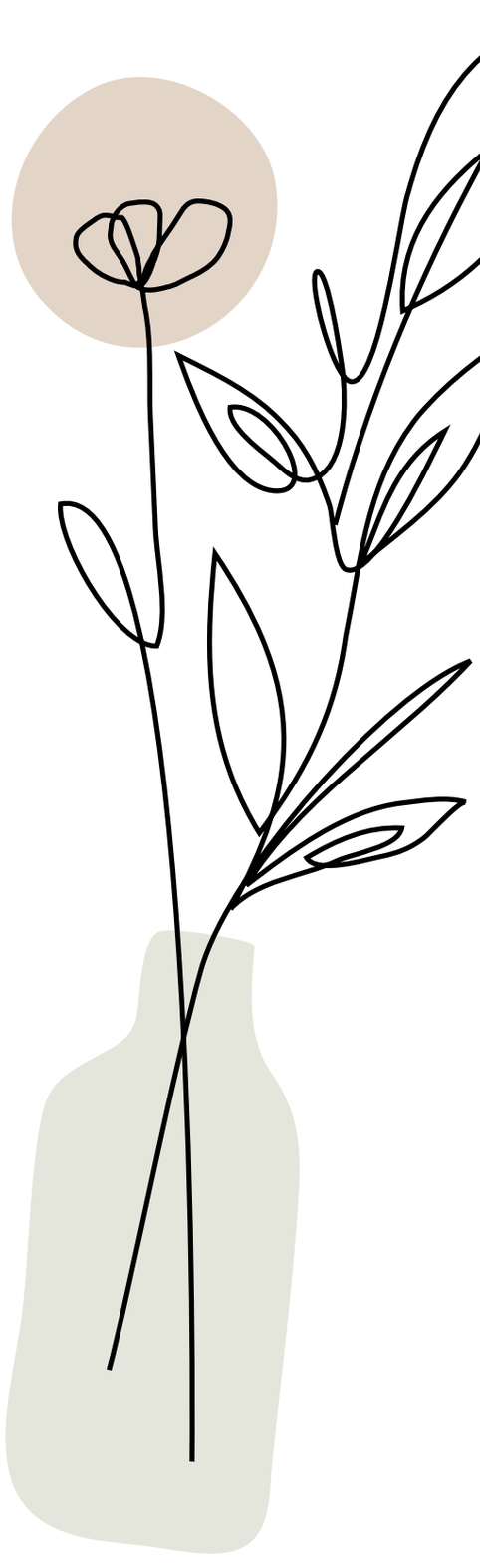
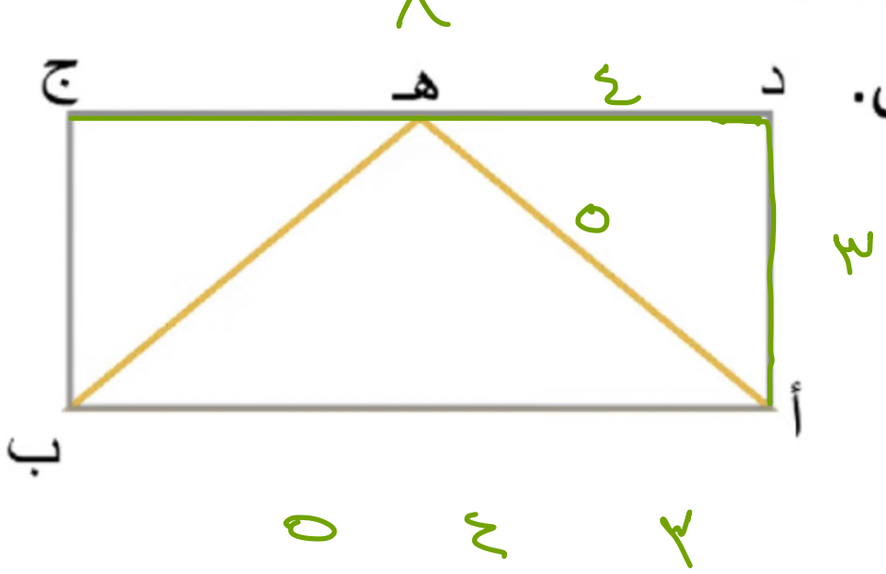


إثبات صحة المتطابقات المثلثية

قدرات

ل ٧ ض

إذا علمت أن الشكل مستطيل وكان أهـ = ب هـ = ٥،
وطول د ج = ٨ سم، فأوجد مساحة المستطيل.



أ- ٢٤
ب- ٤٥
ج- ١٢
د- ٢٠

الحل

فيما سبق:

درست كيفية استعمال
المتطابقات لإيجاد قيم
العبارات المثلثية وتبسيطها.
(الدرس1 – 3)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

لماذا

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$ ، حيث $0° < \theta < 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة : يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي

إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسِّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

① عامل مشترك
② ضرب بالمرافق
③ توحيد مقامات

مثال

إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

مثال

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$ ؟

A $\cot \theta$

B $\csc \theta$

C $\cot^2 \theta$

D $\csc^2 \theta$

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2 \theta \, (\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)$ ؟

A $\cot^2 \theta$

B $\tan^2 \theta$

C $\cos^2 \theta$

D $\sin^2 \theta$

تحويل طرفي المتطابقة : في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي

اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- **بسِّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.**
- **حلّل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.**
- **اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب ، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.**
- **لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.**

مثال

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta \cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

تدرب

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

تدرب

11) اختيار من متعدد: أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$ ؟

(مثال 2)

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

تدرب

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو 1− :

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

تدرب

بسّط كلًّا مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$