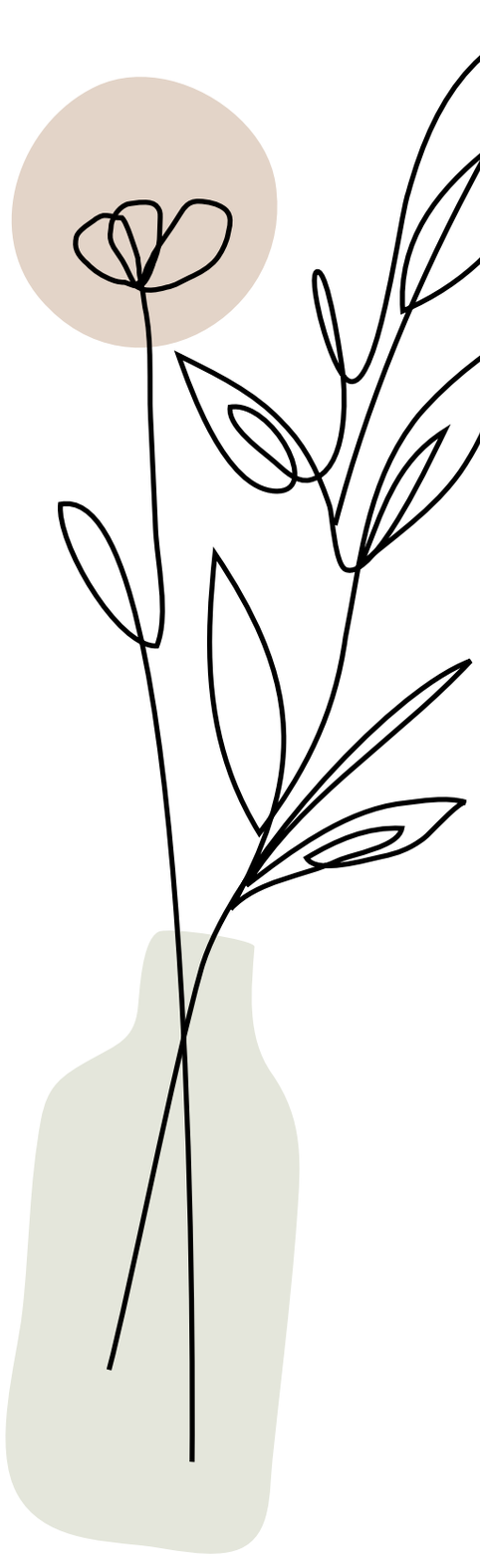


# المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

# قدرات

أوجد قيمة س + ص:

أ- ٤٠ ب- ٦٠

ج- ٨٠ د- ١٠٠

## فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس3– 3)

## والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

# لماذا

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة $v$ ، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها $\theta$ ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية $D$ ، وأقصى ارتفاع $H$ :

$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta, H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$ ، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة $H$ إلى $D$ تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في $\theta$.

**المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:** من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

**مفهوم أساسي** **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية**

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم $\theta$ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 30

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

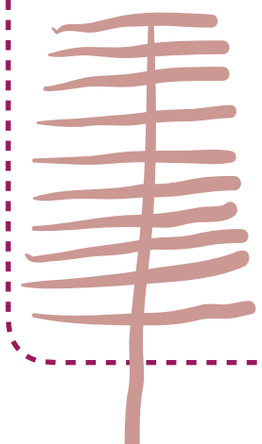
## المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

**مثال**

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

# تحقق من فهمك

**1)** أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.



## المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

**مثال**

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}; 0° < \theta < 90°$ :

(a $\cos 2\theta$

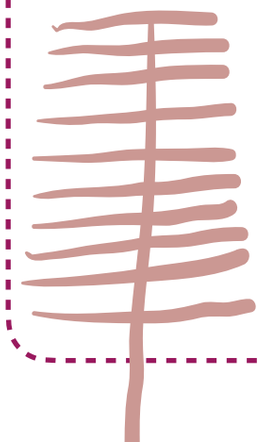
(b $\tan 2\theta$

# تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{1}{3}; 90° < \theta < 180°$

**2A)** $\cos 2\theta$

**2B)** $\tan 2\theta$



**المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية :** من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة ؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

**مفهوم أساسي** **المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية**

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم $\theta$ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta\neq -1$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 31

## المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

**مثال**

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ ، $\theta$ تقع في الربع الثالث.

