

القطوع المكافئة



تهيئة

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

$$f(x) = x^2 + 2x + 6 \quad (2)$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 12 \quad (1)$$

تهيئة



أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3 \quad (8)$$

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 9 \quad (9)$$



إكمال المربع (completing the square) :
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$ ، اتبع
الخطوات التالية:

- (1) أوجد نصف معامل x ؛ أي نصف b .
- (2) رُبّع الناتج في الخطوة (1) .
- (3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

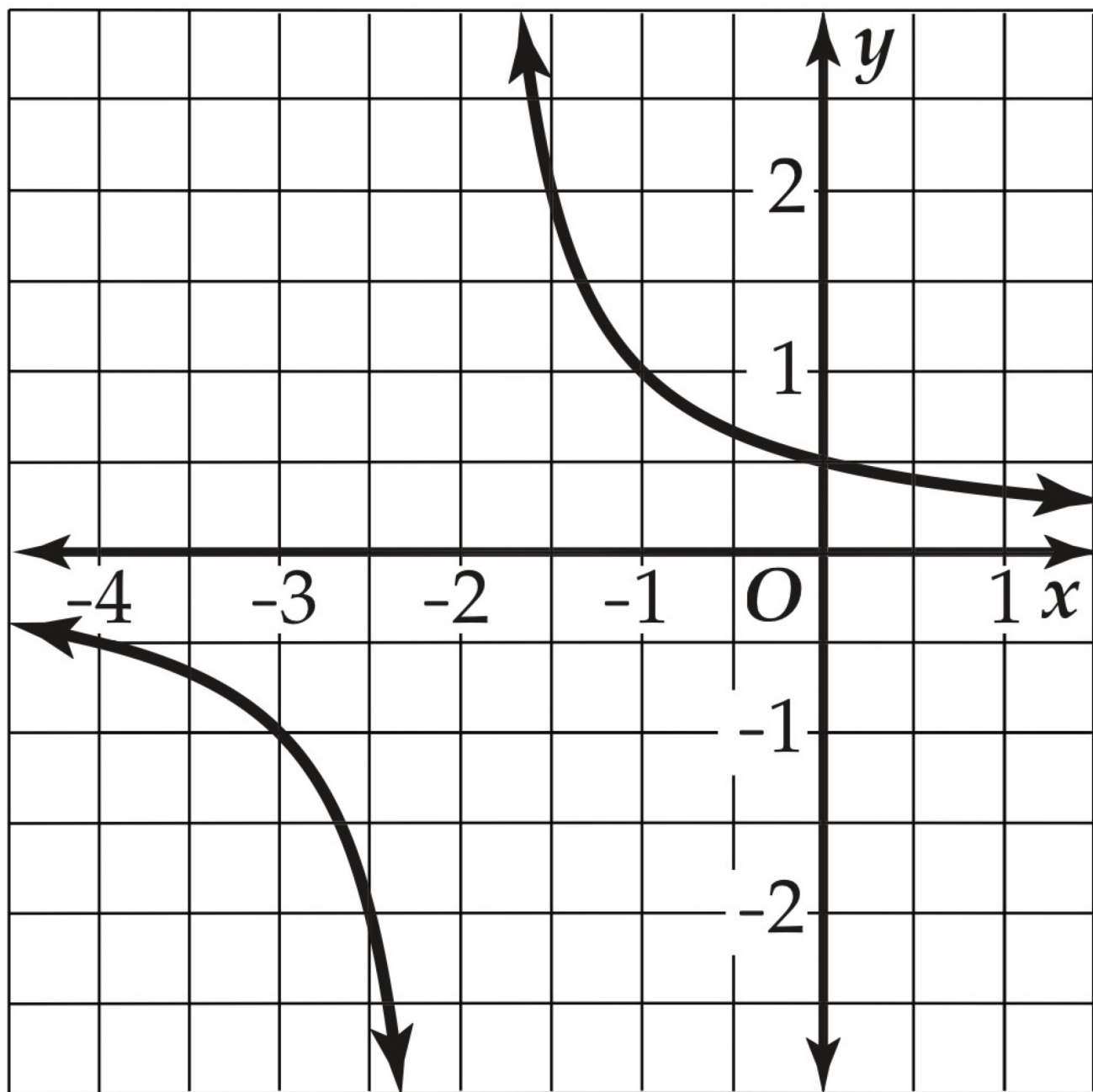
$$x^2 + 8x \quad (14)$$

$$x^2 - 18x \quad (15)$$



مثّل كل دالة مما يأتي بيانًا:

$$f(x) = \frac{1}{(x + 2)} \quad (16)$$



قدرات



١٠

◀ أوجد مساحة المظلل؟

ب- ١٠,٥٧

أ- ١٠,٧٥

د- ٢٠

ج- ١٢

المفردات

القطع المخروطي

conic section

المحل الهندسي

locus

القطع المكافئ

parabola

البؤرة

focus

الدليل

directrix

محور التماثل

axis of symmetry

الرأس

vertex

الوتر البؤري

latus rectum

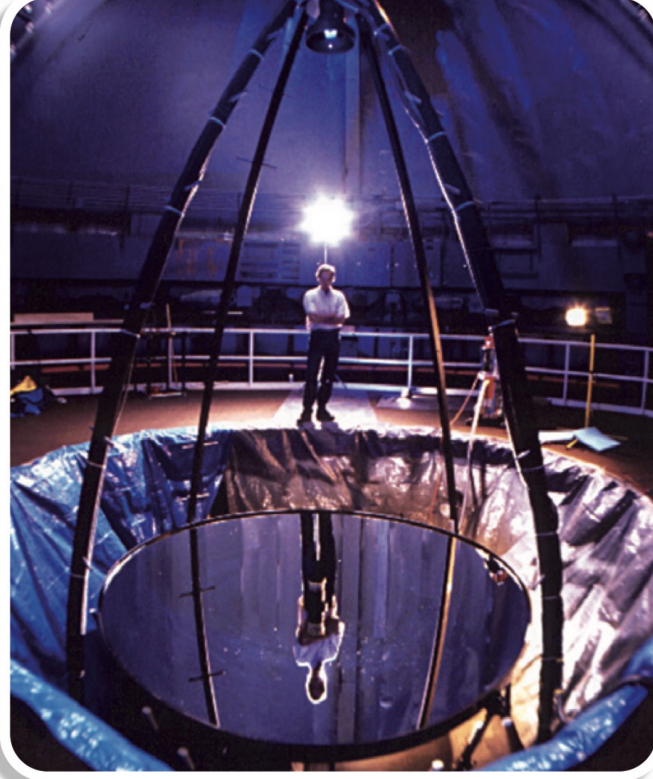
فيما سبق:

درست الدوال التربيعية
وتحليلها وتمثيلها بيانياً.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أحل معادلات قطع
مكافئة، وأمثلها بيانياً.
- أكتب معادلات قطع
مكافئة.

