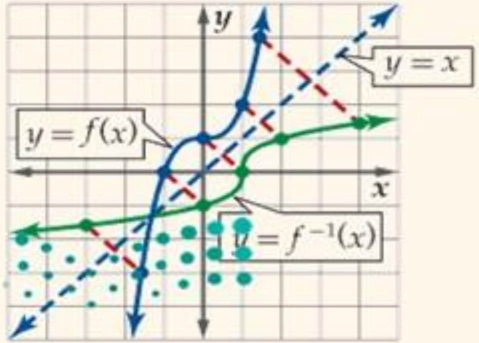
مثال 4 إيجاد الدالة العكسية بيانيًّا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3



الشكل 1.7.4

اليوم:

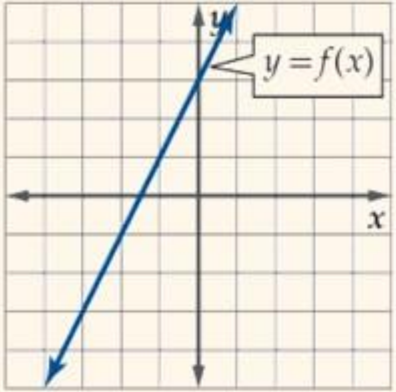
التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

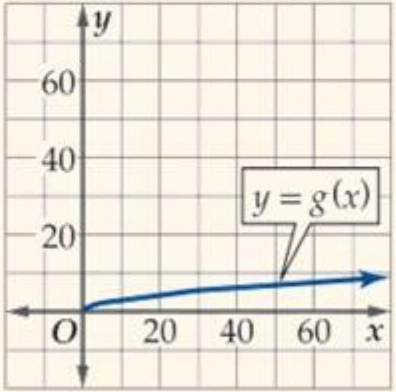
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًّا:

(4A



(4B



مثال 5 من واقع الحياة استعمال الدالة العكسية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$
أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 24x - 320$	الدالة الأصلية
$y = 24x - 320$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = 24y - 320$	بدّل بين x و y
$x + 320 = 24y$	أضف 320 إلى الطرفين
$y = \dfrac{x + 320}{24}$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = \dfrac{x + 320}{24}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

مثال 5 من واقع الحياة استعمال الدالة العكسية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضّح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى 105 ساعات؛ لذا فإن مجال $f(x)$ هو $[40, 105]$. و بما أن $f(105) = 2200$, $f(40) = 640$ ، فإن مدى $f(x)$ هو $[640, 2200]$ ، وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

$f^{-1}(760) = \frac{760 + 320}{24} = 45$ أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

تحقق من فهمك

5) توفير: يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من x, $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x)$, $f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرِّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

تدرب وحل المسائل

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$

2) $y = x^2 - 16x + 64$

3) $y = 3x - 8$

4) $y = 4$

5) $y = \sqrt{x + 4}$

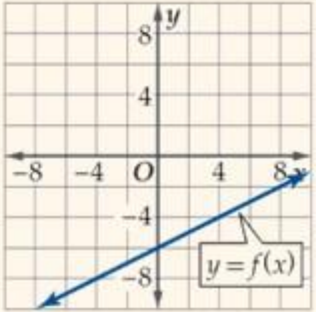
6) $y = -4x^2 + 8$

7) $y = \dfrac{8}{x + 2}$

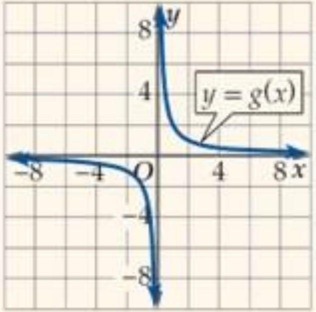
8) $y = \dfrac{1}{4}x^3$

استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها: (مثال 4)

27)



28)



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

مسائل مهارات التفكير العليا

56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرًا عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟

57) **اكتب:** وضح القيود التي يجب وضعها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية. وضّح بمثال.

58) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برِّر إجابتك.

"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

مراجعة تراكمية

لكل زوج من الدوال الآتية، أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$، ثم أوجد مجال دالة التركيب: (الدرس 6-1)

61) $f(x) = x^2 - 9$

$g(x) = x + 4$

62) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$

$g(x) = x + 6$

تدريب على اختبار

68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x-5}{2}$؟

A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

69) إذا كان كل من m و n عددًا صحيحًا فرديًا، فأي العبارات الآتية صحيحة؟

I) $m^2 + n^2$ عدد زوجي

II) $m^2 + n^2$ يقبل القسمة على 4

III) $(m+n)^2$ يقبل القسمة على 4

A كلها غير صحيحة

B I فقط

C I و II فقط صحيحتان

D I و III فقط صحيحتان

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل
منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما
تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال	اليوم تعلمت	لم أفهم	الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

انتهى درس اليوم

مجموعة رفعة الرياضيات

٢

الفصل الثاني

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الدوال الأسية
Exponential Functions

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

2-1

القوانين الصفية

إستمعي جيداً لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند المشاركة

حافظي على الممتلكات ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك كفريق

حل الواجبات وإرسالها في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي قصار جهدك

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا اللّٰه ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أتعرف الدالة الأسية.
2. أمثل دوال النمو الأسي بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

فيما سبق:

درست دوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانياً.

والآن:

- ❖ أتعرف الدالة الأسية.
- ❖ أمثل الدالة الأسية.
- ❖ أمثل دوال النمو الأسي بيانياً.
- ❖ أمثل دوال الاضمحلال الأسي بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

الـمـفـردات

الدالة الأسية

الاضمحلال الأسي

النمو الأسي

عامل الاضمحلال

عامل النمو

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

لماذا؟

قد تبدو عناكب الرتيلاء (*Tarantulas*) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيِّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.

لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًّا، وليس تربيعيًّا أيضًا، وإنما يمثِّل الدالة $y = 3(2)^x$، والتي هي مثال على الدالة الأسية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

لماذا؟

لماذا لا تعد الدالة $y = 3(2)^x$ دالة تربيعية؟

ما قيمة y عندما $x = 0$ ؟

هل توجد قيمة للمتغير المستقل x تجعل قيمة المتغير y صفراً؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أتعرف الدالة الأسية.

