المتجهات في المستوى الإحداثي

فيما سبق:

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم . (الدرس 1 — 1)

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

المفردات:

الصورة الإحداثية
component form

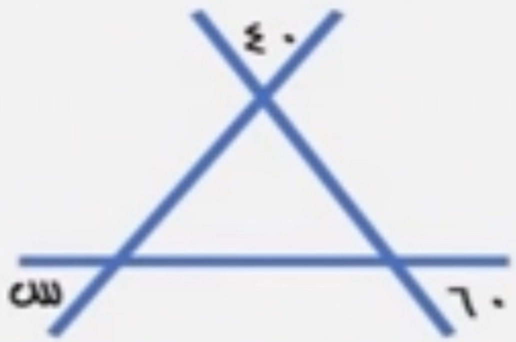
متجه الوحدة
unit vector

متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors

توافق خطي
linear combination

قدرات

أوجد قيمة س



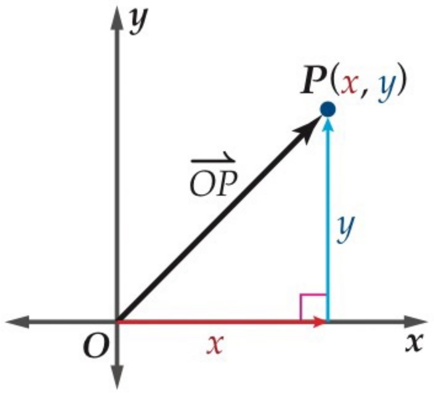
أ	٤٥	ب	٤٠	ج	٨٠	د	٣٥

لماذا

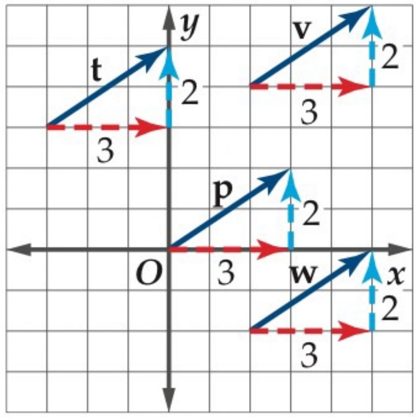
تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات فى المستوى الإحداثى.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-1 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 1.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y\rangle$ ، حيث إن x , y هما المركبتان المتعامدتان لـِ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 1.2.1



الشكل 1.2.2

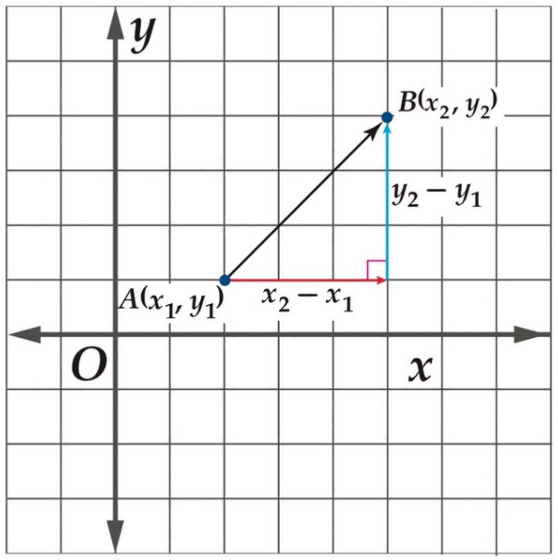
وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات **p, t, v, w** في الشكل 1.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2\rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسومٍ في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيي نقطتَي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي

الصورة الإحداثية لمتجه

الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

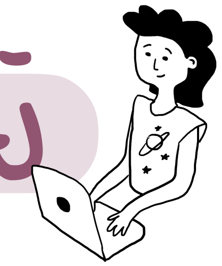


التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

مثال

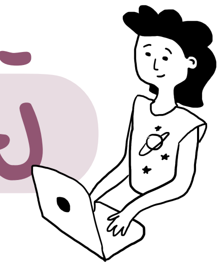
أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