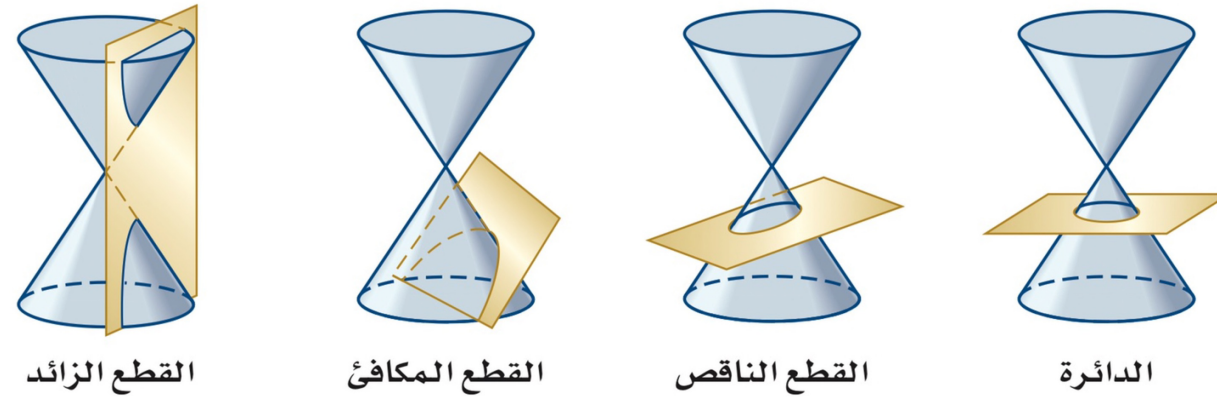
لماذا؟



استعمل العلماء حديثاً تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطوعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

القطع المخروطية: القطوع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما. بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

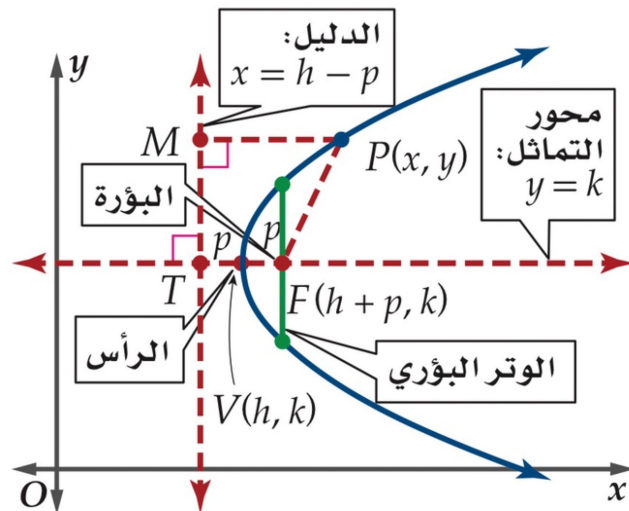
والقطع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.



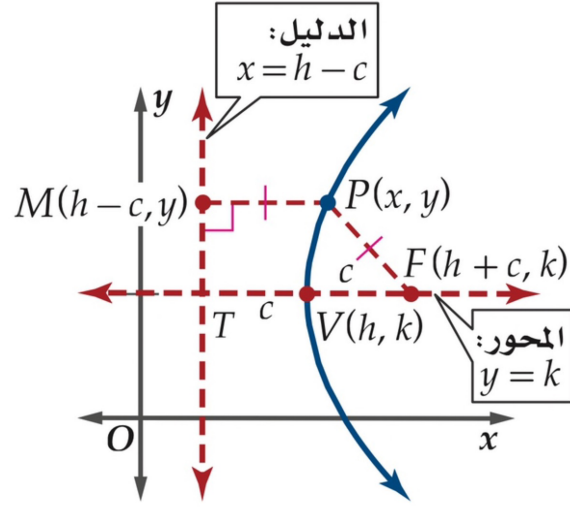
الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفاراً. وتوجد صورة أكثر تحديداً لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعاً في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانياً:

المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة (**تسمى البؤرة**) مساوياً دائماً لبُعدها عن مستقيم معلوم (**يسمى الدليل**).



والقطع المكافئ متمثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **الوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.



افترض أن نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$ ، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.

نعلم من تعريف القطع المكافئ أن $PF = PM$. وبما أن M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h-c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x - (h+c)]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x - (h-c)]^2 + (y-y)^2}$$

$$[x - (h+c)]^2 + (y-k)^2 = [x - (h-c)]^2 + 0^2$$

$$x^2 - 2x(h+c) + (h+c)^2 + (y-k)^2 = x^2 - 2x(h-c) + (h-c)^2$$

$$x^2 - 2xh - 2xc + h^2 + 2hc + c^2 + (y-k)^2 = x^2 - 2xh + 2xc + h^2 - 2hc + c^2$$

$$(y-k)^2 = 4xc - 4hc$$

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$

أي أن معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.

وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

قانون المسافة بين نقطتين

رَبُّ الطرفین

فك الأقواس

فك الأقواس

بسط

حلل

قراءة الرياضيات

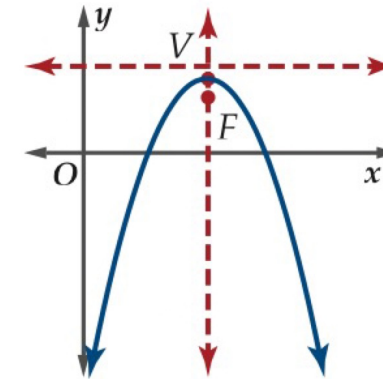
اتجاه فتحة منحنى القطع

ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًا (إلى اليمين أو اليسار).