٢- أمثل دوال النمو الأسي بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

تمثيل الدوال الأسّيَة : **الدالة الأسّية** هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

مفهوم أساسي

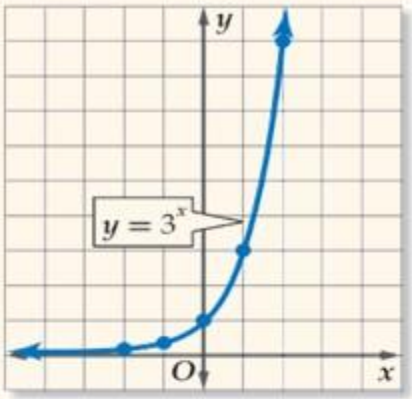
الدالة الأسية

التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة
$$y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$$

أمثلة: $y = (\frac{1}{2})^x$ $\quad$ $y = 4^x$ $\quad$ $y = 2(3)^x$

مثال 1 تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $b > 1$

a) مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدد مجال الدالة ومداها.



x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9

عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y، حيث $y = 3^x$، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

تحقق من فهمك

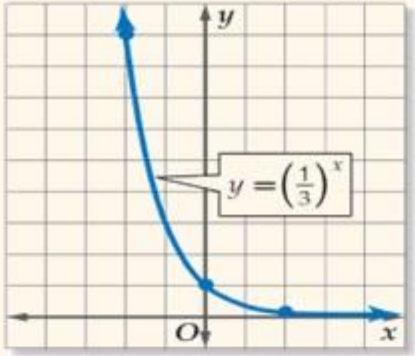
1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

مثال 2 تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $0 < b < 1$

a) مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	$\frac{1}{9}$



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

عندما $x = -1.5$، فإن قيمة $y \approx 5.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5} \approx 5.19615$).

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

يتضح من المثال (2) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 2)، فإن قيم y تتناقص بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل $\frac{1}{9}$ القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متناقصة، كما أن المحور x هو خط تقاربٍ أفقي لها.

النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**، فالدالة $y = 3^x$ الواردة في المثال 1 هي دالة نمو أسي.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, b > 1$

خصائص منحنى الدالة : متصل، متباين، متزايد

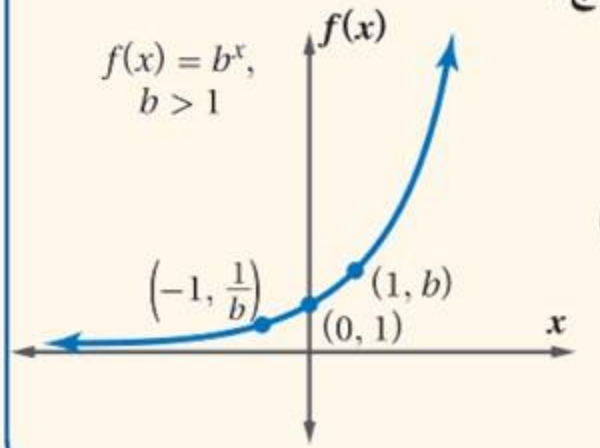
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية(R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة(R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

النموذج:



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x. ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a\,(1 + r)^t$ ، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(r+1)$ ويُسمى **عامل النمو**.

وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

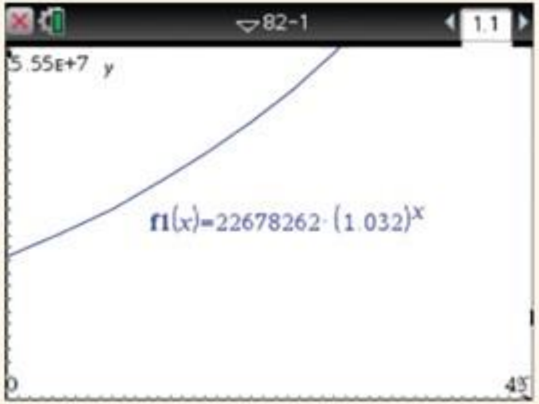
مثال 3 من واقع الحياة   تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431-1425 3.2% تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثّل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثّلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

$$y = 22678262\,(1.032)^t$$

b) مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.



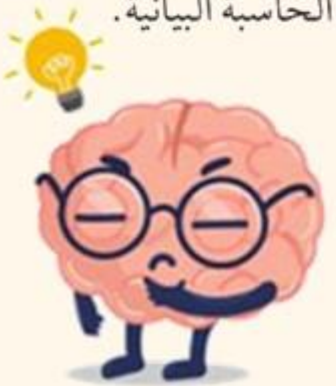
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

تحقق من فهمك

3) ثقافة مالية : يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته %8.5 سنويًا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثّل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثّلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

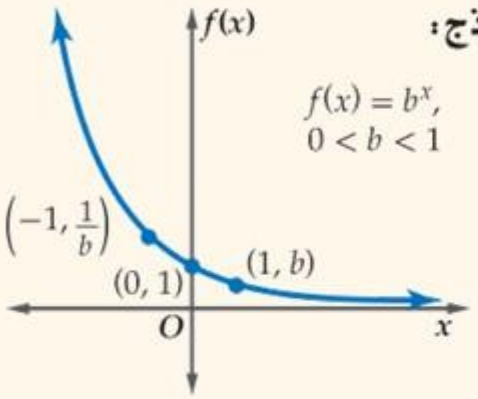
الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$ دالة **الاضمحلال الأسّي**، فالدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ الواردة في المثال 2 هي دالة اضمحلال أسي.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, 0 < b < 1$

النموذج:



خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية(R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة(R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

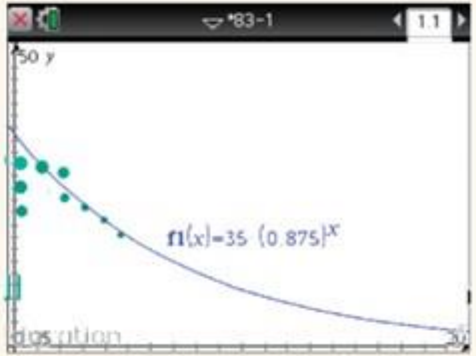
يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x ، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1-r)^t$ ، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1-r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.

مثال 4 من واقع الحياة تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًا

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من %12.5 تقريبًا من كمية الكافايين من أجسامهم في الساعة.



a) أوجد دالة أسّية تمثّل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

$$y = a(1-r)^t$$
$$= 35(1-0.125)^t$$
$$= 35(0.875)^t$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$	المعادلة من الفرع a
$= 35(0.875)^3$	عوّض 3 بدلًا من الزمن t
≈ 23.45	استعمل الحاسبة

سيبقى في جسم هذا الشخص $23.45mg$ من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

التحويلات الهندسية : تؤثِّر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من دالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي كما هو الحال في باقي الدوال، وستقتصر دراستنا على بعض التحويلات الهندسية لهاتين الدالتين.

