القطوع الناقصة والدوائر

قدرات

نسبة المظلل إلى الشكل كاملاً

أ- ١ : ٤ ب- ١ : ٨

ج- ١ : ١٦ د- ١ : ٣٢

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًّا.
(الدرس 1 — 4)

والآن:

- أُحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثّلُهما بيانيًّا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

المفردات:

القطع الناقص
ellipse

البؤرتان
foci

المحور الأكبر
major axis

المركز
center

المحور الأصغر
minor axis

الرأسان
vertices

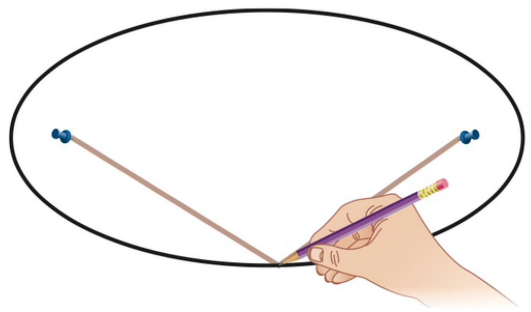
الرأسان المرافقان
co-vertices

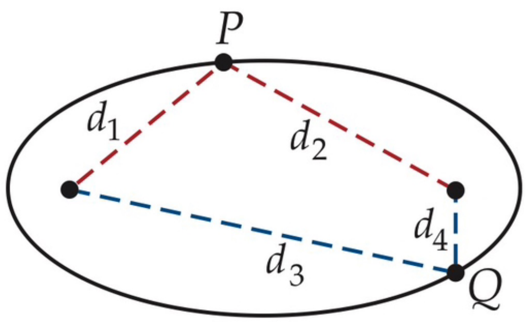
الاختلاف المركزي
eccentricity

لماذا؟

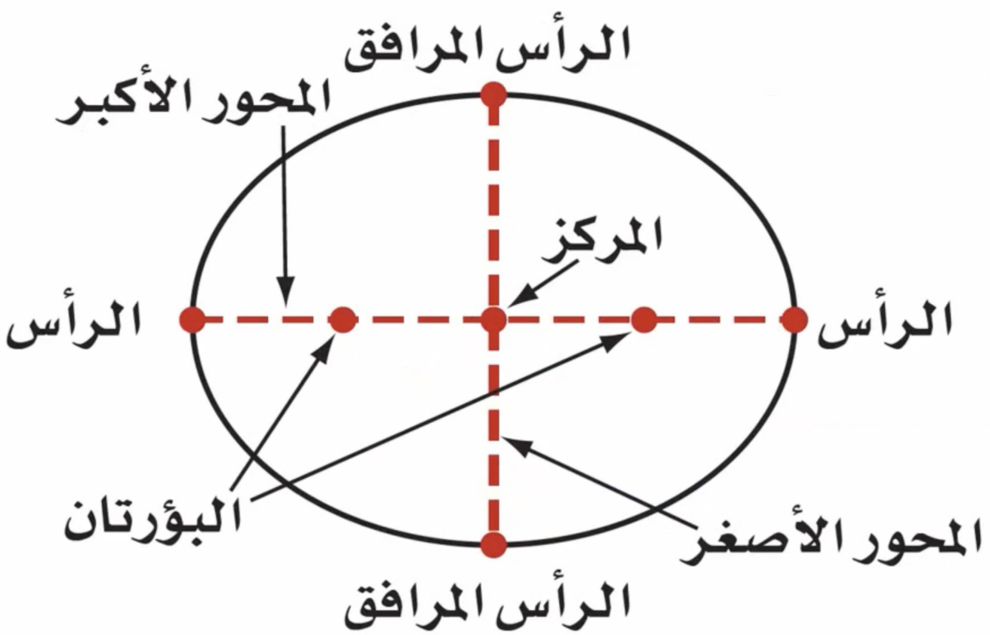
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًّا : **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**، وعمليًّا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البورتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .



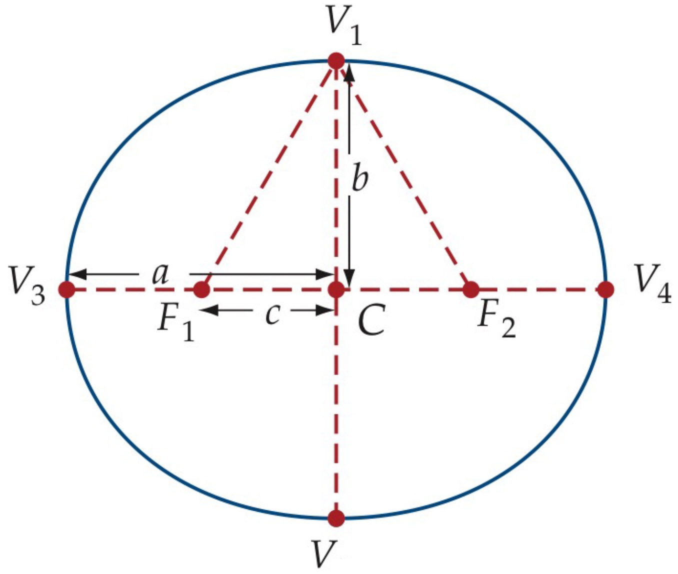


تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمىّ نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة.

وفيما يلي توضيحٌ للعلاقة بين a, b, c



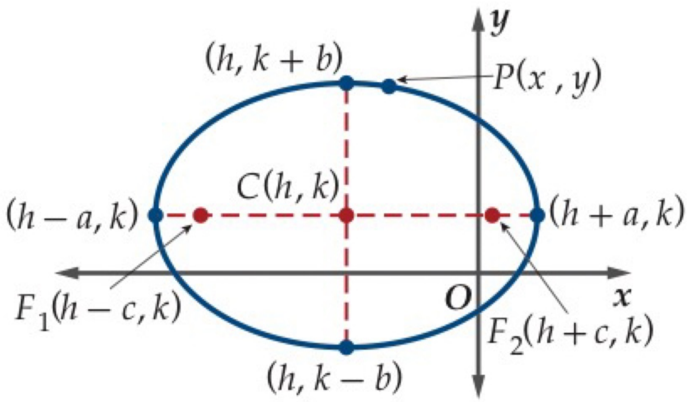
بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS
$(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_2C})$
فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛
لإيجاد طولي V_1F_1 ، V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c .

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	**تعريف القطع الناقص**
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	**بسِّط**
$V_1F_1 = a$	**اقسم**

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

افتــرض أن $P(x, y)$ نقطــة على منحنــى القطع الناقص الــذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشــكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.