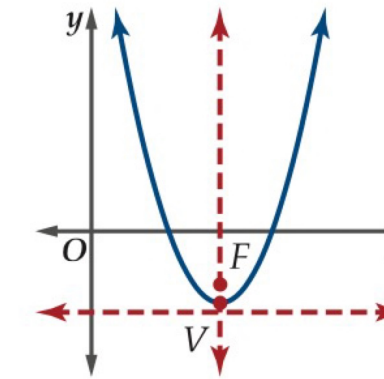
مفهوم أساسي

خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$



$c < 0$



$c > 0$

المنحنى مفتوح رأسيًا

الاتجاه:

(h, k)

الرأس:

$(h, k + c)$

البؤرة:

$x = h$

معادلة محور التماثل:

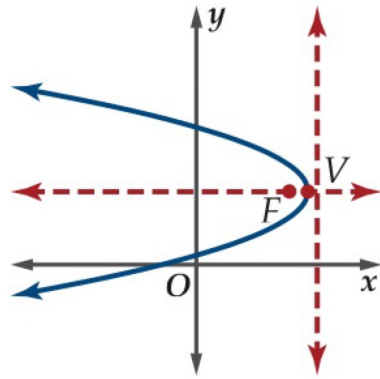
$y = k - c$

معادلة الدليل:

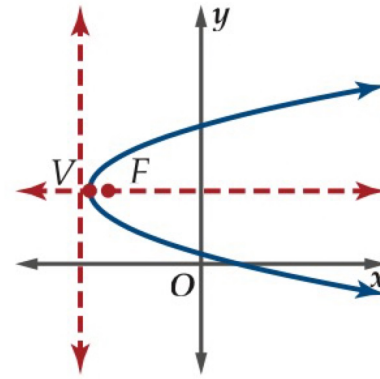
$|4c|$

طول الوتر البؤري:

المعادلة في الصورة القياسية: $(y - k)^2 = 4c(x - h)$



$c < 0$



$c > 0$

المنحنى مفتوح أفقيًا

الاتجاه:

(h, k)

الرأس:

$(h + c, k)$

البؤرة:

$y = k$

معادلة محور التماثل:

$x = h - c$

معادلة الدليل:

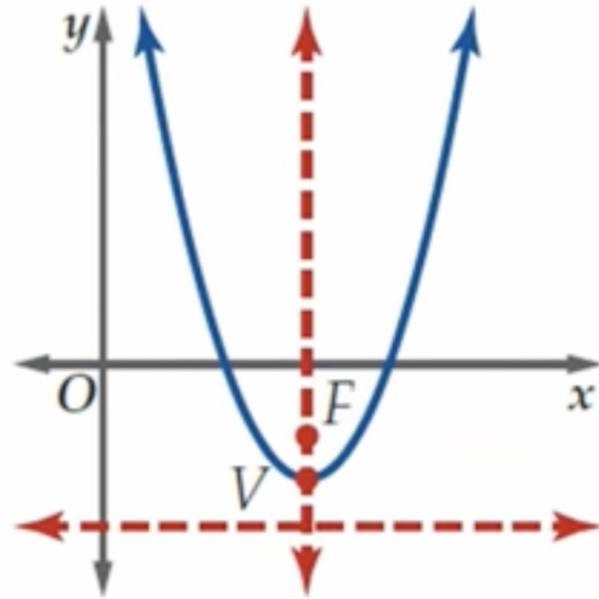
$|4c|$

طول الوتر البؤري:

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل.

القطع المكافئ الذي يفتح لأعلى

$$(x - h)^2 = 4c (y - k)$$



الرأس:

البؤرة:

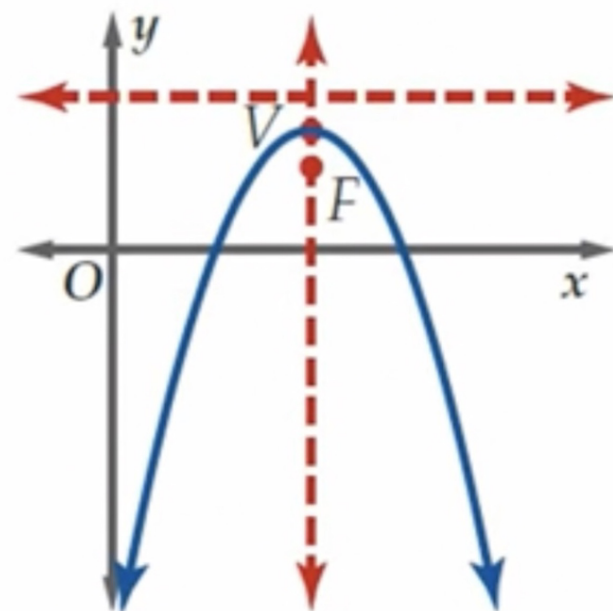
معادلة محور التماثل:

معادلة الدليل:

طول الوتر البؤري:

القطع المكافئ الذي يفتح لأسفل

$$(x - h)^2 = -4c (y - k)$$



الرأس:

البؤرة:

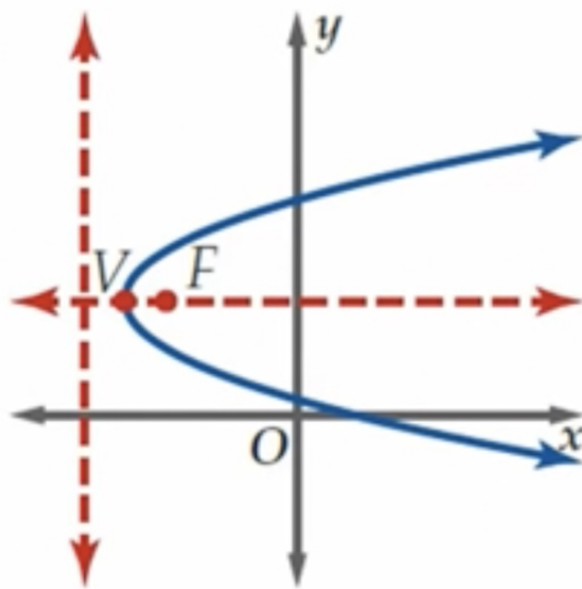
معادلة محور التماثل:

معادلة الدليل:

طول الوتر البؤري:

القطع المكافئ الذي يفتح لليمين

$$(y - k)^2 = 4c (x - h)$$



الرأس:

البؤرة:

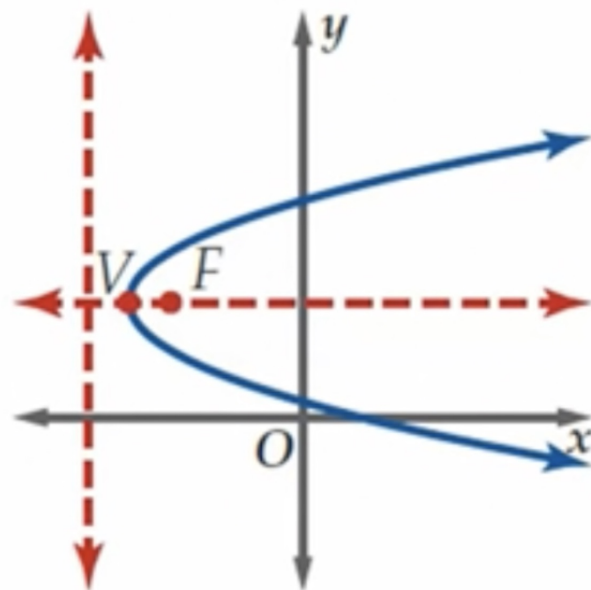
معادلة محور التماثل:

معادلة الدليل:

طول الوتر البؤري:

القطع المكافئ الذي يفتح لليسار

$$(y - k)^2 = -4c (x - h)$$



الرأس:

البؤرة:

معادلة محور التماثل:

معادلة الدليل:

طول الوتر البؤري:

تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًا



حدّد خصائص القطع المكافئ $(y + 5)^2 = -12(x - 2)$ ، ثمّ مثلّ منحناه بيانيًا.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ

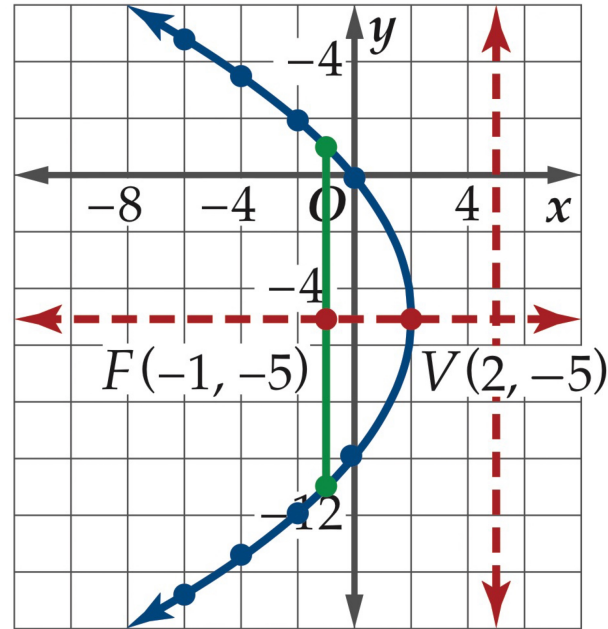
يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:

— مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c > 0$.

— مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c < 0$.

— مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c > 0$.

— مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c < 0$.



خصائص القطع

الرأس	
البؤرة	
الدليل	
محور التماثل	
طول الوتر البؤري	
الاتجاه	

إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري

لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبؤرة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

تحقق من فهمك

$$8(y + 3) = (x - 4)^2 \quad (1A)$$

خصائص القطع	
	الرأس
	البؤرة
	الدليل
	محور تماثل
	طول الوتر البؤري
	الاتجاه

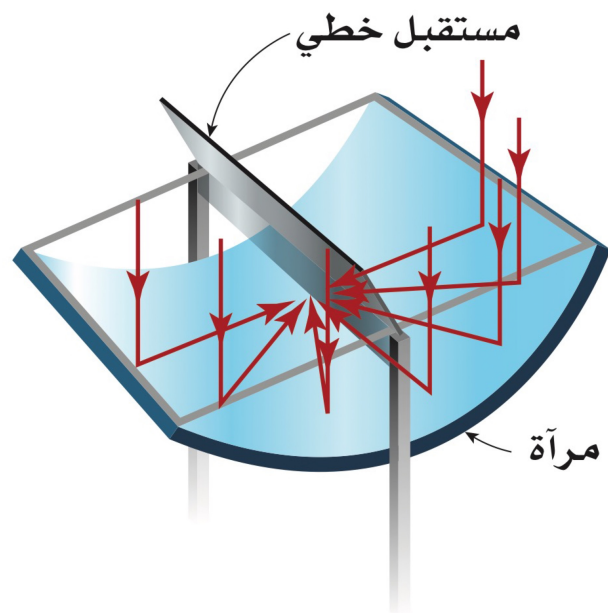
تحقق من فهمك

$$2(x + 6) = (y + 1)^2 \quad (1B)$$

خصائص القطع	
	الرأس
	البؤرة
	الدليل
	محور التماثل
	طول الوتر البؤري
	الاتجاه

خصائص القطع المكافئ

مثال



طاقة شمسية : يتكون مجمّع شمسي من مرآة مقطعتها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$ ، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع ، أين يقع المستقبل الخطي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

تحقق من فهمك

(2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y - 6)$ ، حيث $-5 \leq x \leq 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

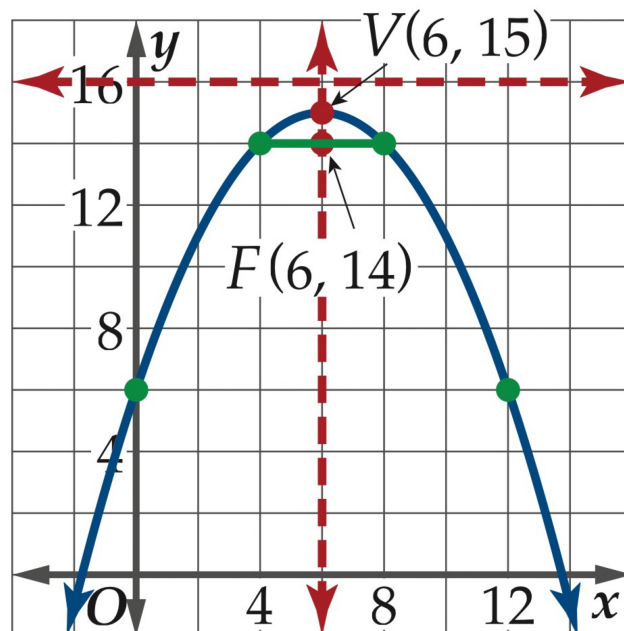
لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحياناً إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية



اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدّد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًا.