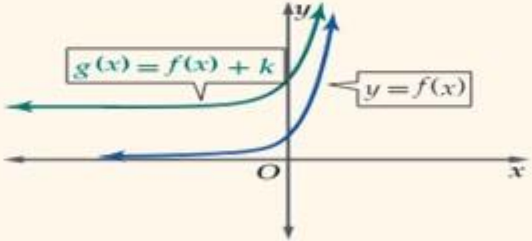
مفهوم أساسي

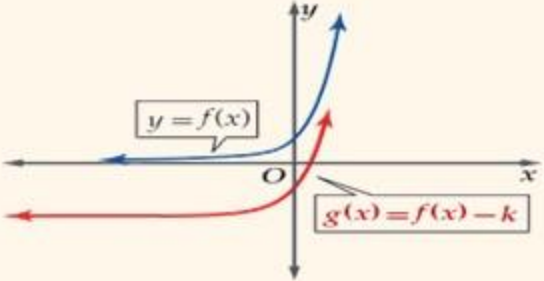
الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

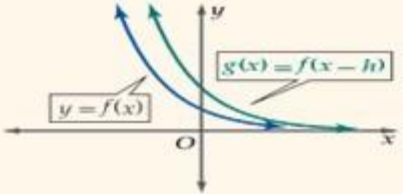


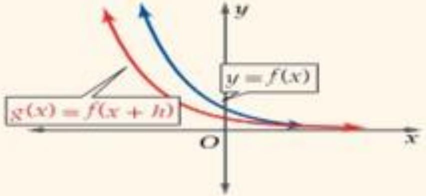


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





الموضوع: الدوال الأسية

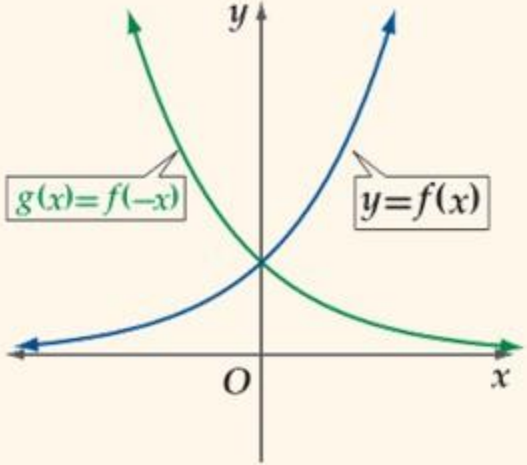
اليوم:

التاريخ:

مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



اليوم:

التاريخ:

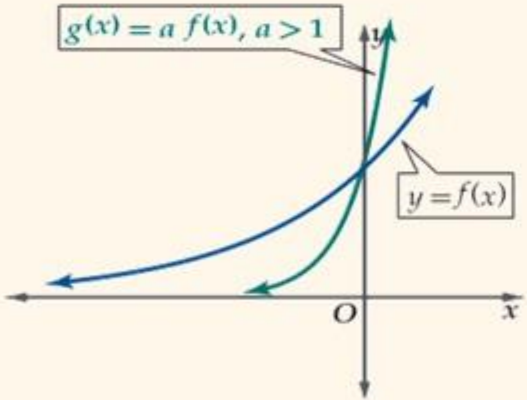
الموضوع: الدوال الأسية

مفهوم أساسي

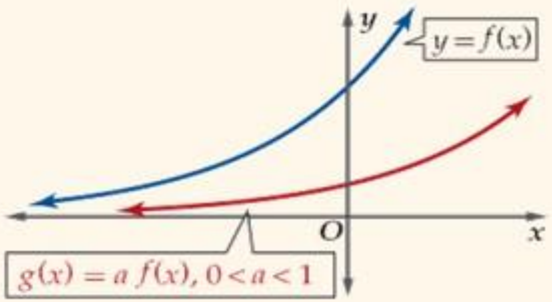
التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.



تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



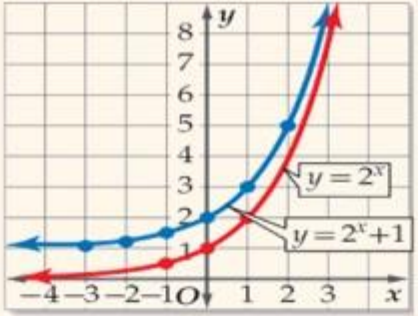
مثال 5 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها:

a) $y = 2^x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,2)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$، والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$، بما أن $k=1$ فإن المعادلة $y = 2^x + 1$ تمثِّل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبالاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x + 1$ يكون كما هو موضح أدناه.

x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3} + 1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} + 1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} + 1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^0 + 1$	2
1	$2^1 + 1$	3
2	$2^2 + 1$	5



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$

اليوم:

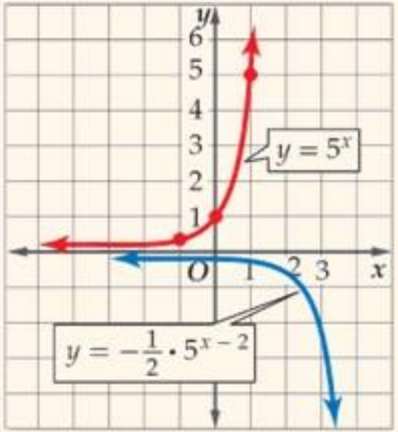
التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

مثال 5 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدِّد مجالها، ومداها:

b) $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$



حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5 > 1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1, b)$، $(0, 1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1, 5)$، $(0, 1)$، $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًا.
- $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي للتمثيل البياني.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

تحقق من فهمك

5A) $y = 2^{x+3} - 5$

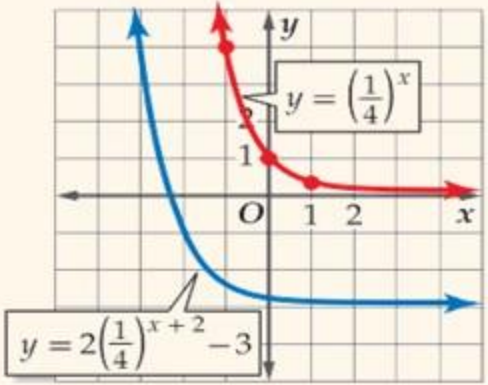
5B) $y = 0.1(6)^{x} - 3$

مثال 6 تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $1 > \frac{1}{4} > 0$ ؛ فالدالة دالة اضمحلال أسي، لذا

استعمل النقاط $\left(1,\frac{1}{4}\right)$، $(0,1)$ ، $(-1,4)$



والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

تحقق من فهمك

6) $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.: (مثال 1)

1) $y = 2^x$ ، $2^{1.5}$

2) $y = 2(8)^x$ ، $2(8)\ -0.5$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.: (مثال 2)

3) $y = 2\left(\frac{1}{6}\right)^x$ ، $2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}$

4) $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ، $3\left(\frac{1}{4}\right)^{0.5}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

مجموعة رفعة الرياضيات

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍّ:** اكتب دالة أسية يمر منحناها بكل من النقطتين $(1, 6)$ ، $(0, 3)$

29) **تبرير:** حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

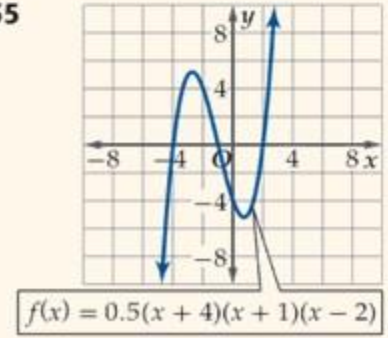
a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y.

b) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور x.

