المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

فيما سبق:

درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًّا وجبريًّا. الدرس (1—1)

والآن:

- أعيِّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبِّرُ عن المتجهات جبريًّا، وأُجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المفردات:

نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system

المحور z
z-axis

الثُمن
octant

الثلاثي المرتب
ordered triple

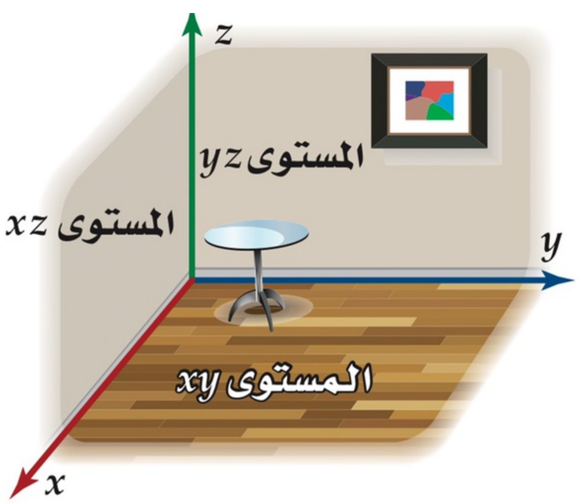
إذا كان مجموع ثلاث أعداد متساوية = $\frac{٦}{٩}$ فإن أحد هذه الأعداد يساوي

أ/ $\frac{٢}{٩}$ ب/ $\frac{٣}{٩}$ ج/ $\frac{٦}{٣}$ د/ $\frac{٩}{٦}$

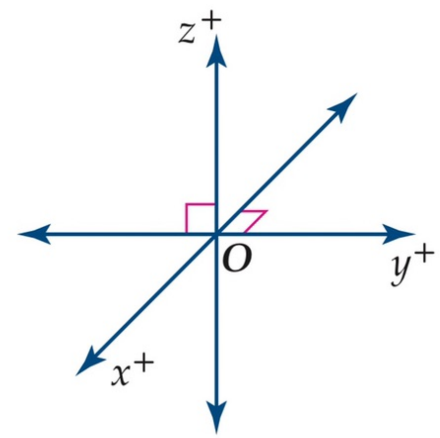
لماذا

لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوةً المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثى الأبعاد.

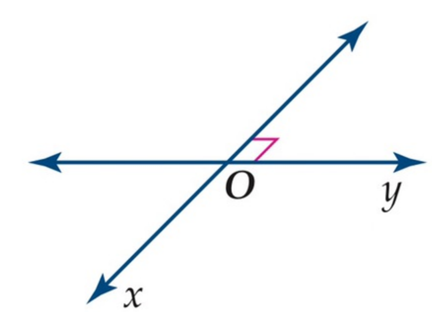
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y ، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy ، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل **1.4.1**، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y كما في الشكل **1.4.2**. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz ، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُّمُن** ، ويمكن تمثيل الثُّمُن الأول بجزء الحجرة في الشكل **1.4.3**.



الشكل 1.4.3



الشكل 1.4.2



الشكل 1.4.1

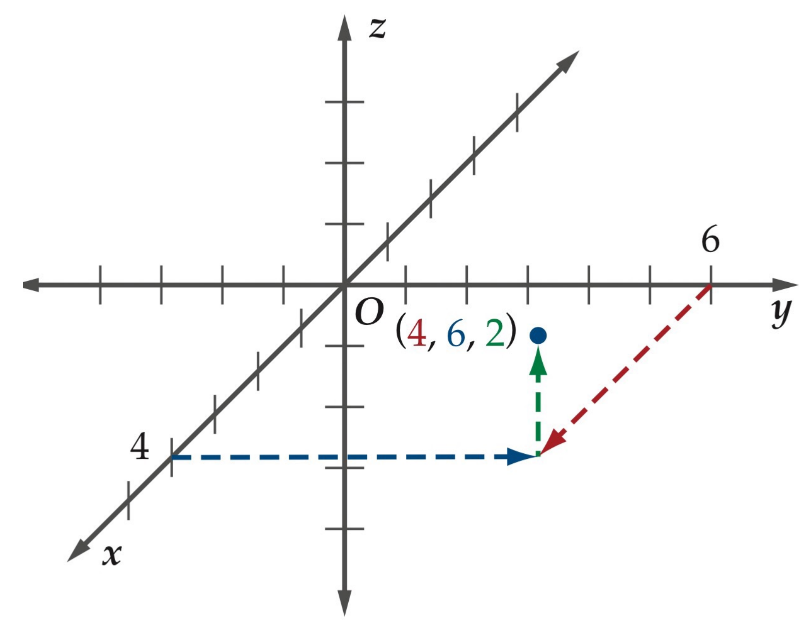
تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى $x\,y$ ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z .