خصائص القطع	
	الرأس
	البؤرة
	الدليل
	محور التماثل
	طول الوتر البؤري
	الاتجاه



x	y
0	6
4	14
8	14
12	6

تحقق من فهمك

$$x^2 - 4y + 3 = 7 \quad (3A)$$

خصائص القطع	
	الرأس
	البؤرة
	الدليل
	محور التماثل
	طول الوتر البؤري
	الاتجاه

تحقق من فهمك

$$3y^2 + 6y + 15 = 12x \quad (3B)$$

خصائص القطع	
	الرأس
	البؤرة
	الدليل
	محور التماثل
	طول الوتر البؤري
	الاتجاه

معادلات القطوع المكافئة : يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه



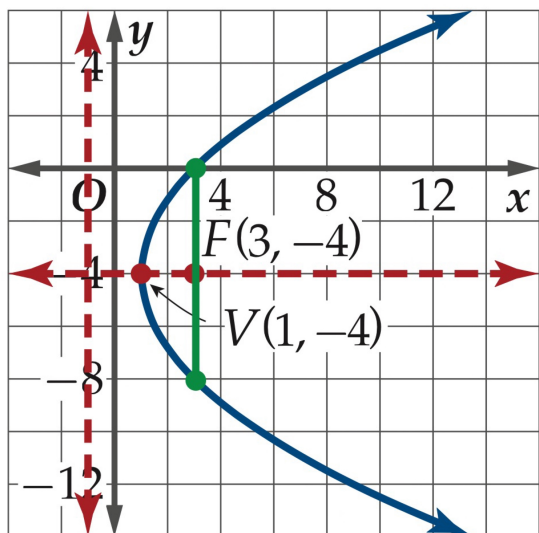
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً:

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة
في الإحداثي x ، فإن منحنى
القطع المكافئ يكون مفتوحاً
إلى أعلى أو إلى أسفل. أما
إذا اشترك الرأس والبؤرة في
الإحداثي y فإن المنحنى
يكون مفتوحاً إلى اليمين أو
إلى اليسار.

(a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.



كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه



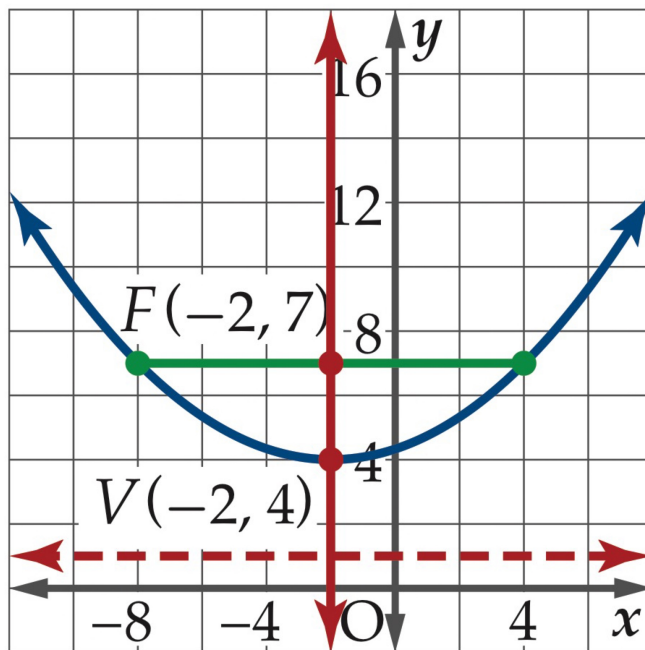
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً:

(b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

إرشادات للدراسة

الدليل

يقع الدليل في الاتجاه
المعاكس لاتجاه منحنى
القطع المكافئ.

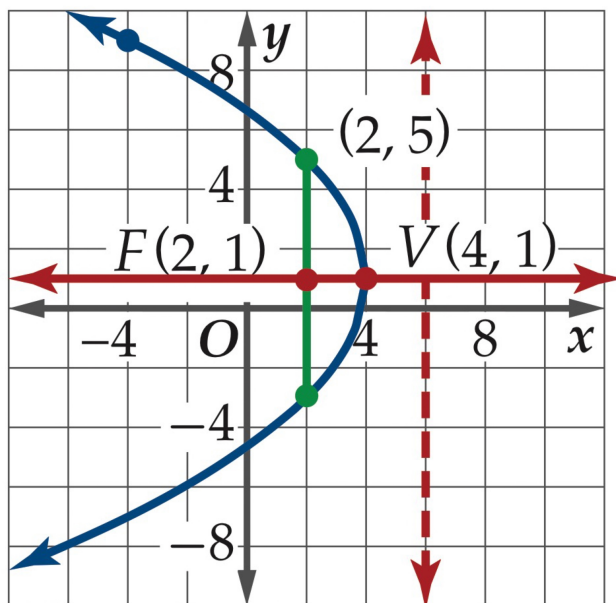


كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه



اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً:

(c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.