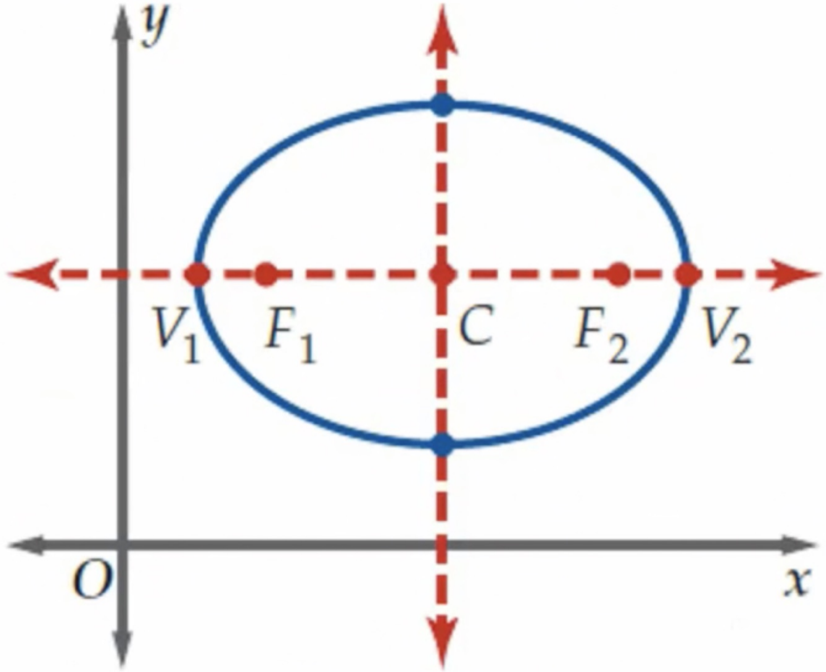


تعريف القطع الناقص	$PF_1 + PF_2 = 2a$
صيغة المسافة	$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} + \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$
خاصية التوزيع ثم التجميع	$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$
اطرح	$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a - \sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$
ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين	$(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$
بسّط	$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 4a^2 + 4c(x-h)$
اقسم كلا الطرفين على 4	$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = a^2 + c(x-h)$
ربّع الطرفين	$a^2[(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 + 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$
خاصية التوزيع	$a^2(x-h)^2 + 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 + 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$
بسّط	$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$
$a^2 - c^2 = b^2$	$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$
اقسم الطرفين على a^2b^2	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ، حيث $a > b$ ، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

القطع الناقص الأفقي

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



المركز:

البؤرتان:

الرأسان:

الرأسان المرافقان:

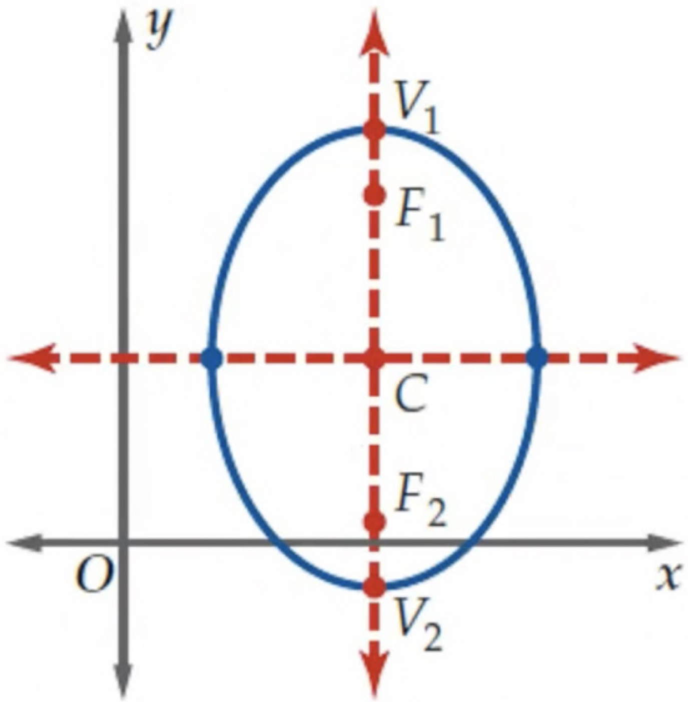
المحور الأكبر:

المحور الأصغر:

طول البعد البؤري:

القطع الناقص الرأسي

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



المركز:

البؤرتان:

الرأسان:

الرأسان المرافقان:

المحور الأكبر:

المحور الأصغر:

طول البعد البؤري:

القطوع الناقصة

$a^2 \to y^2$ الاتجاه رأسي

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

(h, k)

- $(h, k+a)$, $(h, k-a)$ الرأسان
  - $2b =$ طول المحور
  - $y = k$ المحور الأصغر
- $(h, k-c)$, $(h, k+c)$ البؤرتان
  - $2c =$ طول بؤرى البؤري
- $(h+b, k)$, $(h-b, k)$ الرأسان المرافقان
  - $2b =$ طول المحور
  - $x = h$ المحور الأكبر

