الضرب الداخلي

فيما سبق:

درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًّا وجبريًّا. (الدرس 2 – 1)

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات:

الضرب الداخلي
dot product

المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors

الشغل
work

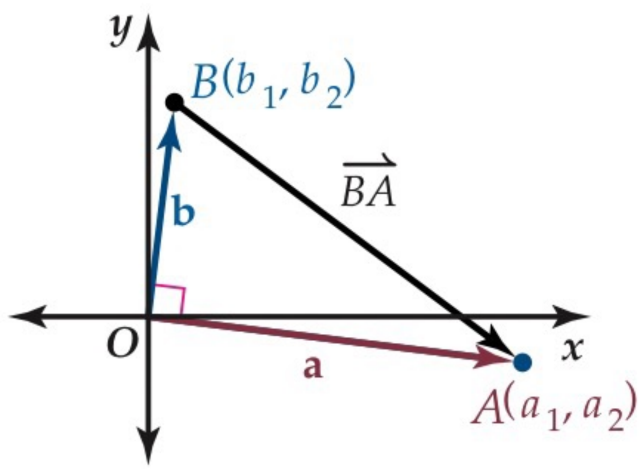
عددين مجموعهما ٤٠ وأحدهما ثلثي الآخر فما الفرق بينهما ؟

أ/ ٨ ب/ ١٠ ج/١٢ د/ ١٦

لماذا

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-1 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان **a , b** في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.



وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$ تعريف طول متجه

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$ ربّع الطرفين

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$$ فُك الأقواس

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ جمّع الحدود المربعة

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,,\ |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2\,,$ $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\,,\ |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.
ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين **a , b** ، ويُرمز له بالرمز **a • b** ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a , b ، أو يُقرأ اختصارًا **a dot b** .

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي — المتجهان المتعامدان

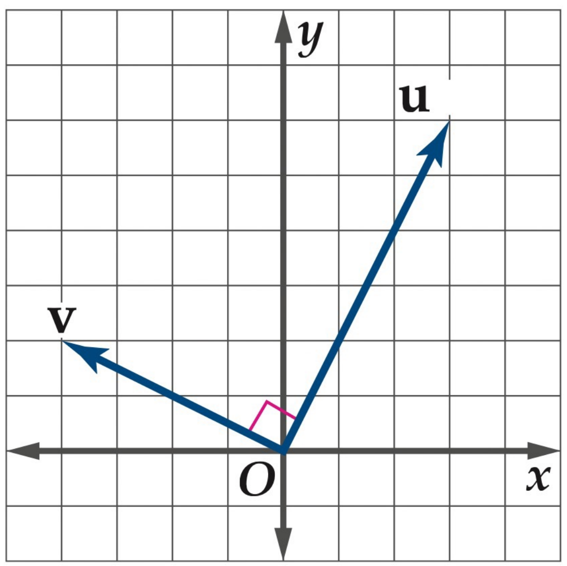
يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن :
$\langle 0, 0\rangle \cdot \langle a_1, a_2\rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$



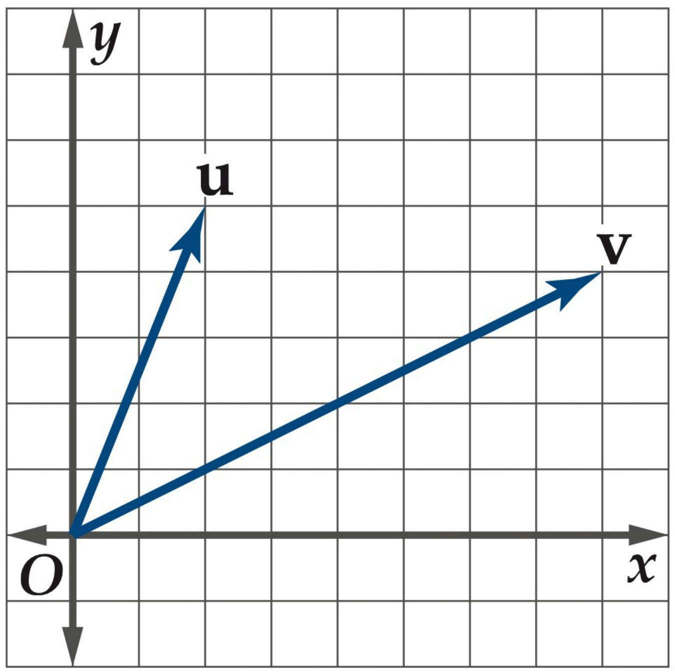
الشكل 5.3.1

مثال

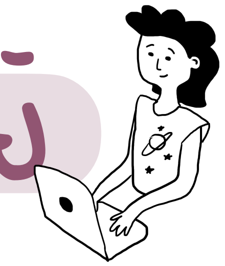
استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

$\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4 \rangle$ (b



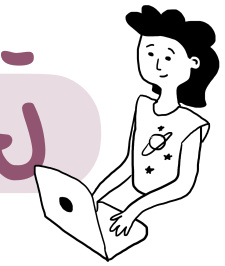
الشكل 5.3.2



تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$



تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1B) $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

نظريَّة

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

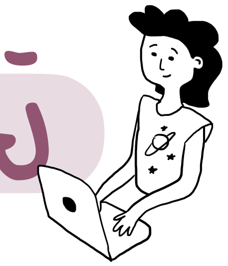
$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$= |\mathbf{u}|^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

مثال

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$.