تحقق من فهمك 

4A البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

تحقق من فهمك 

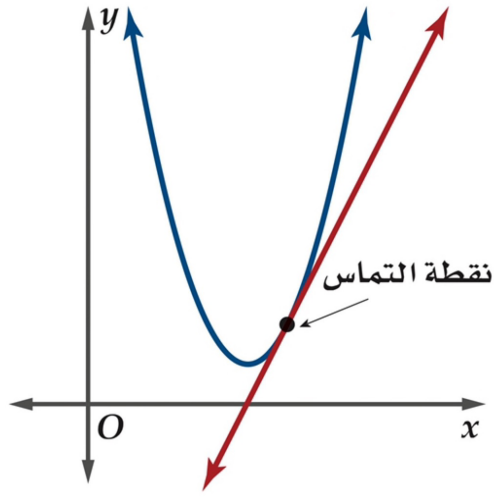
(4B) الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

تحقق من فهمك

4C البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل ، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

تحقق من فهمك

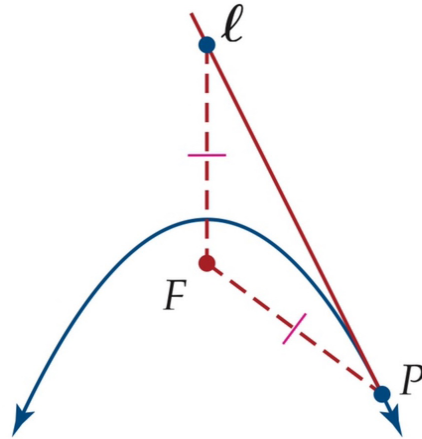
(4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.



يمكن رسم مماسٍ لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.

مفهوم أساسي

مماس منحنى القطع المكافئ

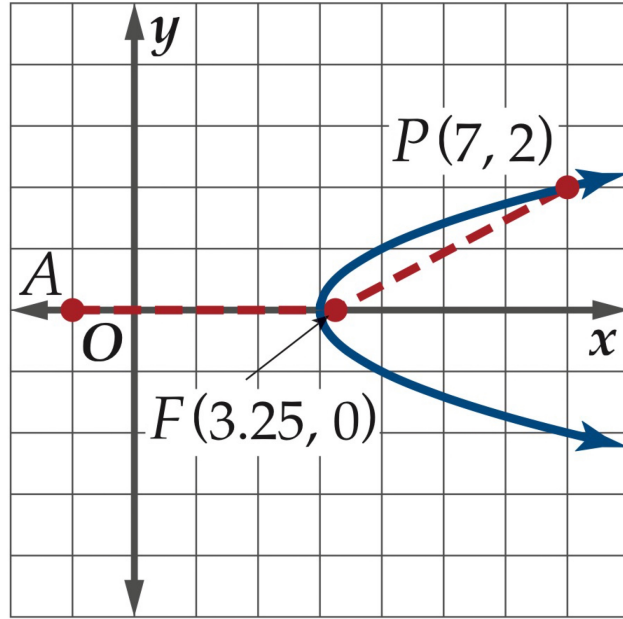


مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.



تحقق من فهمك 

$$y = 4x^2 + 4; (-1, 8) \quad \mathbf{5A}$$

تحقق من فهمك 

$$x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4) \quad \textbf{(5B)}$$



حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل
منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

$$(x + 1)^2 = -12(y - 6) \quad \mathbf{(2)} \qquad (x - 3)^2 = 12(y - 7) \quad \mathbf{(1)}$$



اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدّد خصائصه ومثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

$$(9) \quad x^2 - 17 = 8y + 39 \quad (10) \quad y^2 + 33 = -8x - 23$$



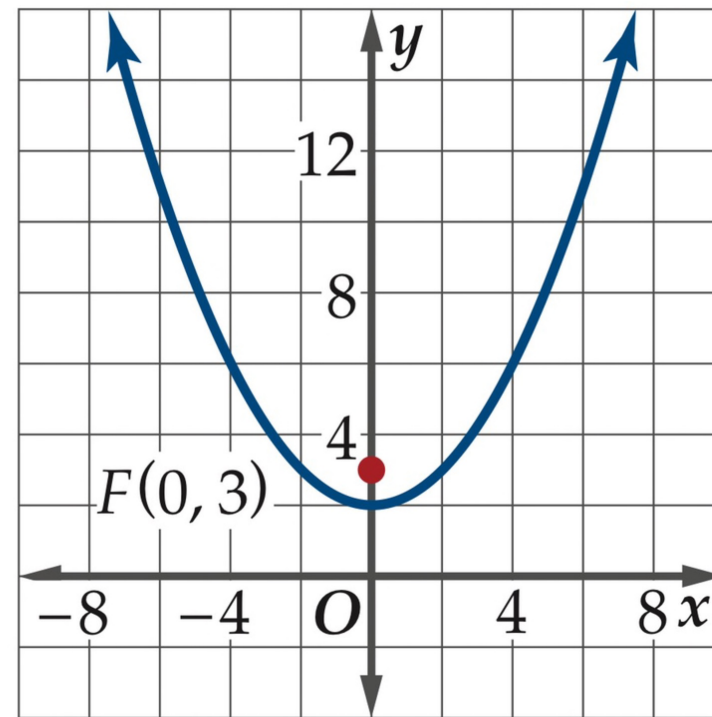
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(15) البؤرة $(-9, -7)$ والرأس $(-9, -4)$.

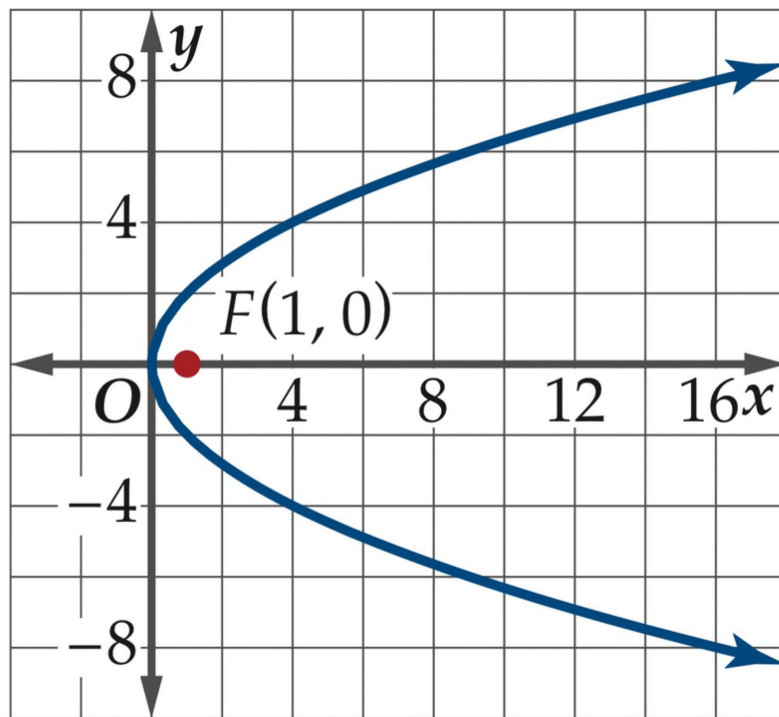


اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F ، في كلِّ مما يأتي:

(33)

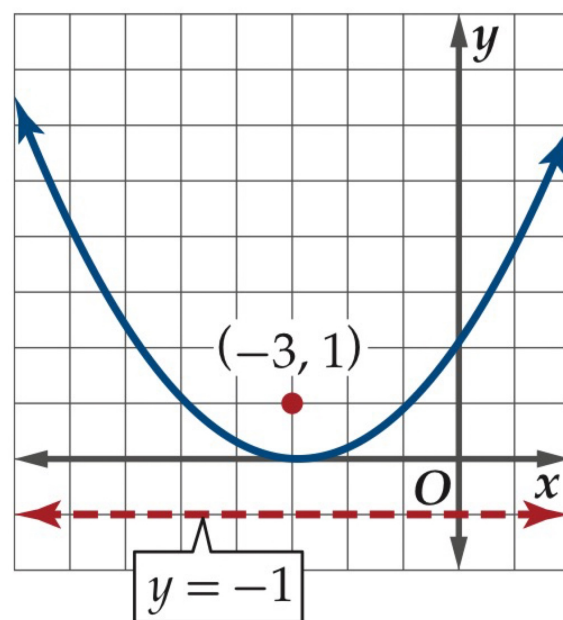


(34)

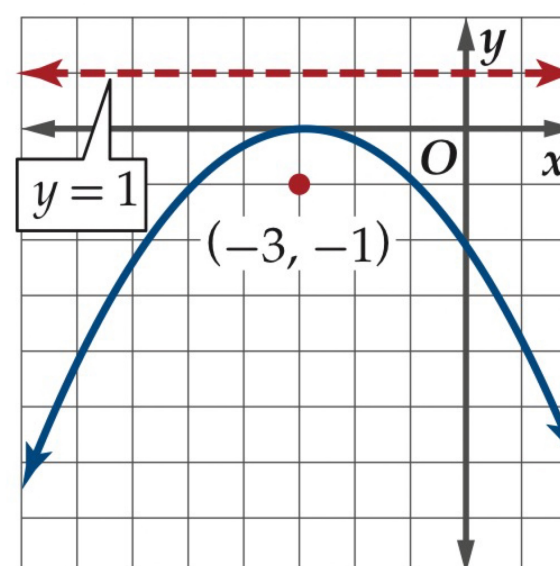


(36) **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانياً كما هو موضح أدناه. فأَي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

ميمونة



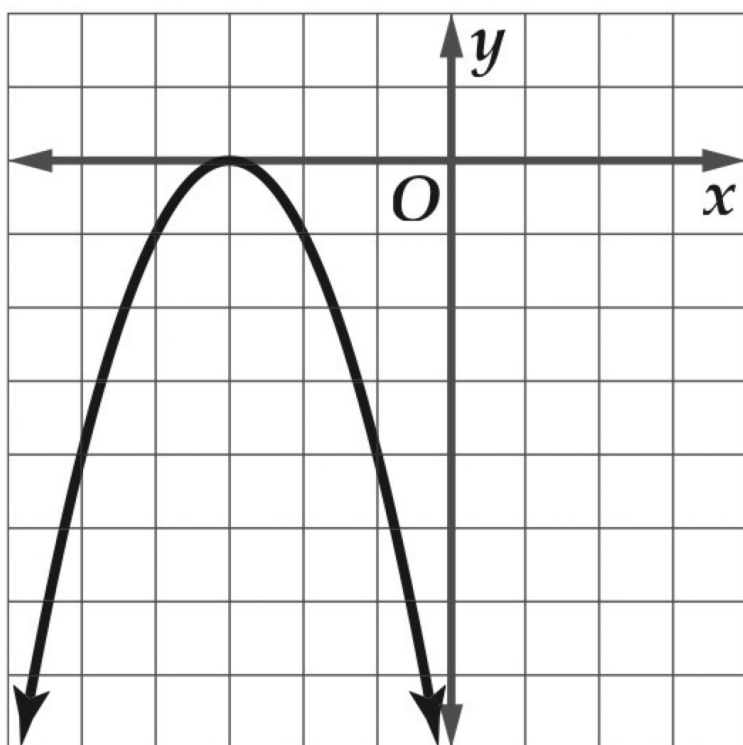
صفيّة





(49) إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

A $x^{-\frac{1}{4}}$ **B** $\sqrt{x^3}$ **C** $x^{\frac{3}{4}}$ **D** $\sqrt{x^5}$



(50) ما الدالة الرئيسية (الأم) للدالة الموضّح
منحنائها جانبًا؟

A $y = x$
C $y = |x|$
B $y = \sqrt{x}$
D $y = x^2$

القسط المكافئ المفتوح أفقياً

القسط المكافئ المفتوح أفقياً ..

$$\text{المعادلة: } (y - k)^2 = 4c(x - h)$$

إذا كانت c موجبة فإن الفتحة لليمين.

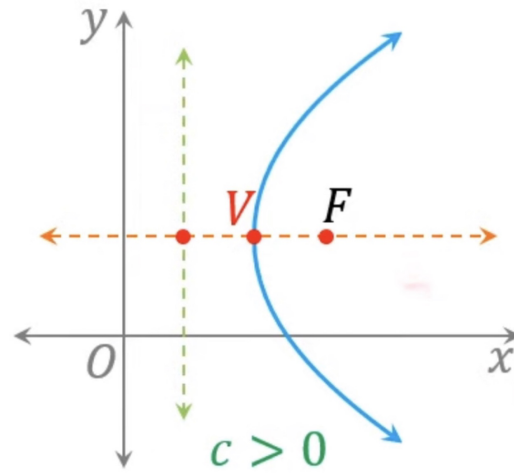
مثلاً: القسط المكافئ ..

$$(y - 7)^2 = 8(x - 5)$$

محوره أفقي و رأسه $V(5, 7)$ و $c = 2$ (الفتحة لليمين)

فائدة: في معادلة القسط المكافئ ..