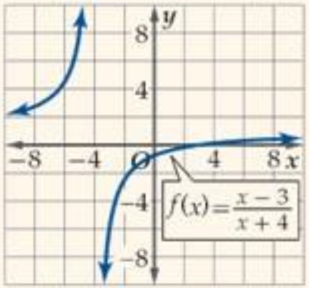
مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًّا: (الدرس 4-1)

(34



(35



تدريب على اختبار

40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ؟

A 3

B 2

C 1

D 0

41) إذا كانت $g(x)=4x$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ فما قيمة $(f\circ g)(2)$؟

A $\sqrt{3}$

B $4\sqrt{3}$

C 3

D 8

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال	اليوم تعلمت	لم أفهم	الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية

الواجب

حل المعادلات والمتباينات الأسية

Solving Exponential Equations and Inequalities

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

2-2

القوانين الصفية

إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند
المشاركة

حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك
كفريق

حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك

كن **صبوراً**؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك **غداً**

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أحل معادلات أسية.
2. أحل مسائل تتضمن نمواً أسياً واضمحلالاً أسياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

فيما سبق:

درست تمثيل الدوال الأسية بيانياً.

والآن:

- أحل معادلات أسية.
- أحل متباينات أسية.
- أحل مسائل تتضمن نمواً أسياً واضمحلالاً أسياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

الـمـفـردات

- المعادلة الأسية
- الربح المركب
- المتباينة الأسية

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

لماذا؟

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1435 هـ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

مجموعة رفعة الرياضيات

لماذا؟

ما قيمة x التي تمثل عام ١٤٤٠هـ؟

ما عدد المشتركين الذي يمكن تمثيله بالقيمة $y = 5.2$ ؟

كم سيكون عدد المشتركين عام ١٤٤٧هـ ؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أحل معادلات أسية.

٢- أحل مسائل تتضمن نمواً أسياً واضمحلالاً أسياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

حل المعادلات الأسية : تظهر المتغيرات في **المعادلة الأسية** في موقع الأسس.

مفهوم أساسي — خاصية المساواة للدوال الأسية

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0 , b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^5 = 3^x$ ، فإن $x = 5$. وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^5 = 3^x$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

مثال 1 حل المعادلات الأسية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	$8 = 2^3$
$2^x = 2^9$	خاصية قوة القوة
$x = 9$	خاصية المساواة للدوال الأسية

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

مثال 1 حل المعادلات الأسية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

b) $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	$9 = 3^2$
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	خاصية قوة القوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$-2 = 2x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

تحقق من فهمك

1A) $4^{2n-1} = 64$

1B) $5^{5x} = 125^{x+2}$

مثال 2 من واقع الحياة — كتابة دالة أسية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة ، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a .

$y = ab^x$	الدالة الأسية
$7500 = a\,b^0$	بالتعويض عن x بالعدد 0 ، وعن y بالعدد 7500
$7500 = a$	$b^0 = 1$

وعندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$23000 = 7500 \cdot b^4$	بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	بقسمة كلا الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	بإيجاد الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	باستعمال الحاسبة

الدالة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y = 7500(1.323)^x$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إعداد - توثيق

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

مثال 2 من واقع الحياة — كتابة دالة أسِية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

$y = 7500(1.323)^x$	المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية
$= 7500(1.323)^{12}$	بالتعويض عن x بالعدد 12
≈ 215664	باستعمال الحاسبة

سيكون هنالك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

تحقق من فهمك

2) **إعادة تصنيع:** أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1436 هـ ، وفي عام 1440 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1436 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1481 هـ؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي — الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال 3 الربح المركب

مال: استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.2%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

خطط: بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب.

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

حُلّ:

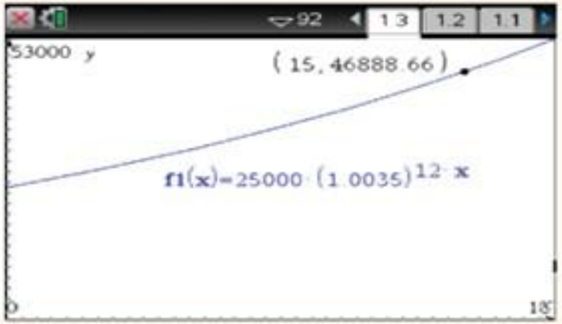
$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ صيغة الربح المركب

$= 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$ $P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

≈ 46888.66 باستعمال الحاسبة

تحقق: مثّل المعادلة المناظرة بيانيًّا $f(x) = 25000(1.0035)^{12x}$، ثم أوجد قيمة y عندما $x = 15$ على الرسم بالضغط على مفتاح menu ثم اختر 8: الهندسة واختر منها 1: النقاط والمستقيمات ومنها 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على الرسم البياني لتحدد نقطة يظهر الزوج المرتب الذي يمثلها.

اضغط esc ثم حدِّد الإحداثي x للنقطة واكتب 15، سيظهر الإحداثي y المقابل 46888.66، إذن الإجابة صحيحة.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنواتٍ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

مجموعة رفعة الرياضيات

حل المتباينات الأسية : **المتباينة الأسية** هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي
خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي : إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال : إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، و إذا كان ؛ $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مفهوم أساسي
خاصية التباين لدالة الاضمحلال

التعبير اللفظي : إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x<y$

مثال : إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ ، و إذا كان ؛ $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

مجموعة رفعة الرياضيات

مثال 4 حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	$16 = 2^4 , 8 = 2^3$
$2^{8x-12} < 2^3$	خاصية قوة القوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين لدالة النمو
$8x < 15$	بجمع 12 للطرفين
$x < \frac{15}{8}$	بقسمة الطرفين على 8

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B) $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1) $8^{4x+2} = 64$

2) $5^{x-6} = 125$

3) $3^{5x} = 27^{2x-4}$

4) $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

5) $2^{6x} = 32^{x-2}$

6) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

19) $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

20) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

21) $(3,100)$, $(0, 6.4)$

22) $(4, 81)$, $(0, 256)$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

مجموعة رفعة الرياضيات

مسائل مهارات التفكير العليا

36) تحدٍّ: حُلّ المعادلة الأسية
$16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$.

37) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$.

38) برهان: أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$.