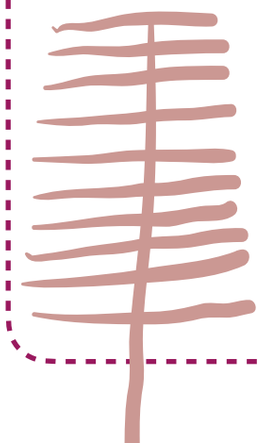
## المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

**مثال**

**b)** دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos 67.5°$ .

# تحقق من فهمك

**3)** أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، $\theta$ تقع في الربع الثاني.



## مثال

### التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

**نوافير:** ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

## تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17 \sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$، حيث $L$ تمثل زاوية دائرة العرض

**4A)** بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

**4B)** استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة **g** عندما $L = 45°$.

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

## إثبات صحة المتطابقات

**مثال**

أثبت صحة المتطابقة $\dfrac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \dfrac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$ .

## تحقق من فهمك

**5)** $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

# تدرب

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 1-3)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

# تدرب

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

**8)** $\sin \frac{\pi}{8}$

# تدرب

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

**14)** $\tan\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

# تدرب

**27) اكتشف الخطأ :** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لِـ : $\sin 15°$ . هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

**سعيد**

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(45-30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

**سلمان**

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$$

$$= 0.5$$

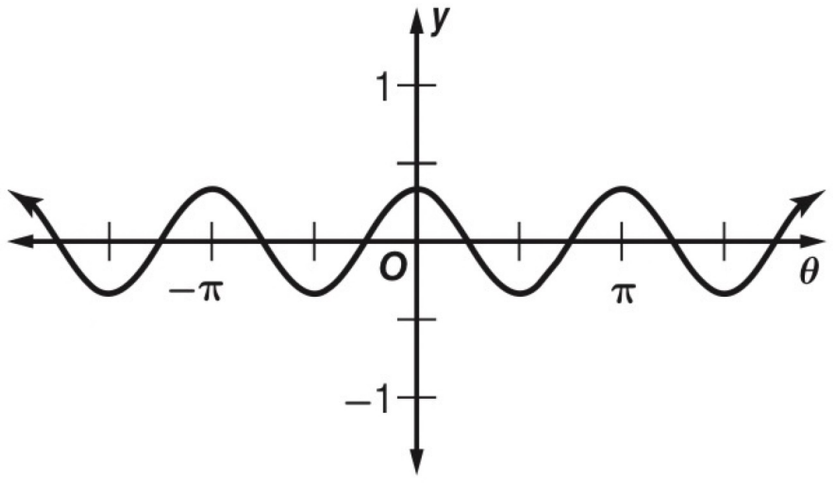
# تدرب

**43)** أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan\frac{\theta}{2}$ إذا كان $0<\theta<90°; \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**A** $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**B** $\sqrt{3}-2$ **D** $\sqrt{3}$

**44)** معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي :




**A** $y=3\cos 2\theta$ **C** $y=3\cos\frac{1}{2}\theta$

**B** $y=\frac{1}{3}\cos 2\theta$ **D** $y=\frac{1}{3}\cos\frac{1}{2}\theta$

# تحصيلي

المتطابقة $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ تكافئ المتطابقة ..

Ⓐ $\cos 4\theta$

Ⓑ $\sin 4\theta$

Ⓒ $\cos 2\theta$

Ⓓ $\sin 4\theta$

# تحصيلي

ذا علمتَ أن $0° \leq \theta \leq 90°$ و $\tan\theta = 0$ فإن القيمة الدقيقة لِـ $\tan 2\theta$ ساوي ..

Ⓐ 0

Ⓑ 1

Ⓒ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⓓ 2