تحقق من فهمك



أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$



تحقق من فهمك

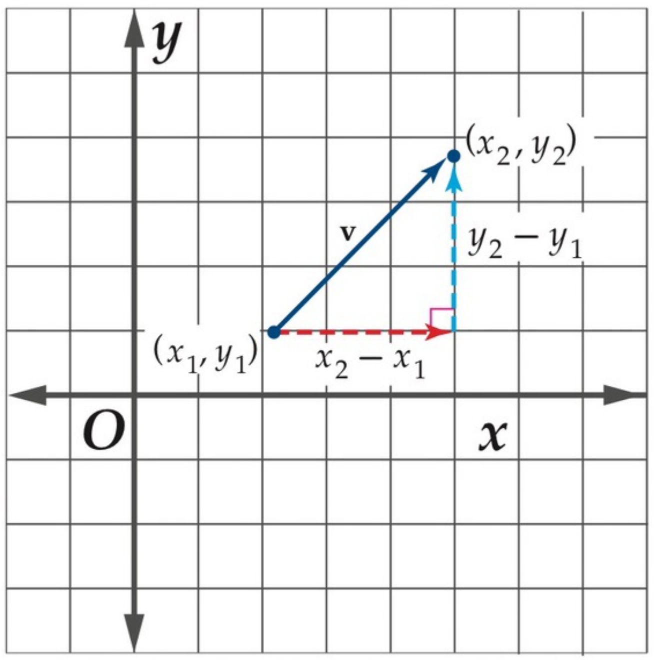
أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

مفهوم أساسي

طول المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان v متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول v يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه v فإن :

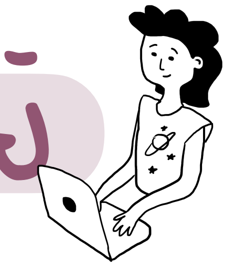
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال

إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

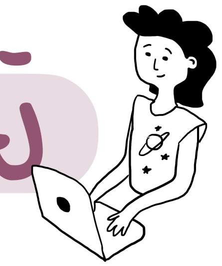
تحقق من فهمك



أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته فى كلٍّ ممَّا يأتى:

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

تحقق من فهمك



أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته فى كلٍّ ممَّا يأتي:

2B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي **العمليات على المتجهات**

إذا كان $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

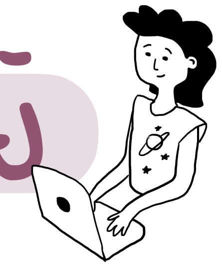
مثال

العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$



تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

3A) $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$

3B) $-3\mathbf{c}$

3C) $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

متجهات الوحدة : يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

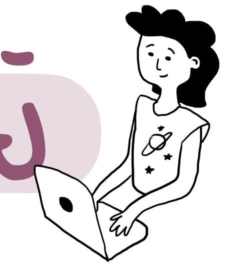
وبذلك يكون $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\ \mathbf{u}$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عددٍ حقيقيٍّ.

إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطًى

مثال

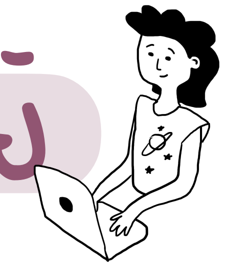
أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

تحقق من فهمك



أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

4A) $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

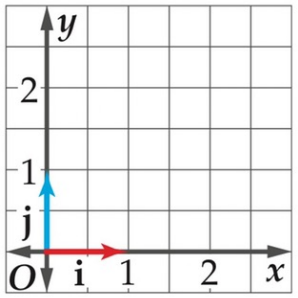


تحقق من فهمك

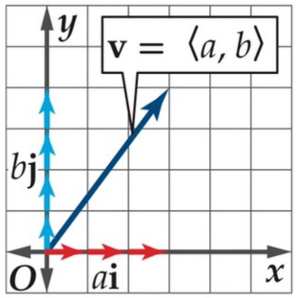
أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

4B) $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.3



الشكل 1.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4 ؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$	أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين
$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$	$\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$, $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$

تنبيه!

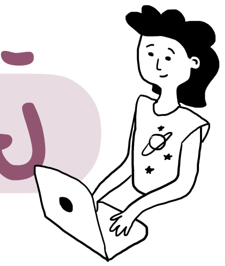
متجه الوحدة i

لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ ، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍّ داكن غير مائل $\mathbf{i}$ ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍّ غير داكن مائل i .

كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

مثال

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

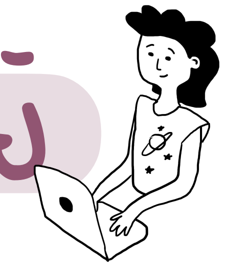


تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$

تحقق من فهمك

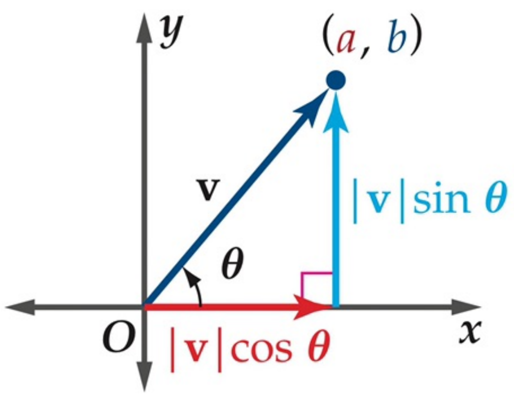


اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

5B) $D(-3, -8), E(7, 1)$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل **1.2.5** يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$	عوِّض
$= \lvert\mathbf{v}\rvert (\cos\theta)\mathbf{i} + \lvert\mathbf{v}\rvert (\sin\theta)\mathbf{j}$	توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$



الشكل 1.2.5

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة

تستنتج من الصورة

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$

أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة

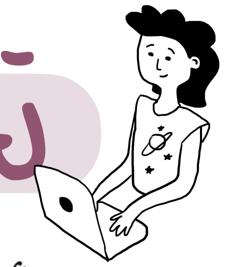
$$\mathbf{u} = \langle 1 \cos\theta, 1 \sin\theta \rangle$$
$$= \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$$

إيجاد الصورة الإحداثية

مثال

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

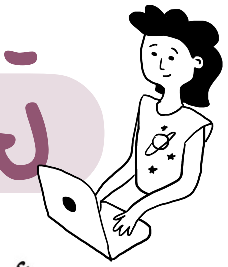
تحقق من فهمك



أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممّا يأتي :

6A) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45^\circ$

تحقق من فهمك



أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

6B) $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210^\circ$

من الشكل (1.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x)
بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan \theta = \dfrac{|\mathbf{v}| \sin \theta}{|\mathbf{v}| \cos \theta}$، أو $\tan \theta = \dfrac{b}{a}$.

تنبيه!

لكل قيمة لِـ $\tan \theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:

$\tan \theta = \tan(\theta + 180)$

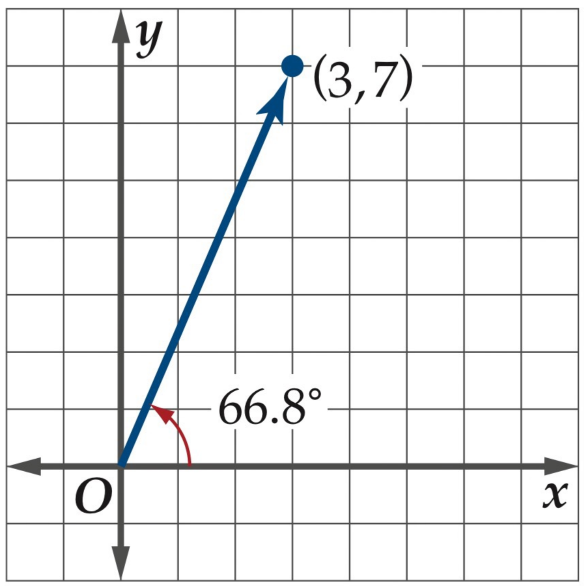
فإذا كانت قيمة $\tan \theta$ موجبةً فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan \theta$ سالبةً، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

زوايا الاتجاه للمتجهات

مثال

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x .