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 1–2)

40) $y = 2(3)^x$

41) $y = 5(2)^x$

42) $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

43) $\sqrt{x+5} - 3 = 0$

44) $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$

45) $\sqrt[4]{2x-1} = 2$

46) $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

تدريب على اختبار

52) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$؟

A -1

B 0

C 1

D 2

53) إذا كانت $f(x) = 5x$، فما قيمة $f[f(-1)]$؟

A -25

B -5

C 5

D 25

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال

اليوم تعلمت

لم أفهم

الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات الأسية

الواجب

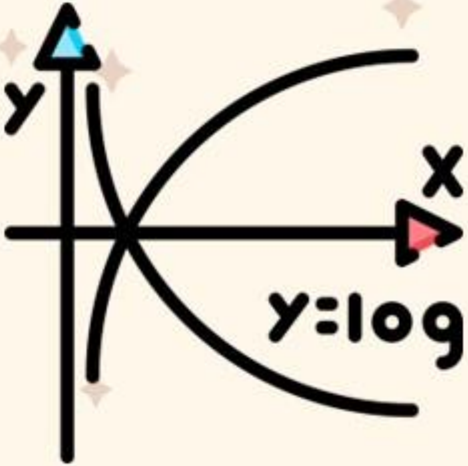
اليوم: **الموضوع:** حل المعادلات والمتباينات الأسية

التاريخ:

انتهى درس اليوم

مجموعة رفعة الرياضيات

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
Logarithms and Logarithmic Functions



معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

2-3

القوانين الصفية

إستمعي جيداً لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند المشاركة

حافظي على الممتلكات ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك كفريق

حل الواجبات وإرسالها في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي قصار جهدك

مجموعة رفعة الرياضيات

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها

اليوم تفيدك غداً

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.

2. أمثل دوال لوغاريتمية بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

فيما سبق:

درست إيجاد الدالة العكسية لدالة.

والآن:

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثل دوال لوغاريتمية بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

الـمـفـردات

اللوغاريتم

الدالة اللوغاريتمية

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

لماذا؟

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

لماذا؟

سمِّ أشياء تسبح في الفضاء بالقرب من الكرة الأرضية؟

ما المقصود بمدى التأثير؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

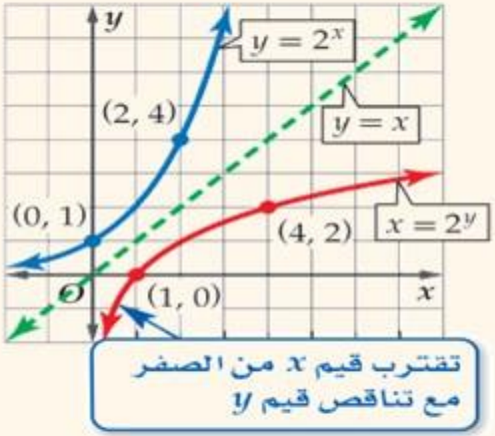
١- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.

٢- أمثل دوال لوغاريتمية بيانياً.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية : يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مفهوم أساسي

اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_2 8 = 3 \longrightarrow 8 = 2^3$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \longrightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

1A) $\log_4 16 = 2$

1B) $\log_3 729 = 6$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال 2 التحويل من الصورة الأسَية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a) $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

2A) $4^3 = 64$

2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

مجموعة رفعة الرياضيات

مثال 3 إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$	بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y
$4 = 16^y$	تعريف اللوغاريتم
$4^1 = 4^{2y}$	$16 = 4^2$
$1 = 2y$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$\frac{1}{2} = y$	اقسم كلا الطرفين على 2

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$	بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y
$\frac{1}{49} = 7^y$	تعريف اللوغاريتم
$7^{-2} = 7^y$	$\frac{1}{49} = 7^{-2}$
$-2 = y$	خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

اليوم:
التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال 4 استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 \qquad 5^3 = 125$$
$$= 3 \qquad \log_b b^x = x$$

b) $\log_{10} 0.001$

$$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} \qquad 0.001 = 10^{-3}$$
$$= -3 \qquad \log_b b^x = x$$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7 \qquad b^{\log_b x} = x$$

d) $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$، فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

4A) $\log_9 81$

4B) $3^{\log_3 1}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ ، وكل من العددين b , x موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = \log_b x,\ b > 1$

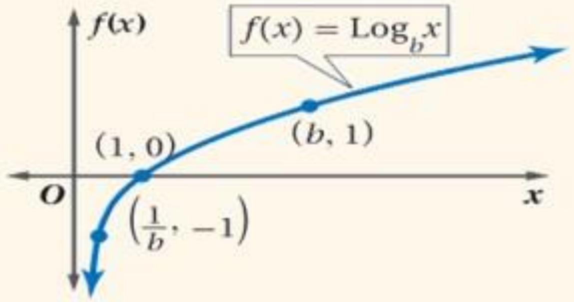
خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

خط التقارب: المحور y

مقطع المحور x: 1



الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = \log_b x,\ 0 < b < 1$

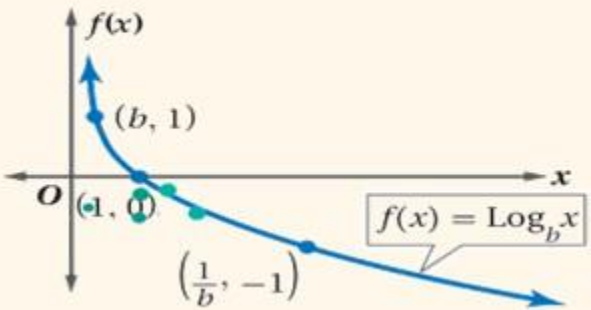
خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

خط التقارب: المحور y

مقطع المحور x: 1



مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

a) $f(x) = \log_5 x$

الخطوة 1: حدّد الأساس.

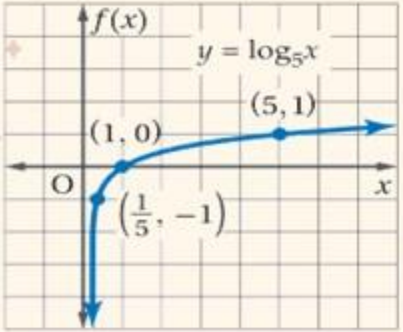
$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $(5, 1)$، $(1, 0)$، $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$.



الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

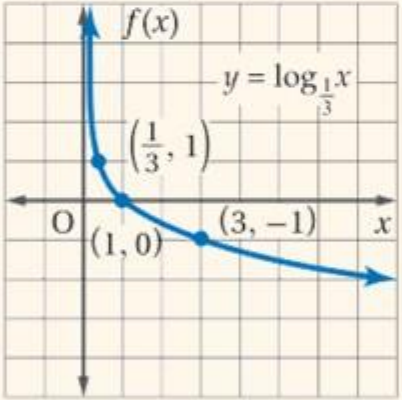
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $(3, -1)$ ، $(1, 0)$ ، $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

الخطوة 3: ارسم المنحنى.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \log_2 x$

5B) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

اليوم:

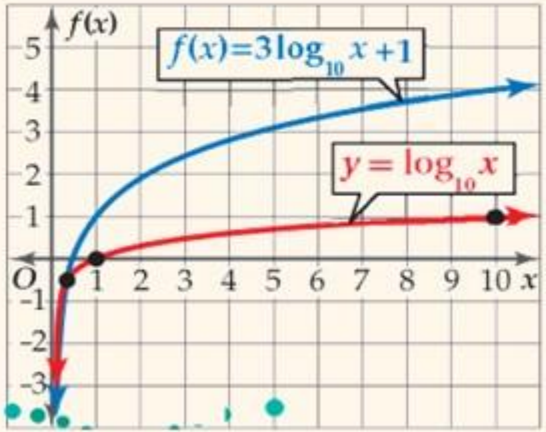
التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

a) $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$



حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10>1$ فاستعمل النقاط $(1 , b)$, $(0 , 1)$, $(-1 , \frac{1}{b})$، أي النقاط $(1 , 10)$ $(0 , 1)$, $(-1 , \frac{1}{10})$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

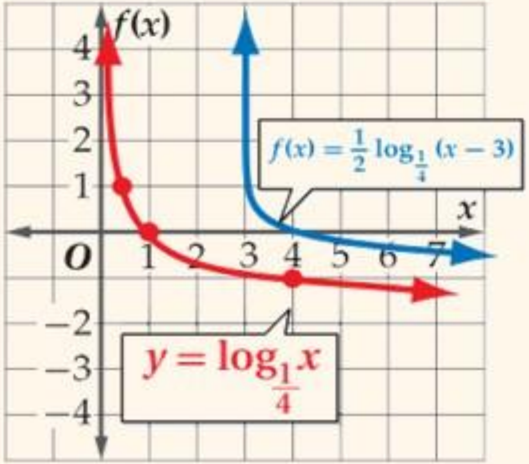
مـثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

b) $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x - 3)$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

6A) $f(x) = 2\log_3(x-2)$

6B) $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال 7 من واقع الحياة إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

هزات أرضية : يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	عوّض 9.2 بدلاً من x
$= 10^{8.2}$	بسّط
$= 158489319.2$	استعمل الحاسبة

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال 7 من واقع الحياة — إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	أضف العدد 1 لكلا الطرفين

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية: (مثال 1)

1) $\log_8 512 = 3$

2) $\log_5 625 = 4$

3) $\log_2 16 = 4$

4) $\log_7 343 = 3$

5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$

6) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

7) $\log_{12} 144 = 2$

8) $\log_9 1 = 0$

43) **تصوير:** تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة. (مثال 7)

a) أُعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مسائل مهارات التفكير العليا

49) **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\log_3 9$	$\log_2 4$	$\log_2 16$	$\log_4 16$

50) **تحدٍّ:** إذا كان $y = \log_b x$ ، حيث b, x, y أعداد حقيقية، فإن الصفر ينتمي إلى المجال دائمًا أو أحيانًا أو لا ينتمي أبدًا. وضح إجابتك.

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 1–2)

56) $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

57) $y = -2.5(5)^x$

58) $y = 30^{-x}$

59) $y = 0.2(5)^{-x}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي: (الدرس 2–2)

60) $3^{n-2} > 27$

61) $2^{2n} \leq \frac{1}{16}$

62) $16^n < 8^{n+1}$

63) $32^{5p+2} \geq 16^{5p}$

تدريب على اختبار

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 2

70) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟

A 5 **B** $\frac{1}{5}$ **C** $-\frac{1}{5}$ **D** -5

71) ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$؟

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال	اليوم تعلمت	لم أفهم	الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

الواجب

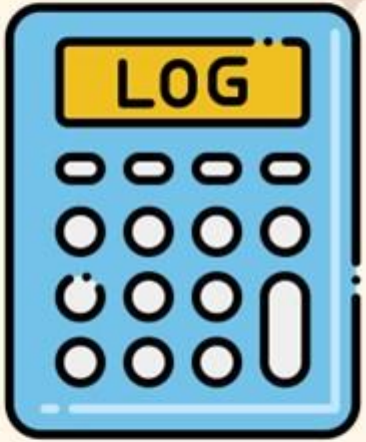
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

انتهى درس اليوم

خصائص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms



معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

2-4

القوانين الصفية

إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند
المشاركة

حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك
كفريق

حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها

اليوم تفيدك غداً

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا اللّٰه ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1. أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
2. أبسط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

فيما سبق:

درست إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية.

والآن:

- ❖ أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- ❖ أبسط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

لماذا؟

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

لأن $pH = -\log_{10} [H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}} = -\log_{10} [H^+]_{\text{للماء النقي}} + \log_{10} [H^+]_{\text{للقهوة}}$ والتي تكتب بالشكل :

$pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}} = \log_{10} \frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}}$، وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

لماذا؟

هل عصير الليمون حمض أم قاعدة؟

هل البيض حمض أم قاعدة؟

كم مرة تساوي درجة pH للبيض درجته للماء النقي؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.

٢- أبسط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي

خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

مجموعة رفعة الرياضيات

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي — خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن $x = b^m$ ، و $y = b^n$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $n = \log_b y$, $m = \log_b x$.

$b^m b^n = xy$	عوّض
$b^{m+n} = xy$	خاصية ضرب القوى
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m + n = \log_b xy$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	عوّض عن m , n بالقيمتين $\log_b x$, $\log_b y$ على الترتيب.

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

مثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$	$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$
$= \log_4 4^3 + \log_4 3$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$= 3 + \log_4 3$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$	$\log_4 3 \approx 0.7925$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.

افترض أن $b^m = x , b^n = y$ ، إذن $\log_b x = m , \log_b y = n$

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$$

$$b^{m-n} = \frac{x}{y}$$ خاصية قسمة القوى

$$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$m - n = \log_b \frac{x}{y}$$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$$ عوِّض عن m ، n بالقيمتين $\log_b x$ ، $\log_b y$ على الترتيب

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إبداع - تواصل

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

مفهوم أساسي

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

اليوم:

التاريخ:

مثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$\log_6 7.2 = \log_6 \left(\frac{36}{5}\right)$	$7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$
$= \log_6 6^2 - \log_6 5$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$= 2 - 0.8982$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$= 1.1018$	$\log_6 5 \approx 0.8982$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

2) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول **pH** بالعلاقة: $\mathbf{pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}}$ حيث $\mathbf{[H^+]}$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة **pH** له **4.2**.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

$pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	المعادلة الأصلية
$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$pH = 4.2$
$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$	$\log_{10} 1 = 0$
$4.2 = -\log_{10} [H^+]$	بسّط
$-4.2 = \log_{10} [H^+]$	اضرب كلا الطرفين في -1
$10^{-4.2} = [H^+]$	تعريف اللوغاريتم