مثال

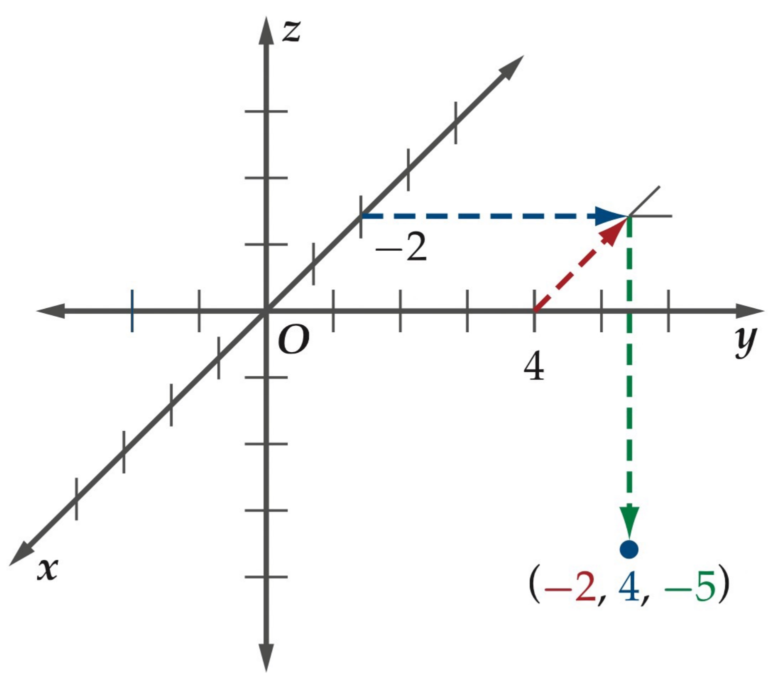
تعيّين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

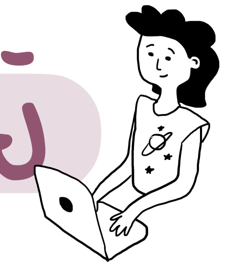
a) $(4, 6, 2)$



b) $(-2, 4, -5)$

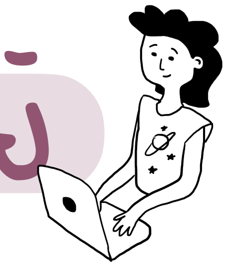


تحقق من فهمك



عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

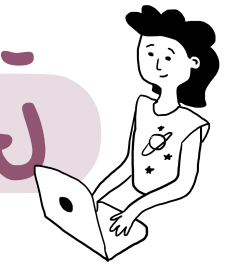
1A) $(-3, -4, 2)$



تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1B) $(3 , 2 , -3)$



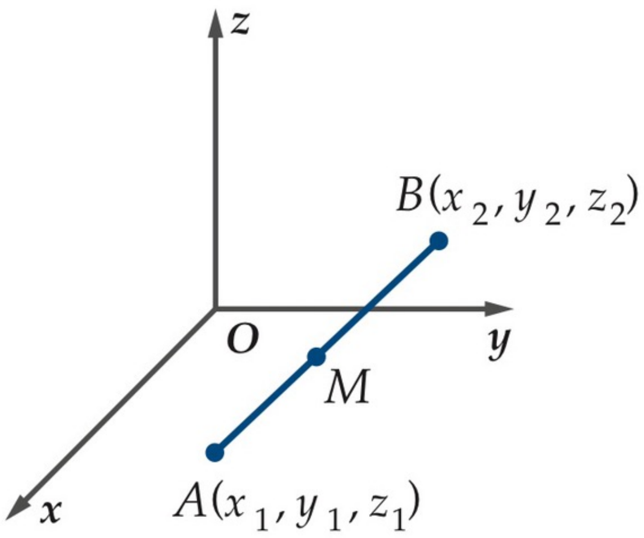
تحقق من فهمك

عيِّن كلّاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1C) $(5 , -4 , -1)$

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي **صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء**



تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

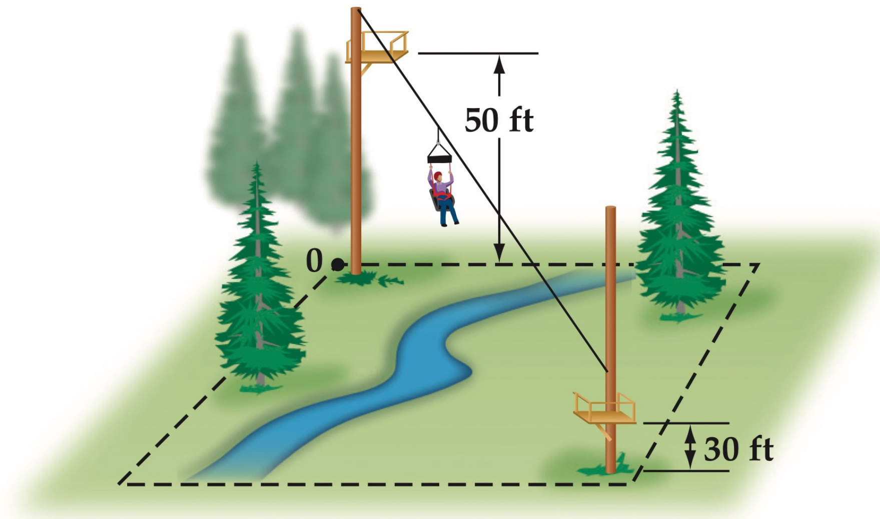
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لِـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

مثال

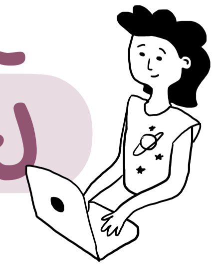
رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: (50 ,12 ,10) , (30 , 92 ,70)، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

تحقق من فهمك

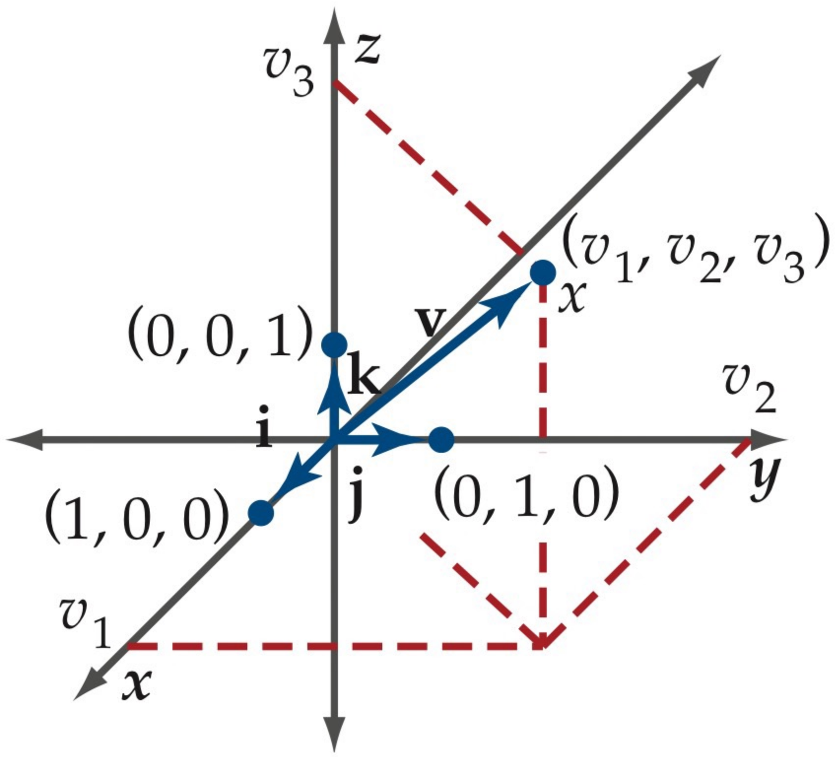


2) طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(450, -250, 28000)$, $(300, 150, 30000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B) إذا أطلقت ألعابٌ نارية، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في الشكل **1.4.4** ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