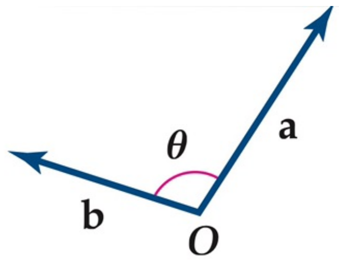


تحقق من فهمك

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$

2B) $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

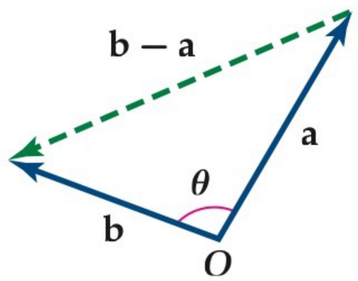
الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث إن: $0 \leq \theta \leq \pi$ ، أو $0° \leq \theta \leq 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.



مفهوم أساسي — الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$



البرهان

إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

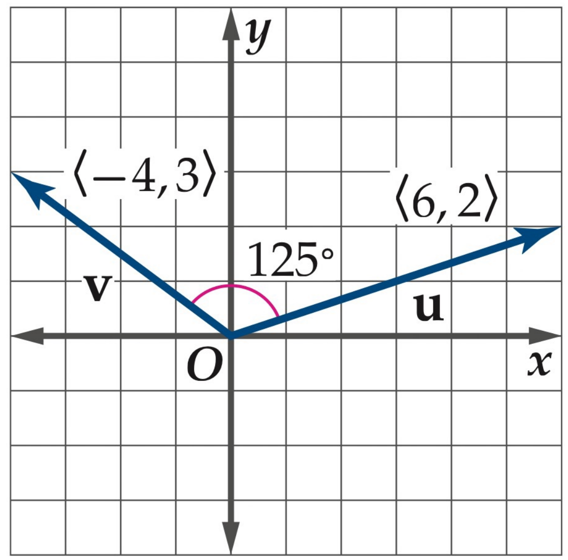
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2$	قانون جيوب التمام
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$	$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b}|^2 - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2$	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
$-2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = -2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	بطرح $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ من الطرفين
$\cos \theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$	بقسمة الطرفين على $-2|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

$\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$ (a



إرشادات للدراسة

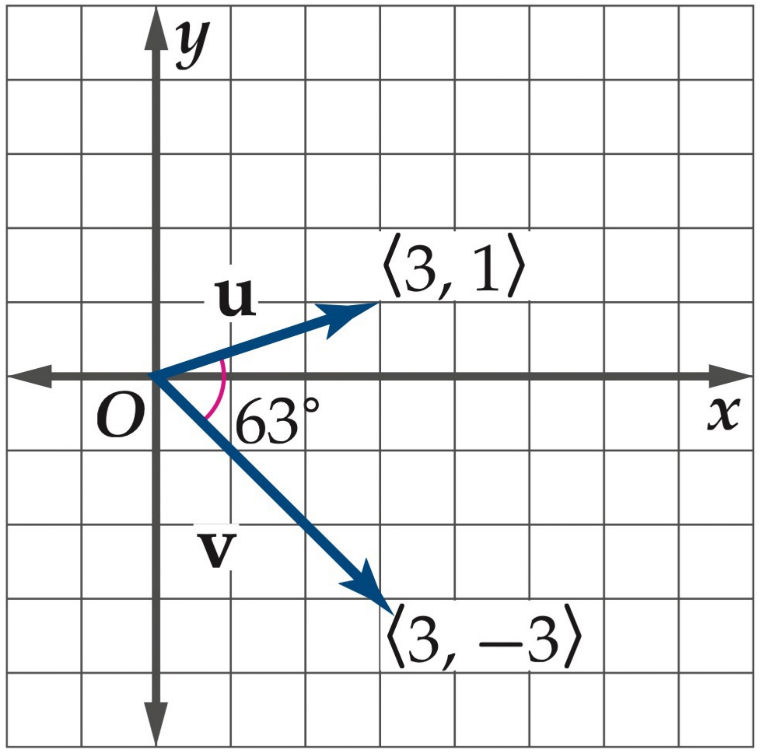
المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية

يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما 90°. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما 0° أو 180° .