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

تحقق:

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$ pH = 4.2

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$$ عوّض $[H^+] = 10^{-4.2}$

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$4.2 = 4.2 \checkmark$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إبداع - توثيق

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي — خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في السؤال 48

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

مثال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$\log_2 25 = \log_2 5^2$	$5^2 = 25$
$= 2 \log_2 5$	خاصية لوغاريتم القوة
$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$	$\log_2 5 = 2.3219$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

مثال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$	$\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$
$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$	$4^3 = 64$
$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$	خاصية قوة القوة
$= \frac{3}{5} \log_4 4$	خاصية لوغاريتم القوة
$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}$	$\log_b b = 1$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

5A) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B) $\log 7 \sqrt[6]{49}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$$ خاصية لوغاريتم القوة

b) $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$$ خاصية لوغاريتم القوة

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

c) $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

$$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$$

$\sqrt[5]{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{5}}$

$$= \log_3 (x-1) - \frac{1}{5} \log_3 (3-2x)$$

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

6A) $\log_{13} 6a^3bc^4$

6B) $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

6C) $\log_4 \dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6)$

$$4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$$ خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 \frac{x^4\sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$$ بإنطاق المقام

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

b) $0.5 \log_7 (x+2) + 6 \log_7 2x$

$0.5 \log_7 (x+2) + 6 \log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64x^6$ $\quad (x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2},\ 2^6 = 64$

$= \log_7 64x^6 \sqrt{x+2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

7A) $-5\log_2(x+1)+3\log_2(6x)$

7B) $\log_3(2x-1)-\frac{1}{4}\log_3(x+1)$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تدرب وحل المسائل

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $\log_4 15$

2) $\log_4 \frac{5}{3}$

3) $\log_4 \frac{3}{4}$

4) $\log_4 0.6$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: (مثال 6)

24) $\log_9 6x^3y^5z$

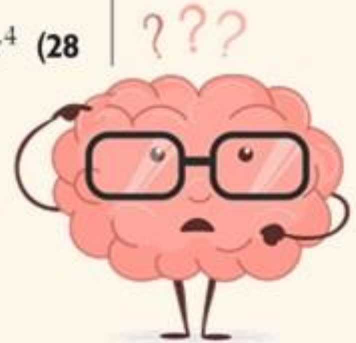
25) $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

26) $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$

27) $\log_4 10t^2uv^{-3}$

28) $\log_5 a^6b^{-3}c^4$

29) $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt[7]{1-5x}}$



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

مراجعة تراكمية

استعمل منحنى f لتصف التحويل الهندسي الذي يُنتج منحنى g، ثم مثّل منحنى كل منهما بيانيًّا في كل مما يأتي (الدرس 1-2)

52) $f(x) = 2^x\ ;\ g(x) = -2^x$

53) $f(x) = 5^x\ ;\ g(x) = 5^{x+3}$

54) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x\ ;\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطولة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

تدريب على اختبار

64) ما قيمة $2 \log_5 12 - \log_5 8 - 2 \log_5 3$ ؟

A $\log_5 2$

B $\log_5 0.5$

C $\log_5 3$

D 1

65) ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x+1) + 3$؟

A 3

B 2

C 1

D 0

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال	اليوم تعلمت	لم أفهم	الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات

انتهى درس اليوم

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

Solving Logarithmic Equations and Inequalites

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

2-5

القوانين الصفية

إستمعي جيداً لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند المشاركة

حافظي على الممتلكات ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك كفريق

حل الواجبات وإرسالها في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي قصار جهدك

كن **صبوراً**؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك **غداً**

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا اللّٰه ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1 أحل معادلات لوغاريتمية.

2 أحل متباينات لوغاريتمية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

فيما سبق:

درست إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية.

والآن:

- ❖ أحل معادلات لوغاريتمية.
- ❖ أحل متباينات لوغاريتمية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

الـمـفـردات

المعادلة اللوغاريتمية

المتباينة اللوغاريتمية

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنِّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من $F-0$ إلى $F-6$ بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وبحسب طول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة $F-6$ هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.

مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F- 3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F- 4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F- 5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F- 6 لا يُتصور	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

لماذا؟

ضمن أي فئات مقياس فوجيتا يقع إعصار سرعة الرياح المصاحبة له 100mi/h ؟

ما مجال سرعة الرياح المصاحبة لإعصار من الفئة F-4 ؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

لماذا؟

كم مرة وقعت أعاصير من الفئة F-6 ؟

ما قيمة d عندما تكون w=65mi/h ؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!	ما أريد أن أعرف؟!	ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أحل معادلات لوغاريتمية.

٢- أحل متباينات لوغاريتمية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل المعادلات اللوغاريتمية : تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3 = 216$	خاصية قوة القوة

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	عوّض 216 بدلًا من x
$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	حلّل
$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	خاصيتا ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة
$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	بسّط
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓	الحل صحيح

اليوم: 　　　　　　　　 **الموضوع:** حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

التاريخ:

تحقق من فهمك

1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

مثال 2 على اختبار

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x^2 - 3x - 4 = 0$	اطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x - 4)(x + 1) = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 1 = 0$ أو $x - 4 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -1$ أو $x = 4$	حل كل معادلة

مثال 2 على اختبار

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

التحقق: عوِّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = -1$	$x = 4$
$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$	$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$
$\log_2 (-3) = \log_2 (-3)$ ✗	$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

بما أن $\log_2 (-3)$ غير معرف، فالإجابة 1− مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

اليوم:

التاريخ:

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

A -3 **B** -1 **C** 5 **D** 15

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

اليوم:

التاريخ:

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x - 9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x - 9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين
$(x - 12)(x + 3) = 0$	حلّل
$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -3$ ، $x = 12$	حُل كل معادلة

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

التحقق:

$$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$$

$$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$$

$$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 = 2 \checkmark$$

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

3A) $2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B) $\log_6 x + \log_6 (x+5) = 2$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مجموعة رفعة الرياضيات

حل المتباينات اللوغاريتمية : **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين ≤ ، ≥

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

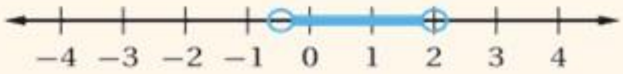
مثال 5 حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$	المتباينة الأساسية
$x + 3 > 2x + 1$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$2 > x$	اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \le 0$ أو $2x + 1 \le 0$ ($x \le -3$ أو $x \le -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x < 2 \,,\, x \in R\right\}$.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مثال 5 حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$، ثم تحقق من صحة حلك.

التحقق: عوّض بعدد يقع في الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$.