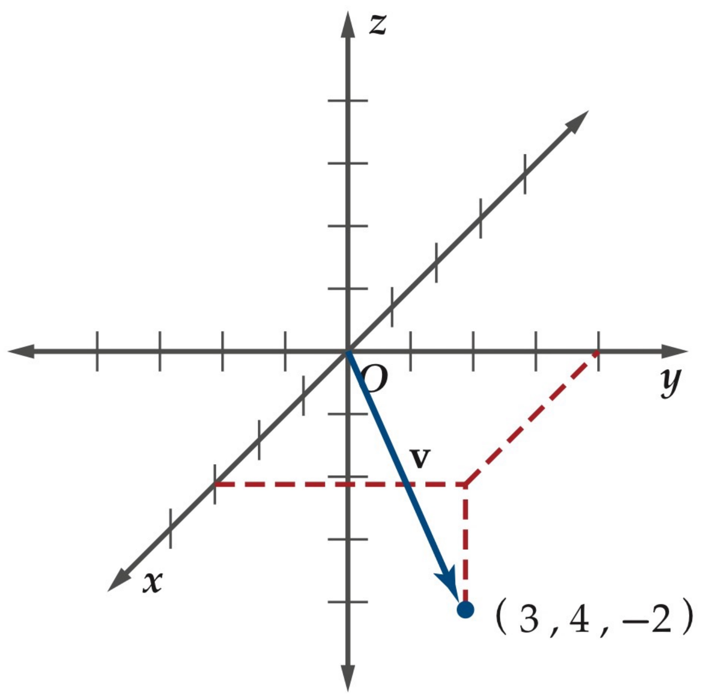
الشكل 1.4.4

مثال

تعيين متجه في الفضاء

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

$\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$ (a

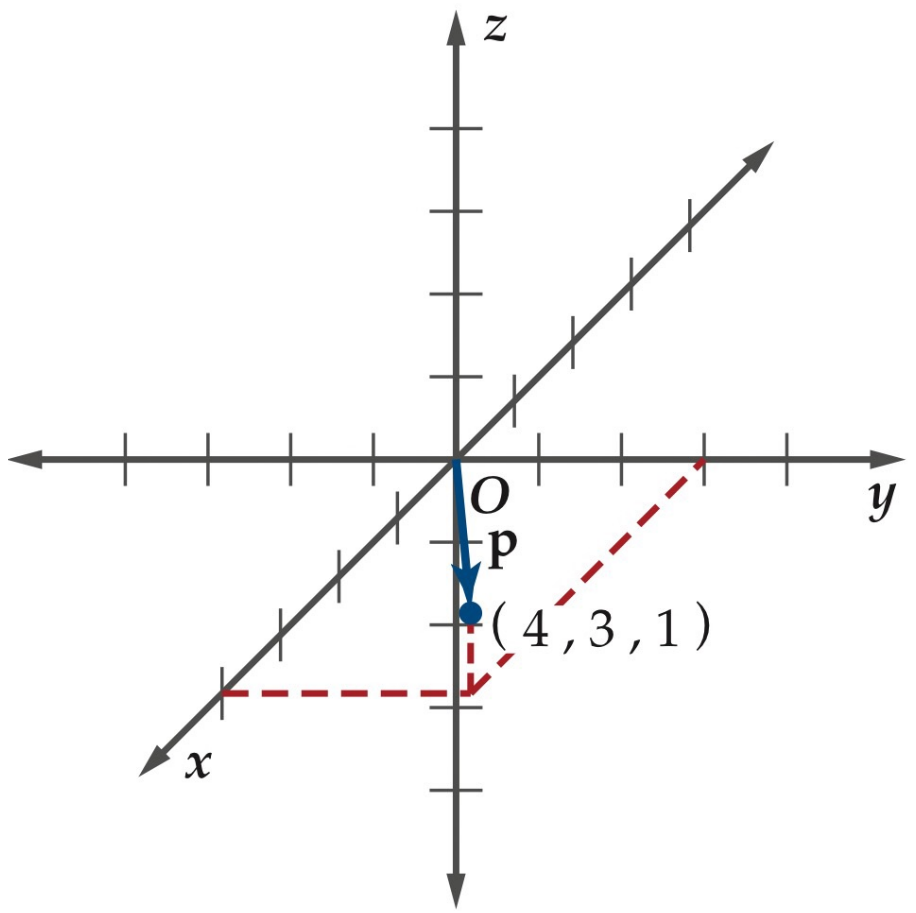


مثال

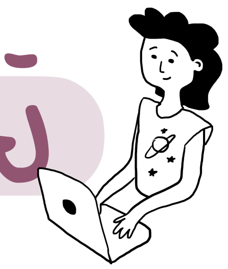
تعيين متجه في الفضاء

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (b



تحقق من فهمك



مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

تحقق من فهمك

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح ، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