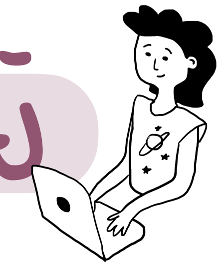
مثال

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:



b) $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

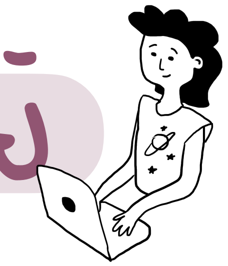


تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

3A) $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

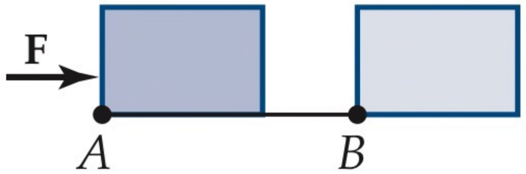
تحقق من فهمك



أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

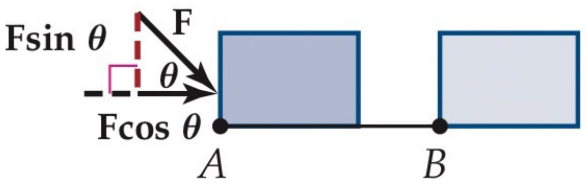
3B) $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle , \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت **F** قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت **F** موازيةً لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن **F** يساوي مقدار القوة **F** مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة **F** ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

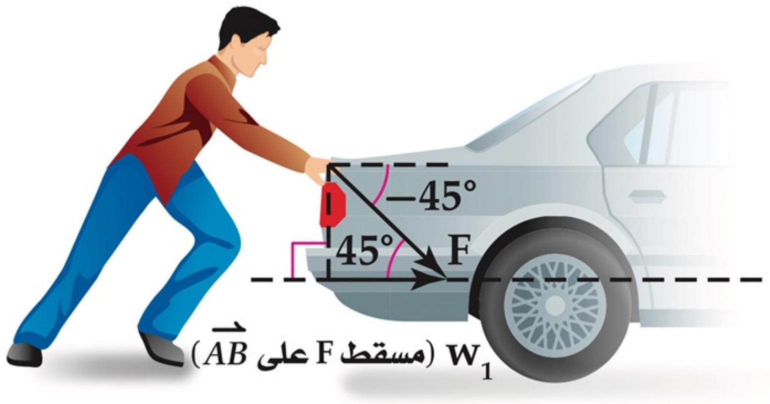
$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$



أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة **F** ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

مثال

سيارة : يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



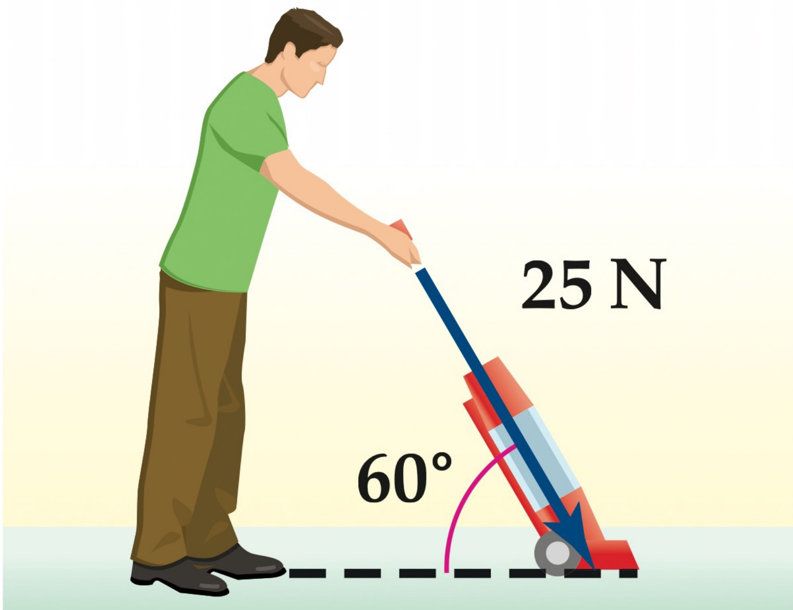
إرشادات للدراسة

وحدات الشغل

وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل ، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

تحقق من فهمك

4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض °60 ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



تدرب

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

(1 $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$

تدرب

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى.

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$

تدرب

أوجد متجهًا يعامد المتجه

17) $\langle -2, -8 \rangle$

تدرب

15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيَّمَهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6 \rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. **(مثال 3)**

تدرب

16) فيزياء: يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوةٍ مقدارها 534 N؛ بزاوية °25، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيحٍ. (مثال 4)

تدرب

45) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1\rangle$, $\langle -9, 0\rangle$ ؟

A 0°

B 45°

C 90°

D 135°

46) إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -6, 2\rangle$, $\mathbf{s} = \langle 4, -3\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل r، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟

A $\langle 14, 8\rangle$

B $\langle 14, 6\rangle$

C $\langle -14, 8\rangle$

D $\langle -14, -8\rangle$

ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 3,3\rangle, \langle 2,0\rangle$ ؟

Ⓐ 30°

Ⓑ 45°

Ⓒ 120°

Ⓓ 135°