$x = 1$

$\log_4 (1+3) \overset{?}{>} \log_4 (2+1)$

$\log_4 4 \overset{?}{>} \log_4 3$

$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$x = 3$

$\log_4 (3+3) \overset{?}{>} \log_4 (2\times3+1)$

$\log_4 6 \overset{?}{>} \log_4 7$

$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \le \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلِّك: (مثال 1)

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$

2) $\log_{16} x = \frac{4}{3}$

3) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$

4) $\log_{25} x = \frac{5}{2}$

21) $\log_3 x \geq -4$

22) $\log_2 x \leq -2$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (مثال 5)

23) $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$

24) $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$

25) $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$

26) $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$

مجموعة رفعة الرياضيات

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟

لينا	ريم
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \leq 2^{-2}$	$x \geq 2^{-2}$
$0 < x \leq \frac{1}{4}$	$x \geq \frac{1}{4}$

33) **تحدٍّ:** أوجد قيمة

$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

39) $3^{3x-2} > 81$

40) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

41) $8^{x-4} = 2^{4-x}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $\log_4 x - \log_4(x-1) = \frac{1}{2}$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}$

C -2

D 2

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

لدي سؤال	اليوم تعلمت	لم أفهم	الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

الواجب

اليوم:

التاريخ:

انتهى درس اليوم

مجموعة رفعة الرياضيات

اللوغاريتمات العشرية

Common Logarithms

معلمة المادة/ تغريد مسعود باجنيد

2-6

القوانين الصفية

إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة

إرفعي يدك عند
المشاركة

حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك

إعملي مع زميلاتك
كفريق

حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

الالتزام بالوقت

الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك

كن **صبوراً**؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك **غداً**

اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على كل شيء قدير حسبنا اللّٰه ونعم الوكيل ...

الأفكار الرئيسية

1 أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.

2 أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

فيما سبق:

درست تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

والآن:

- ❖ أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- ❖ أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

اليوم:

التاريخ:

الــمــفــردات

- اللوغاريتم العشري
- صيغة تغيير الأساس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: **اللوغاريتمات العشرية**

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثر في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

جدول التعلم

ماذا اعرف؟!

ما أريد أن أعرف؟!

ماذا تعلمت اليوم؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.

٢- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

اللوغاريتمات العشرية : لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية** ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح $\boxed{\text{LOG}}$ لإيجاد قيمته.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: ENTER 5 LOG تجد أن:

$$\log 5 \approx 0.6990$$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: ENTER 0.3 LOG تجد أن:

$$\log 0.3 \approx -0.5229$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

تحقق من فهمك

1A) $\log 7$

1B) $\log 0.5$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$\begin{array}{ccc} \log x = y & \longleftrightarrow & 10^y = x \\ \log 1 = 0 & \longleftrightarrow & 10^0 = 1 \\ \log 10 = 1 & \longleftrightarrow & 10^1 = 10 \\ \log 10^m = m & \longleftrightarrow & 10^m = 10^m \end{array}$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

مثال 2 من واقع الحياة — حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	$L = 66.6,\ m = 1$
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط
$I = 10^{6.66}$	الصورة الأسية
$I \approx 4570882$	استعمل الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

تحقق من فهمك

2) **هزات أرضية :** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

مثال 3 حل معادلات أسَية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \dfrac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.1240$	استعمل الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا .

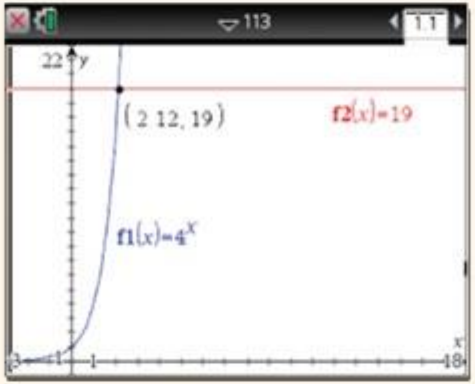
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

مثال 3 حل معادلات أسَية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.



تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًا باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** في الحاسبة البيانية TI–nspire.

مثّل المعادلة $f1(x) = 4^x$ والمستقيم $f2(x) = 19$ بيانيًا على الشاشة نفسها. ثم أوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين بالضغط على مفتاح menu، ثم اختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (2.12, 19).

الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبريًا. ✓

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اليوم:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

التاريخ:

تحقق من فهمك

3A) $3^x = 15$

3B) $6^x = 42$

مثال 4 حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \dfrac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$
$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$	استعمل الحاسبة

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

مثال 4 حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \overset{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \overset{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\frac{1}{59049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B) $4^{y} < 5^{2y+1}$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

صيغة تغيير الأساس : يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي

صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغارتيم العدد الأصلي للأساس b

لوغارتيم الأساس القديم للأساس b

مثال:

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log_b a = \log_b n$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$	اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$
$\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$	$x = \log_a n$

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

مثال 5 استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$$ صيغة تغيير الاساس

$$\approx 2.7268$$ استعمل الحاسبة

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

مثال 6 استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملًا صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$R = \log_2 n$	المعادلة الأصلية
$= \log_2 240$	$n = 240$
$= \dfrac{\log 240}{\log 2}$	صيغة تغيير الأساس
≈ 7.9	بسّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة يساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160 خطوة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 1)

1) $\log 5$ 2) $\log 21$ 3) $\log 0.4$

4) $\log 3$ 5) $\log 11$ 6) $\log 3.2$

7) $\log 8.2$ 8) $\log 0.9$ 9) $\log 0.04$

a) فكم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m = 1$؟

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

مسائل مهارات التفكير العليا

36) اكتشف الخطأ: حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

بلال	خالد
$4^{3p} = 10$	$4^{3p} = 10$
$\log 4^{3p} = \log 10$	$\log 4^{3p} = \log 10$
$3p \log 4 = \log 10$	$p \log 4 = \log 10$
$p = \dfrac{\log 10}{3 \log 4}$	$p = \dfrac{\log 10}{\log 4}$

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 5-2)

41) $\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x$

42) $2 \log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$

43) $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

تدريب على اختبار

47) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3 ,\ g(x) = x - 5$؟

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

48) أي مما يأتي يمثّل حلًّا للمعادلة $125 = 27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}$؟

A -4

B -2

C 2

D 4

اللهم أعني على الدراسة ولا تجعل قلبي يمل
منها وكن معي في كل لحظة ووفقني لما
تحب وترضى وارزقني التوفيق والنجاح.

اليوم:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

التاريخ:

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:

- لدي سؤال
- اليوم تعلمت
- لم أفهم
- الجزء الذي أعجبني من الدرس

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

انتهى درس اليوم

المراجع:

ماجروهيل رياضيات ثالث ثانوي (رياضيات ٣-١) الفصل الدراسي الأول، وزارة التعليم, مجموعة العبيكان للاستثمار.

الخاتمة:

نسأل الله قبول هذا العمل، وأن يكون هذا الإنجاز نال شيئاً من إعجابكم.

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحمد لله