القطوع الزائدة

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًّا.
(الدرس 2–4)

والآن:

- أحلل معادلات القطوع الزائدة، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد
hyperbola

البؤرتان
foci

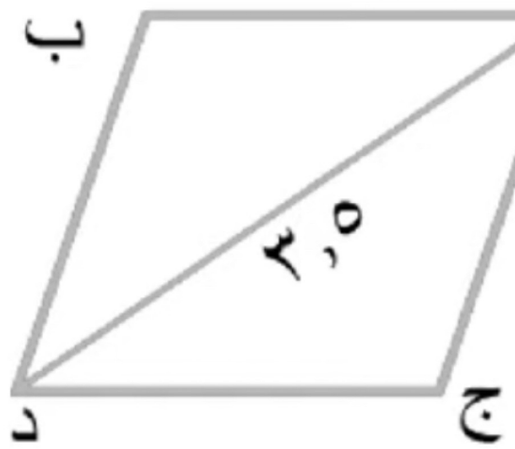
المركز
center

الرأسان
vertices

المحور القاطع
transverse axis

المحور المرافق
conjugate axis

أوجد محيط متوازي الأضلاع إذا علمت أن المثلث أ ج د متساوي الزوايا؟



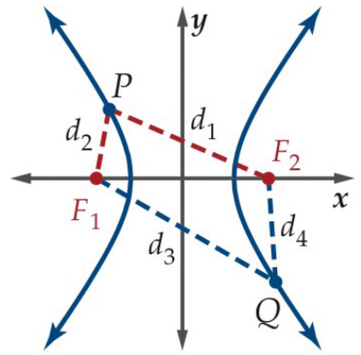
أ- ٦
ب- ٧,٥
ج- ١٤
د- ٢٠

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقصٍ؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتَيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

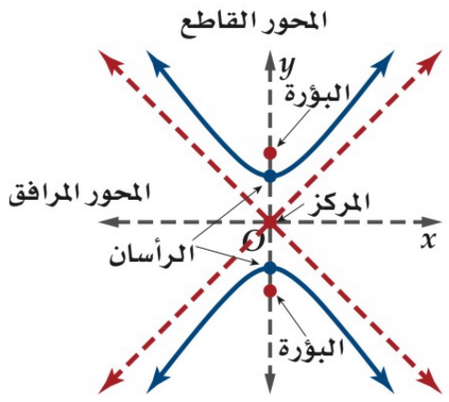
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًّا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

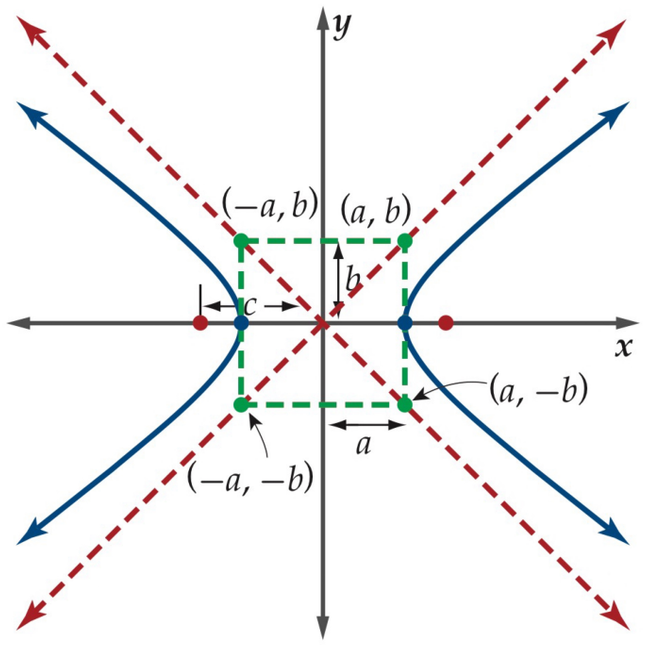


يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، و**رأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.

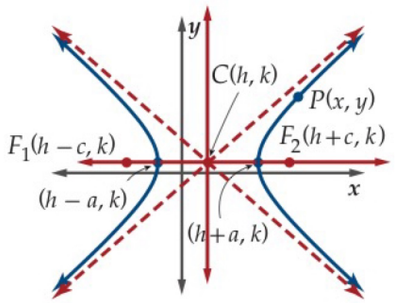


لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.



الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:

يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.



$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$$

خاصية التوزيع ثم التجميع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$$

اجمع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$$

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$$

بسّط
$$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$$

اقسم الطرفين على -4.
$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$$

ربّع الطرفين
$$a^2[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

الخاصية التوزيعية
$$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

بسّط
$$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

الخاصية التوزيعية
$$(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$a^2 - c^2 = -b^2$
$$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$$

اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًّا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًّا.

إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

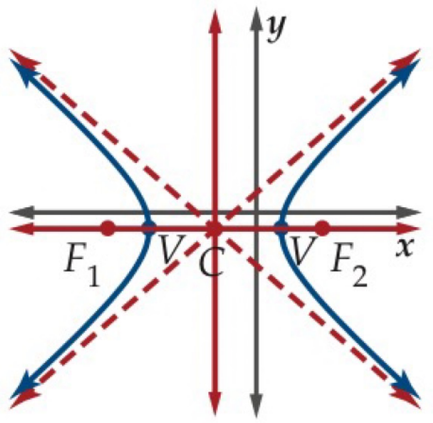
يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.

مفهوم أساسي

خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

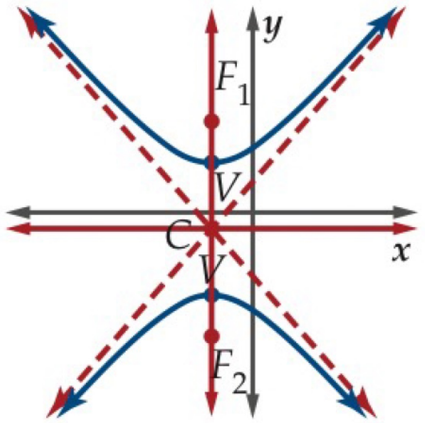
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه:	المحور القاطع أفقي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(h \pm c, k)$
المحور القاطع:	$y = k$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$x = h$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
طول البعد البؤري:	$2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



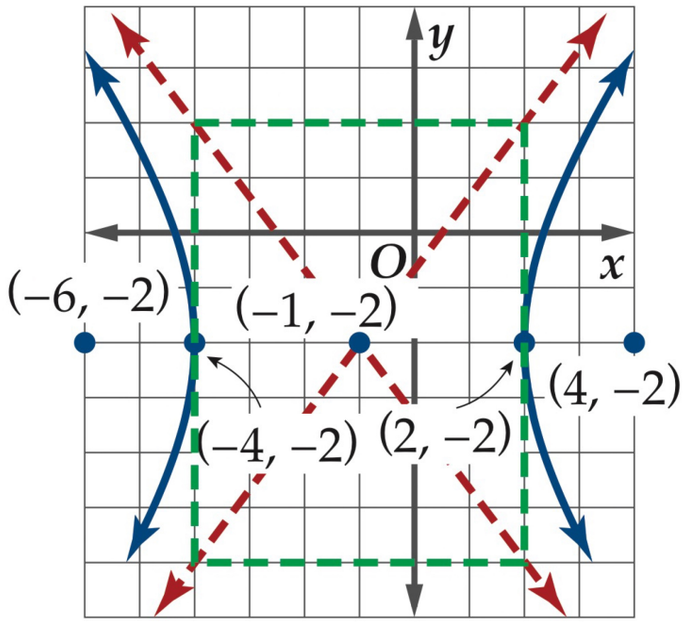
الاتجاه:	المحور القاطع رأسي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع:	$x = h$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$y = k$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
طول البعد البؤري:	$2C$

وزارة التعـ
stry of Education

تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

مثال

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.



تنبيه!

عندما تمثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y ، فإن اتجاه القطع رأسي.

تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

تحقق من فهمك

(1B $\dfrac{(y+4)^2}{64} - \dfrac{(x+1)^2}{81} = 1$

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

إرشادات للدراسة

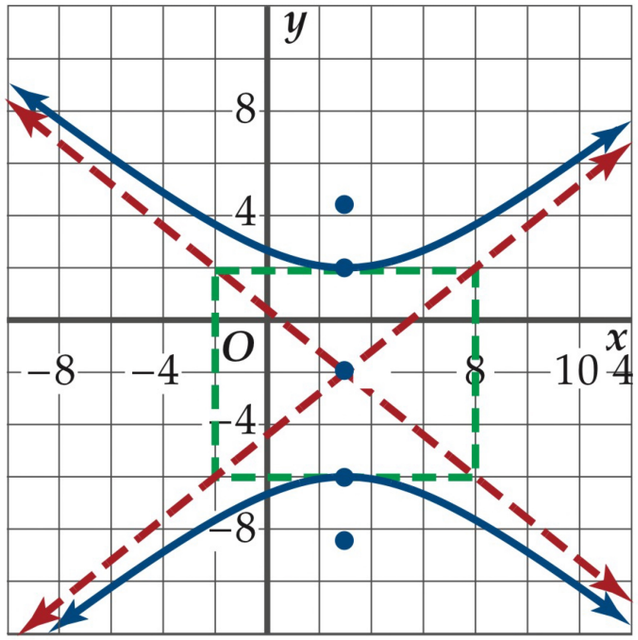
الصورة القياسية

تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1 .

كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.



تحقق من فهمك

2A) $4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$

تحقق من فهمك

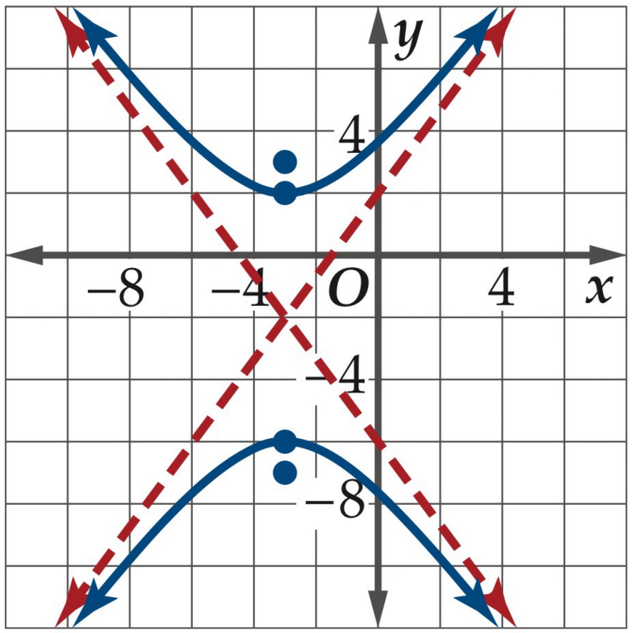
(2B $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$

كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

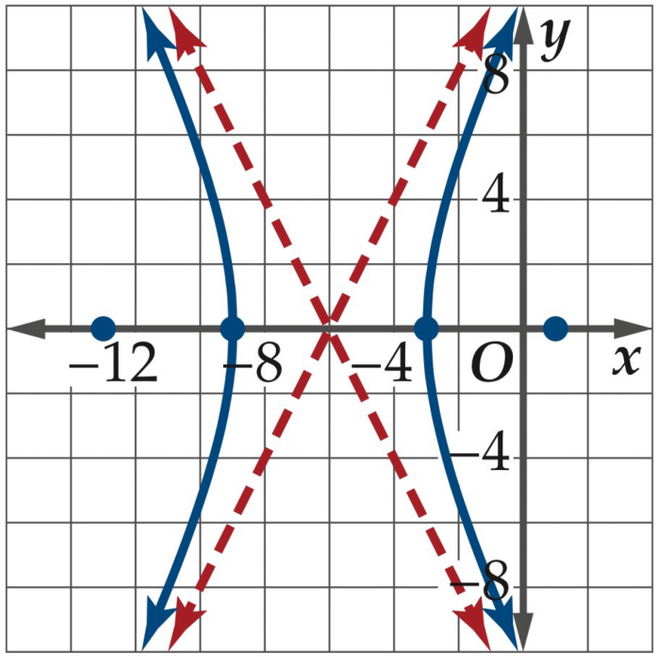


كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي:

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = -2x + 12, y = 2x - 12$.



تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

تحقق من فهمك

3B) البؤرتان $(12, -2), (2, -2)$، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}, y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

مثال

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

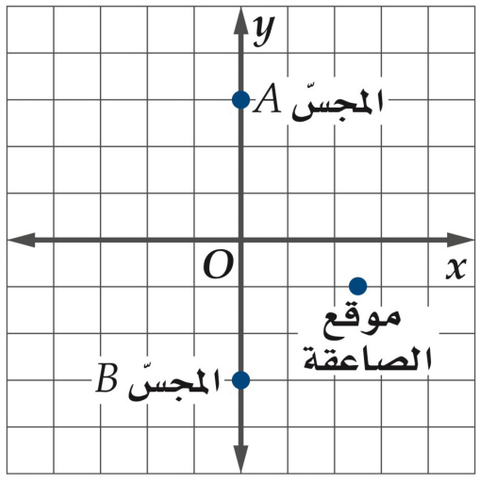
4B) $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

تطبيقات على القطع الزائد

مثال

أرصاد : يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km ، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B .



a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.

b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.

تحقق من فهمك

5) ملاحة بحرية : تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًّا .

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(100, 0)$,$(-100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها$(100, 0)$.