إذا كان التربيع على y فإن القسط مفتوح أفقياً،



القسط المكافئ المفتوح أفقياً

القسط المكافئ المفتوح أفقياً ..

$$\text{المعادلة: } (y - k)^2 = 4c(x - h)$$

إذا كانت c سالبة فإن الفتحة لليسار.

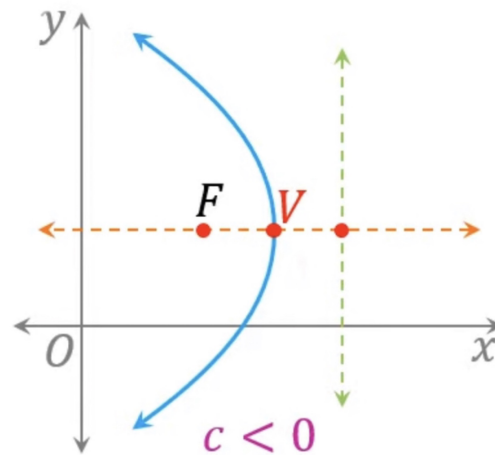
مثلاً: القسط المكافئ ..

$$(y + 9)^2 = -12(x - 5)$$

محوره أفقي

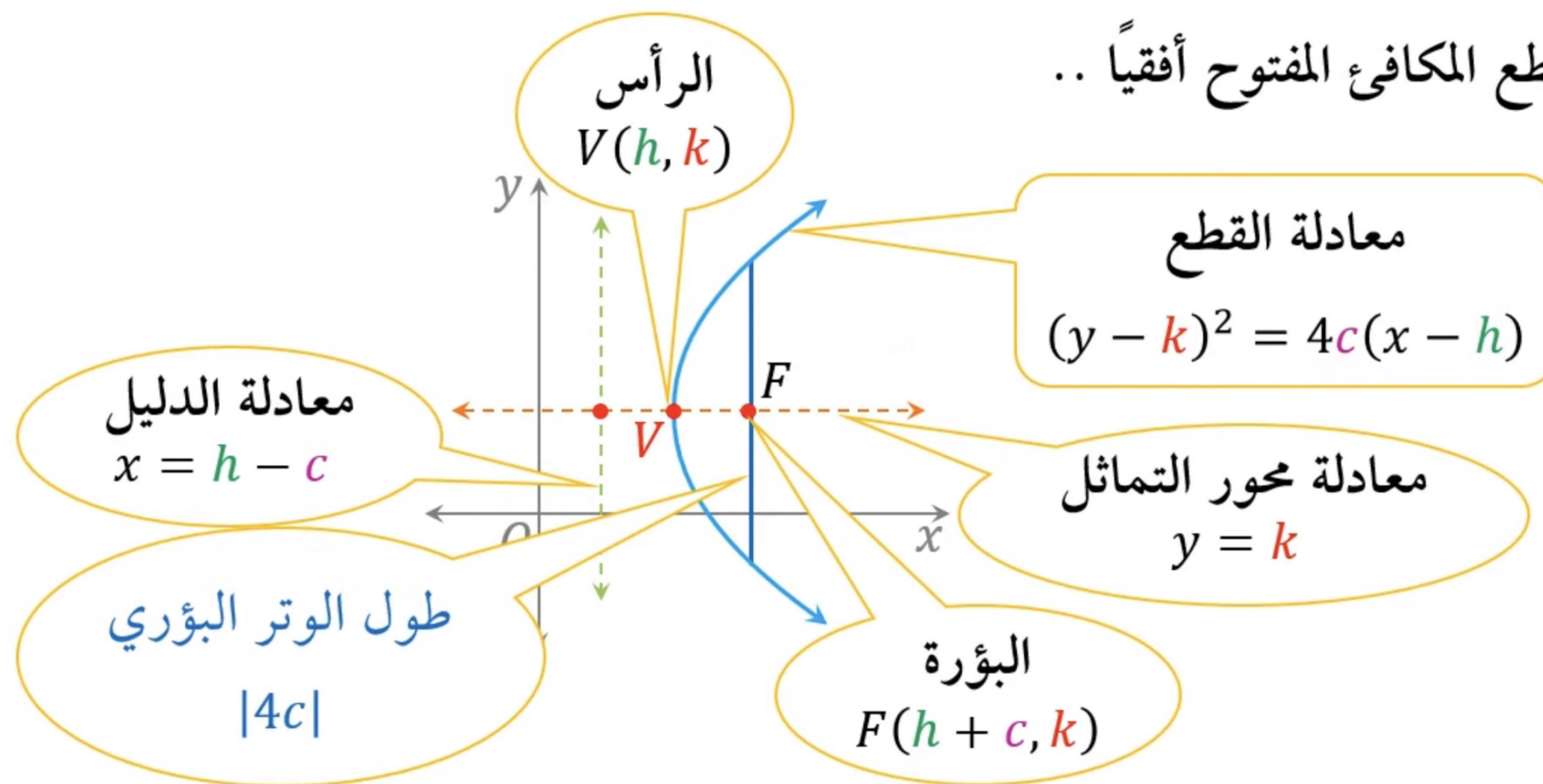
ورأسه $V(5, -9)$

و $c = -3$ (الفتحة لليسار)



ملخص | القطع المكافئ المفتوح أفقياً

القطع المكافئ المفتوح أفقياً ..



تحصيلي

طول الوتر البؤري للقطع المكافئ $(y - 5)^2 = 8(x - 3)$ هو ..

Ⓐ 3 وحدات

Ⓑ 5 وحدات

Ⓒ 8 وحدات

Ⓓ 10 وحدات

تحصيلي

معادلة محور تماثل القطع المكافئ $(y - 4)^2 = -6(x + 1)$ هي ..

$y = 1$ (A)

$y = 4$ (B)

$x = 1$ (C)

$x = 4$ (D)