$\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ (a



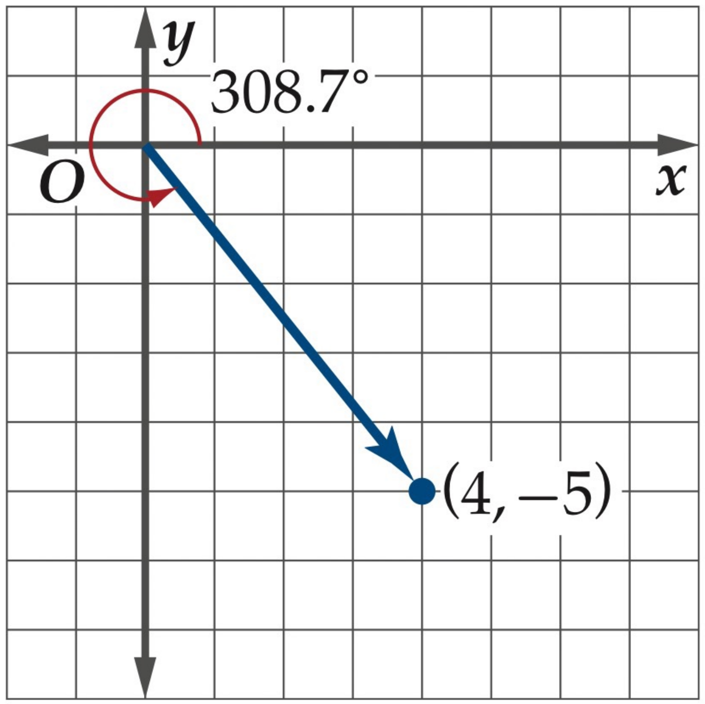
الشكل 1.2.6

زوايا الاتجاه للمتجهات

مثال

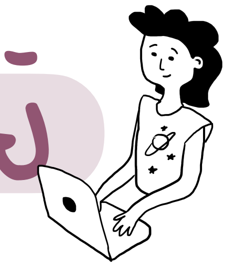
أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x .

$\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$ (b



الشكل 1.2.7

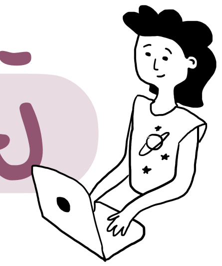
تحقق من فهمك



أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

تحقق من فهمك

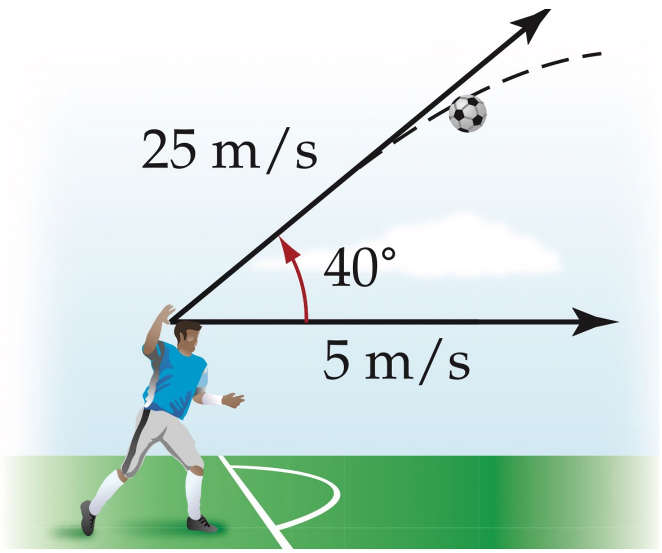


أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7B) $\langle -3, -8 \rangle$

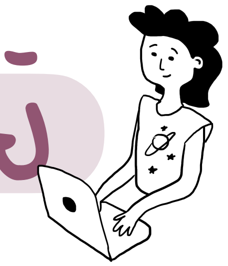
تطبيق العمليات على المتجهات

مثال



كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة **5 m/s** ، ليرمي الكرة بسرعة **25 m/s** ، بزاوية **°40** مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

تحقق من فهمك



8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7\,m/s$

تدرب

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ
ممَّا يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

تدرب

إذا كان: $\mathbf{h} = \langle -6, 2\rangle$, $\mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle$, $\mathbf{f} = \langle 8, 0\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

10) $f - 2g - 2h$

تدرب

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي:

(13 $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$

تدرب

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5)

19) $D(4, -1), E(5, -7)$

تدرب

الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممّا يأتي:

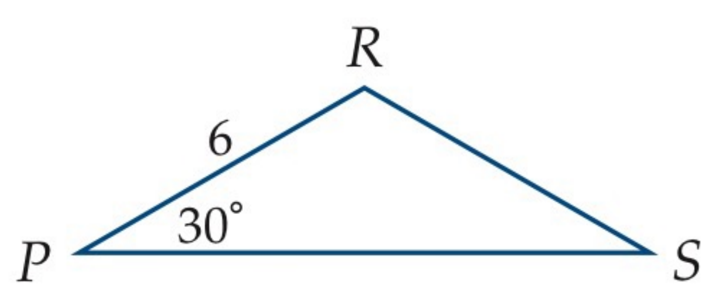
25) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

تدرب

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$ ؟

A $\sqrt{2}$ **C** $\sqrt{82}$

B $\sqrt{26}$ **D** $\sqrt{106}$



56) ما مساحة المثلث المجاور،
إذا علمت أن $PR = RS$ ؟

A $9\sqrt{2}$ **B** $9\sqrt{3}$ **C** $18\sqrt{2}$ **D** $18\sqrt{3}$

أي المتجهات التالية طوله 6 وحدات؟

Ⓐ $\langle 2,4 \rangle$

Ⓑ $\langle \sqrt{5}, 1 \rangle$

Ⓒ $\langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle$

Ⓓ $\langle 2, \sqrt{3} \rangle$