$a^2 \to x^2$ الاتجاه: أفقي

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

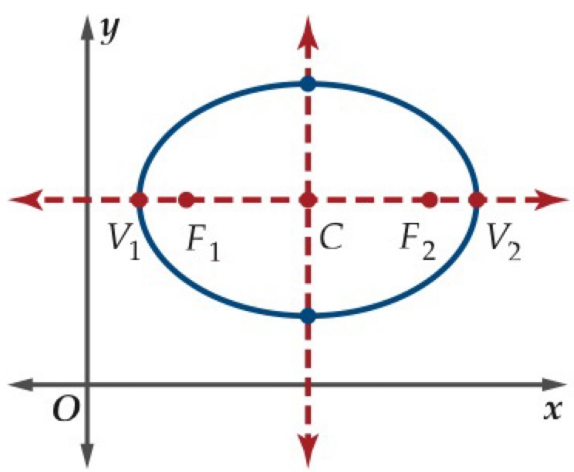
(h, k)

- $(h+a, k)$, $(h-a, k)$ الرأسان
  - $2a =$ طول المحور الأصغر
  - $x = k$
- $(h+c, k)$, $(h-c, k)$ البؤرتان
  - $2c =$ طول بؤرى البؤري
- $(h, k+b)$, $(h, k-b)$ الرأسان المرافقان
  - $2b =$ طول المحور الأكبر
  - $y = k$

مفهوم أساسي خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه : المحور الأكبر أفقي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h \pm c, k)$

الرأسان : $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان : $(h, k \pm b)$

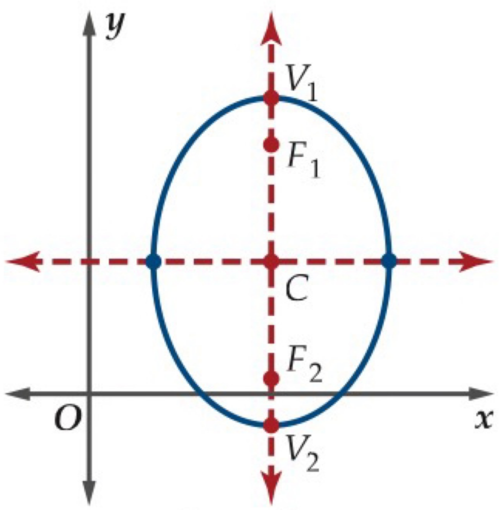
المحور الأكبر : $y = k$ وطوله $2a =$

المحور الأصغر : $x = h$ وطوله $2b =$

العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه : المحور الأكبر رأسي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

الرأسان : $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان : $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر : $x = h$ وطوله $2a =$

المحور الأصغر : $y = k$ وطوله $2b =$

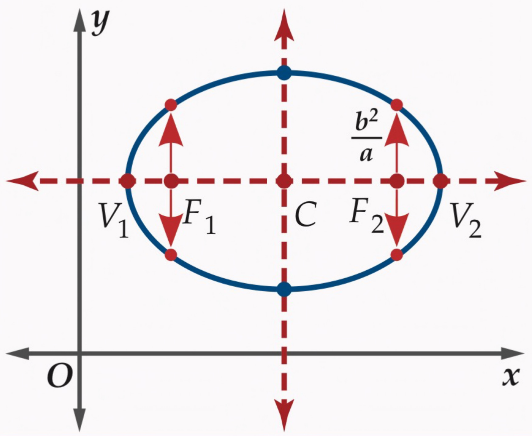
العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.

لرسم القطع الناقص نعين نقاطًا مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين.



تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًّا

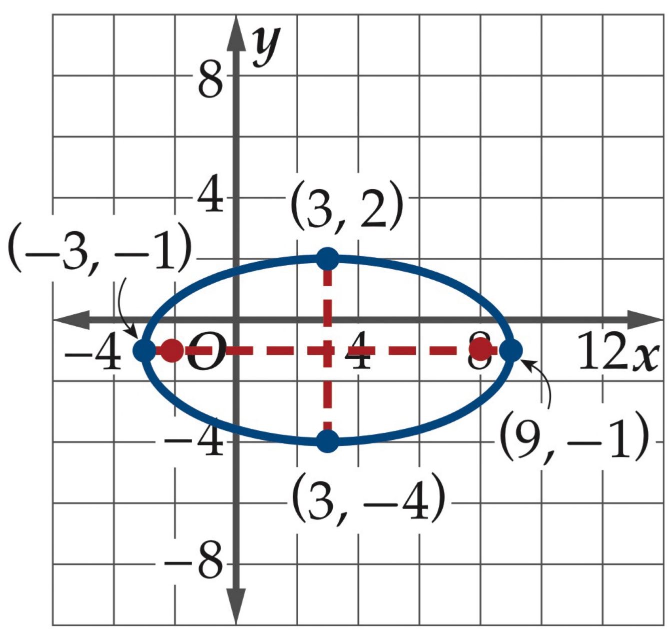
مثال حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) $$\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

خصائص القطع الناقص	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
الرأسان المرافقان	
المحور الأكبر	
المحور الأصغر	
البعد البؤري	

إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص
إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًّا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًّا، حيث $a^2>b^2$ دائمًا.



تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًّا

مثال

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

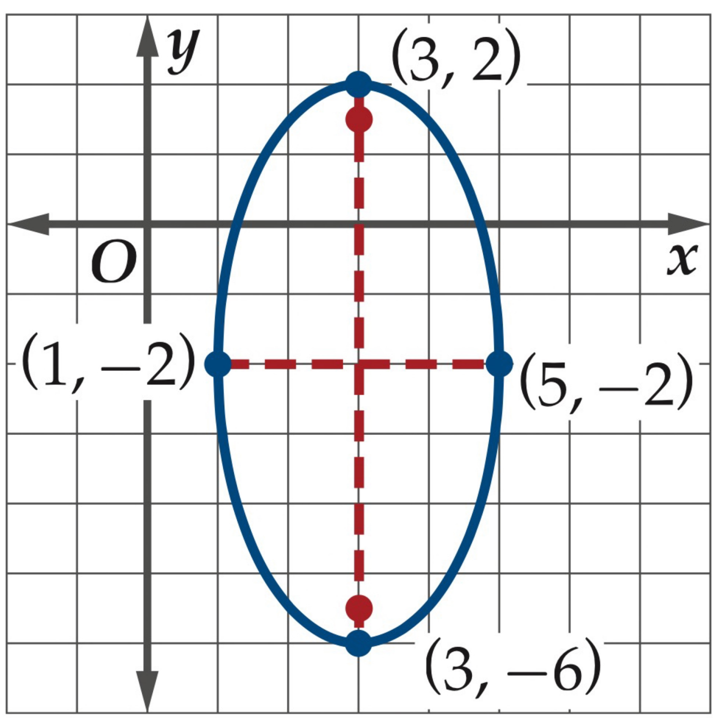
إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًّا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًّا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

b) $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

خصائص القطع الناقص	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
الرأسان المرافقان	
المحور الأكبر	
المحور الأصغر	
البعد البؤري	



تحقق من فهمك

1A) $\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

خصائص القطع الناقص	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
الرأسان المرافقان	
المحور الأكبر	
المحور الأصغر	
البعد البؤري	

تحقق من فهمك

$x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$ (**1B**

خصائص القطع الناقص	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
الرأسان المرافقان	
المحور الأكبر	
المحور الأصغر	
البعد البؤري	

مثال

كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-8, -6)$, $(2, -6)$ ، والرأسان المرافقان $(-3, -9)$, $(-3, -3)$.

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.

إرشادات للدراسة

طول البعد البؤري

طول البعد يساوي $2c$ دائمًا.

مثال

كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

b) الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.

تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

تحقق من فهمك

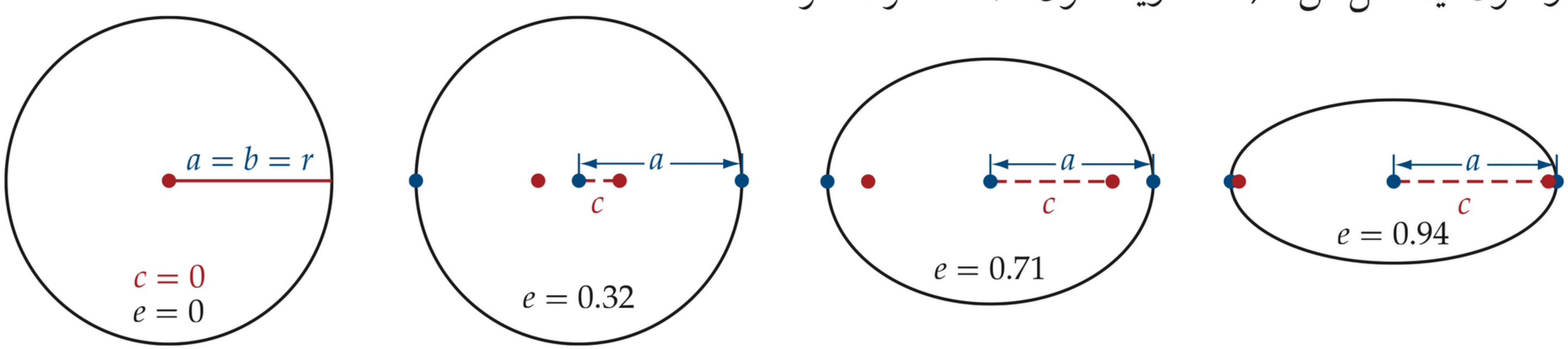
2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a. و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ ، حيث $c^2=a^2-b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e=\frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي e , c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a , b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثال

تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x-6)^2}{100} = 1$.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

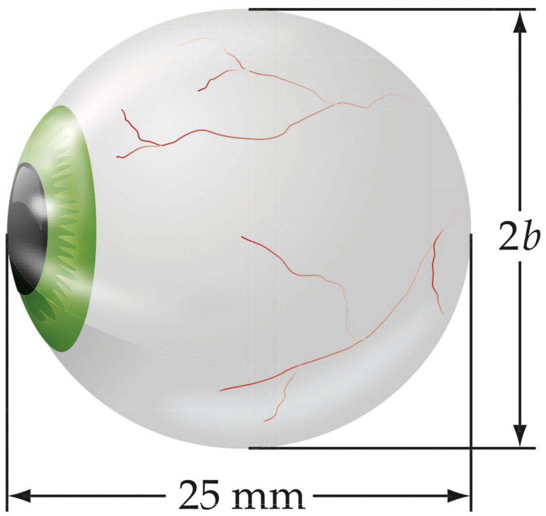
3A) $\frac{x^2}{18}+\frac{(y+8)^2}{48}=1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19}+\frac{(y+7)^2}{17}=1$

استعمال الاختلاف المركزي

مثال

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي **0.28**. فإذا كان عمق العين يساوي **25 mm** تقريبًا، **فما الارتفاع التقريبي لها؟**



تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ معادلة القطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ $e=0$ عندما $a=b$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$ اضرب كلا الطرفين في a^2 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$ a نصف قطر الدائرة

مفهوم أساسي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال

كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(2, -1)$ وقطرها 8 .

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10

كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

مثال

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$, $(7, 6)$.

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

تدرب

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

تدرب

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(مثال 2)

5) الرأسان $(13, -3), (-7, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3), (-5, -3)$

تدرب

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي:

10) $\dfrac{(x+5)^2}{72} + \dfrac{(y-3)^2}{54} = 1$

تدرب

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5)

15) المركز $(3, 0)$، و نصف القطر 2.