تدرب

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: **(مثال 1)**

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

3) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

تدرب

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًّا: **(مثال 2)**

8) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

تدرب

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:
(مثال 3)

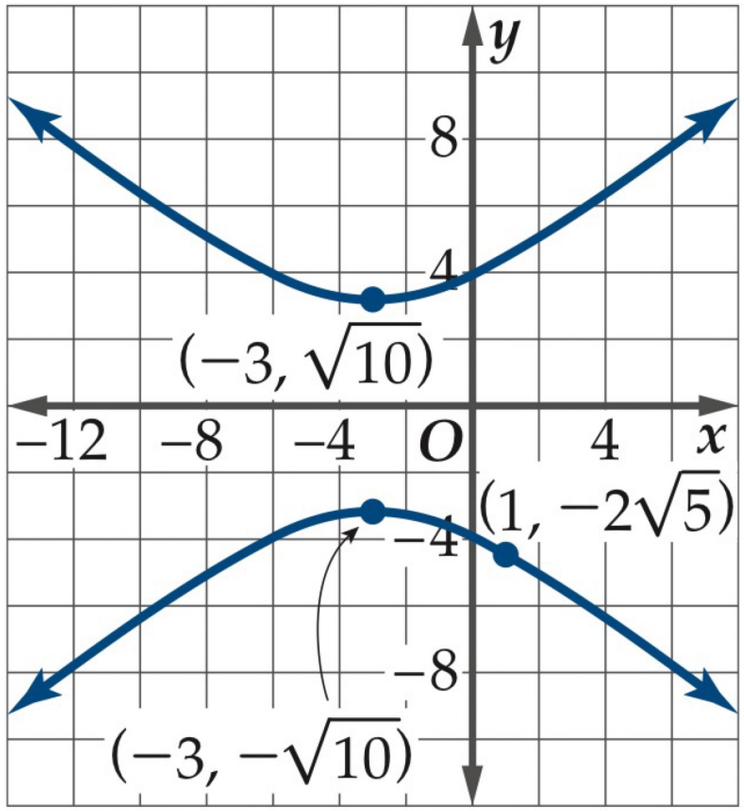
13) البؤرتان $(-7, -1), (9, -1)$، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:
(مثال 4)

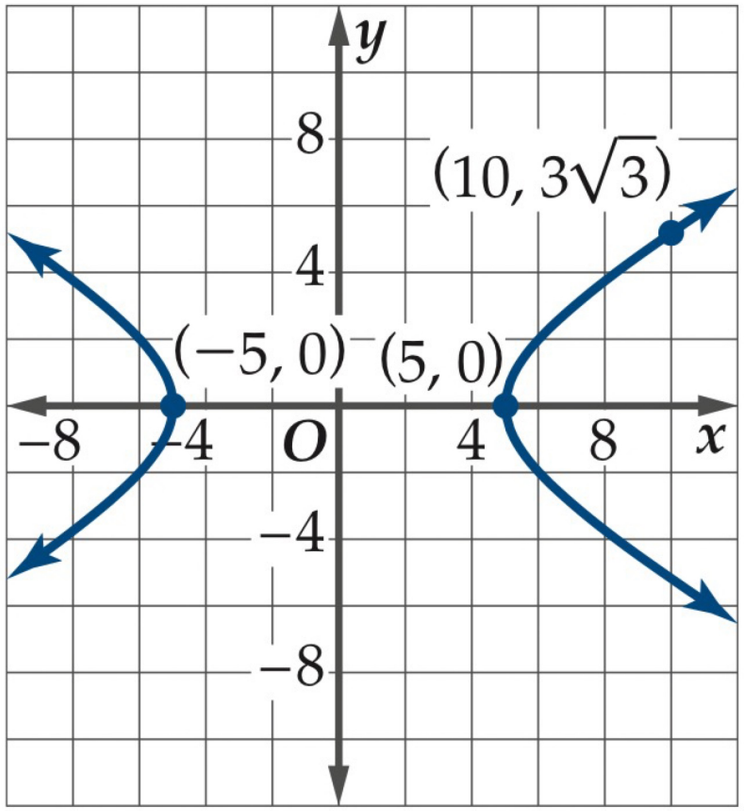
21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

اكتب معادلة القطع الزائد الممثَّل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29)



30)



47) مراجعة: يمثِّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

48) سؤال ذو إجابة قصيرة: أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

في القطع الزائد $\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ ، مركز القطع النقطة ..

Ⓐ $(1,4)$

Ⓑ $(2, 5)$

Ⓒ $(-2, -1)$

Ⓓ $(2,1)$

ما معادلة المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ ؟

(A) $y = -1$

(B) $y = 9$

(C) $y = 1$

(D) $x = 0$