كن ذو همة عالية وطموحاً

يعانق عنان السماء صوب سهمك دائماً نحو النجوم

فإن أخطأت أصبت القمر 👌

اللوغاريتمات العشرية

رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

والآن:

- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

المفردات:

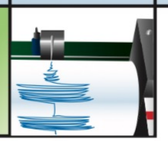
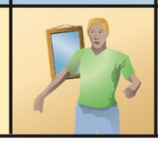
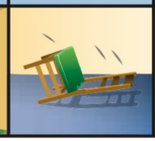
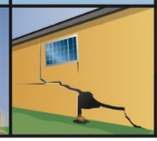
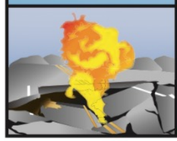
اللوغاريتم العشري
common logarithm

صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

اللوغاريتمات العشرية

لمـــاذا

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثير في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ \text{mi}^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.
								

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية** ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ١ : ايجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: LOG 5 ENTER تجد أن:

$$\log 5 \approx 0.6990$$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: LOG 0.3 ENTER تجد أن:

$$\log 0.3 \approx -0.5229$$

قراءة الرياضيات

اللوغارتيم العشري

عند كتابة اللوغاريتم دون أساس، فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$.

تحقق من فهمك :

1A) $\log 7$

1B) $\log 0.5$

اللوغاريتمات العشرية

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$\log x = y \quad \longleftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$\log 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 10^1 = 10$$
$$\log 10^m = m \quad \longleftrightarrow \quad 10^m = 10^m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

مثال ٢: من واقع الحياة حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

الربط مع الحياة

الديسبل (dB) هو وحدة قياس ارتفاع الصوت، على سبيل المثال: 90–100dB تعادل ارتفاع صوت الرعد، 140dB تعادل ارتفاع صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	$L = 66.6, m = 1$
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط
$I = 10^{6.66}$	الصورة الأسية
$I \approx 4570882$	استعمل الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

تحقق من فهمك :

2) **هزات أرضية :** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

إرشادات للدراسة

وحدة الجول:

تذكر أن الجول هو وحدة قياس الطاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج $= 4^{-7}$ جول

مثال ٣: حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.1240$	استعمل الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا .

تحقق من فهمك :

(3A $3^x = 15$

(3B $6^x = 42$

مثال ٤: حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

المتباينة الأصلية	$3^{5y} < 7^{y-2}$
خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية	$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$
خاصية لوغاريتم القوة	$5y \log 3 < (y-2) \log 7$
خاصية التوزيع	$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$
اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين	$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$
خاصية التوزيع	$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$
اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$	$y < \dfrac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$
استعمل الحاسبة	$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$

مثال ٤: حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \stackrel{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \stackrel{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\frac{1}{59049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

إرشادات للدراسة

حل المتباينات

تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يعكس اتجاه رمز التباين.

تحقق من فهمك :

(4A $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

(4B $4^{y} < 5^{2y+1}$

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي

صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$\log_b n$ ← لوغارتيم العدد الأصلي للأساس b

$\log_b a$ ← لوغارتيم الأساس القديم للأساس b

مثال:

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

مثال 5: استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$$ صيغة تغيير الاساس

$$\approx 2.7268$$ استعمل الحاسبة

تحقق من فهمك :

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

مثال ٦: استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملًا صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$R = \log_2 n$	المعادلة الأصلية
$= \log_2 240$	$n = 240$
$= \frac{\log 240}{\log 2}$	صيغة تغيير الأساس
≈ 7.9	بسِّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوةيساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك :

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) اكتشف الخطأ: حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

بلال

$$4^{3p} = 10$$

$$\log 4^{3p} = \log 10$$

$$3p \log 4 = \log 10$$

$$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$$

خالد

$$4^{3p} = 10$$

$$\log 4^{3p} = \log 10$$

$$p \log 4 = \log 10$$

$$p = \frac{\log 10}{\log 4}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

37) تحدٍّ: حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ لتجد قيمة x . وفسّر كل خطوة.