مثال

العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$, $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$:

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

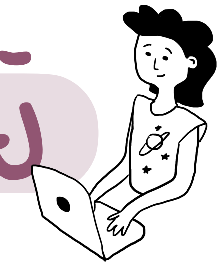
مثال

العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{z} = \langle -2 , 0 , 5 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle -1 , 4 , -4 \rangle$, $\mathbf{y} = \langle 3 , -6 , 2 \rangle$:

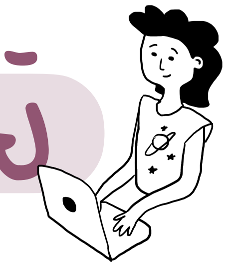
b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

تحقق من فهمك



أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3 , -6 , 2 \rangle , \mathbf{w} = \langle -1 , 4 , -4 \rangle , \mathbf{z} = \langle -2 , 0 , 5 \rangle$:

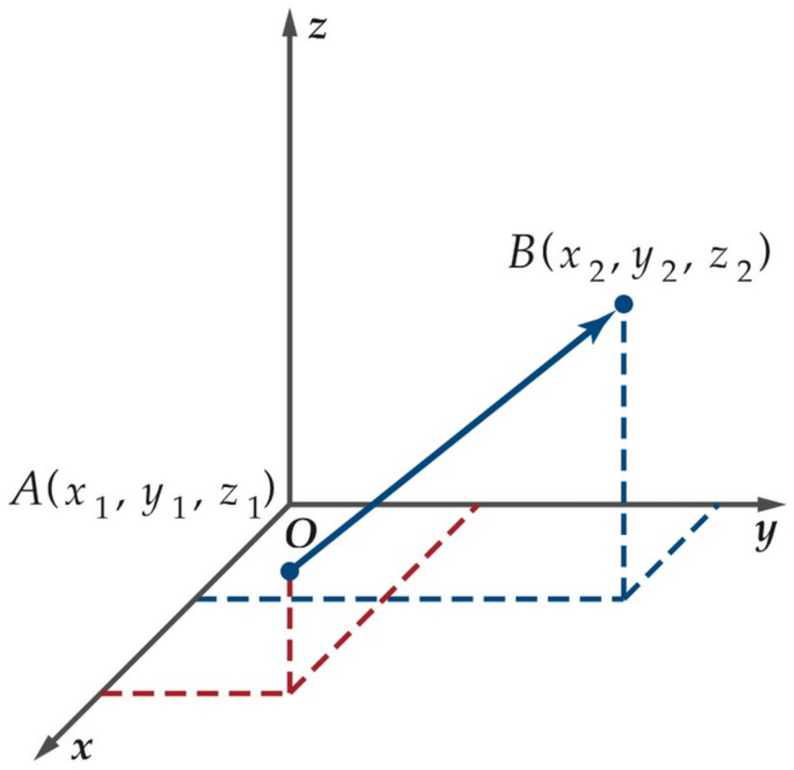
4A) $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$



تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3 , -6 , 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1 , 4 , -4 \rangle , \mathbf{z} = \langle -2 , 0 , 5 \rangle$:

4B) $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$



وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، فإن:

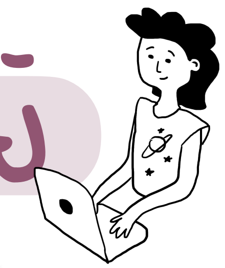
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

مثال

التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

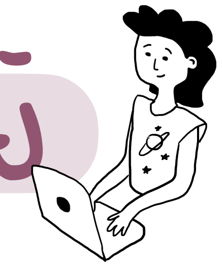
أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -2, -4)$ ، ونقطة نهايته $B(-6, 6, 3)$ ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.



تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5A) $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$



تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5B) $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

تدرب

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1) $(1, -2, -4)$

2) $(3, 2, 1)$

تدرب

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

تدرب

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3)

12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$

13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$

تدرب

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :

$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$.

20) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

21) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

تدرب

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

تدرب

61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, -3, 5)$ ؟

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

تحصيلي

طول المتجه $\mathbf{w} = \mathbf{5i} + \mathbf{3j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$ يساوي ..

Ⓐ $8 - \sqrt{2}$

Ⓑ 6

Ⓒ $8 + \sqrt{2}$

Ⓓ $4\sqrt{2}$