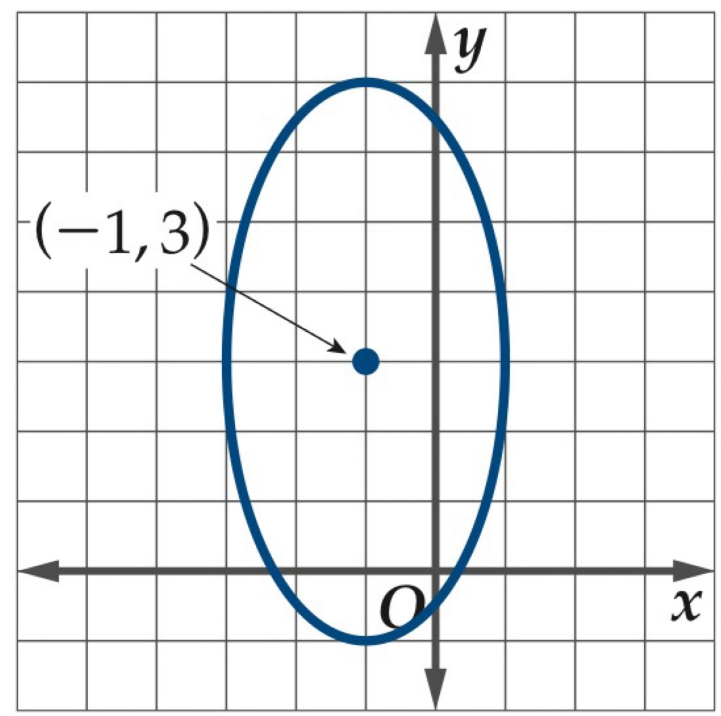
اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي:

18) $(2, 1)$, $(2, -4)$

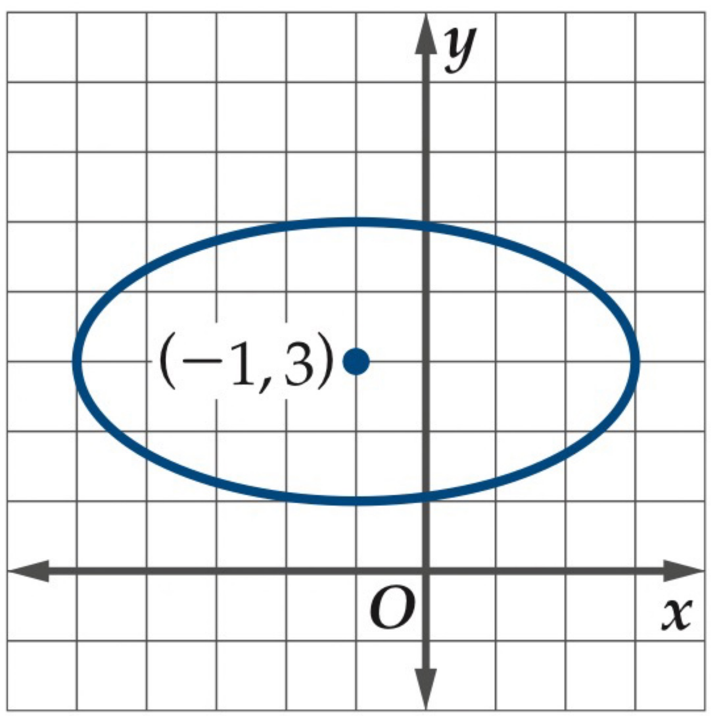
تدرب

37) **اكتشف الخطأ:** مثَّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

خالد



ياسر



تدرب

53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M ، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5}+\frac{x^2}{7.5}=1$

B $\frac{y^2}{182.25}+\frac{x^2}{56.25}=1$

C $\frac{y^2}{56.25}+\frac{x^2}{182.25}=1$

D $\frac{y^2}{7.5}+\frac{x^2}{13.5}=1$

أيُّ القطوع الناقصة التالية مركزه النقطة $(3, 1)$ ؟

Ⓐ $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$

Ⓑ $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$

Ⓒ $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$

Ⓓ $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$

في القطع الناقص $\frac{(y-1)^2}{9}+\frac{(x-2)^2}{36}=1$ ، طول المحور الأكبر ..

Ⓐ 4 وحدات

Ⓑ 6 وحدات

Ⓒ 12 وحدة

Ⓓ 18 وحدة