الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

فيما سبق:

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى .

الدرس (5–3)

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء .
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات ، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:

الضرب الاتجاهي

cross product

متوازي السطوح

parallelepiped

الضرب القياسي الثلاثي

triple scalar product

ما هو الرقم الذي يمكن وضع في الفراغ ليصبح

العدد يقبل القسمة على ٤

٦٦٦٦_٦

أ/ ١ ب/ ٢ ج/٤ د/ ٦

لماذا

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطَّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطَتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

مفهوم أساسي **الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء**

يُعَرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال

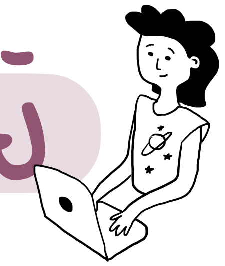
إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

تحقق من فهمك



أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

(1A $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

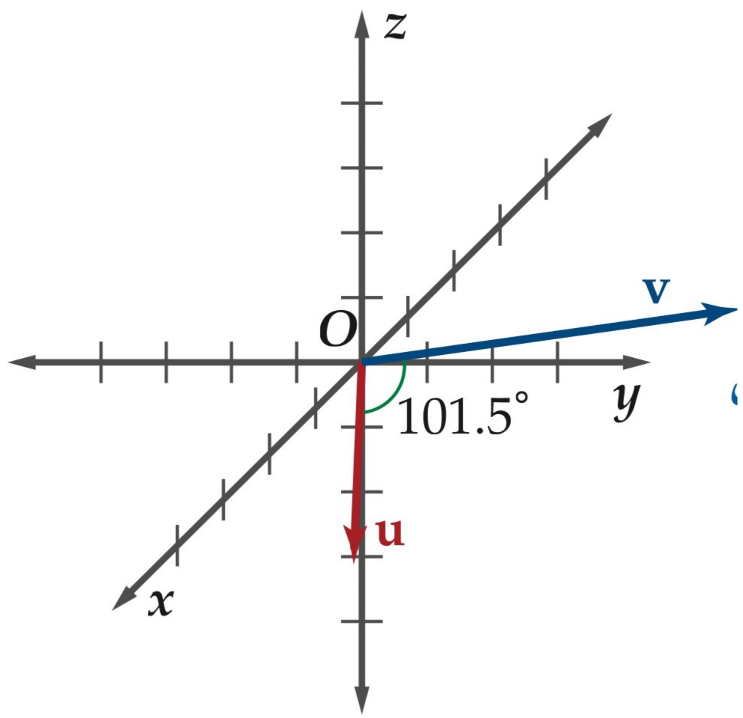
(1B $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

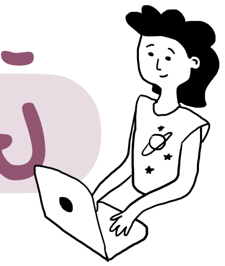
مثال

الزاوية بين متجهين في الفضاء

أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.



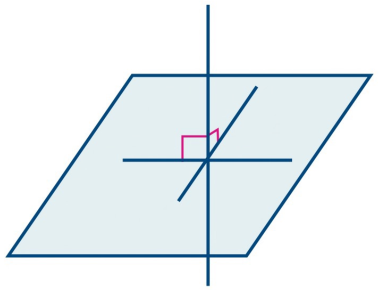
تحقق من فهمك

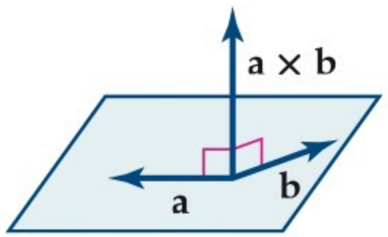


2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشريةٍ.

إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًا على مستوى، إذا كان عموديًا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.





الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ **a cross b**، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

مفهوم أساسي الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathrm{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathrm{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathrm{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\,\mathbf{i} - (a_1\, b_3 - a_3\, b_1)\,\mathbf{j} + (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\,\mathbf{k}$$

مثال

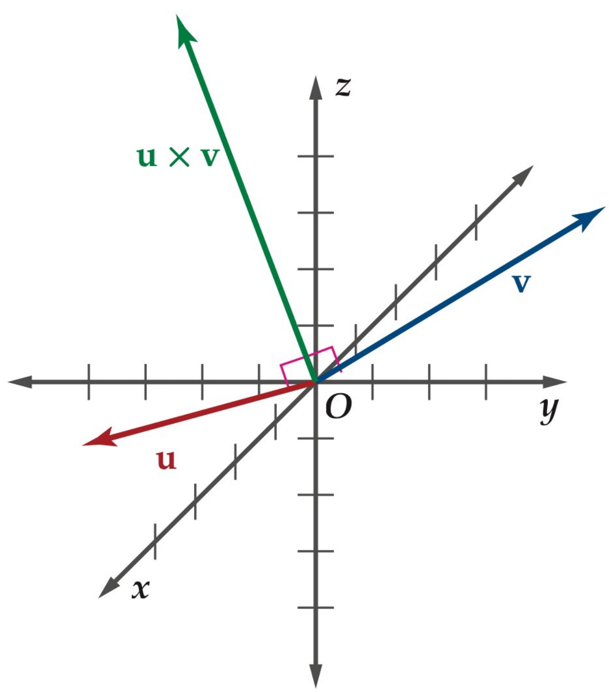
إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

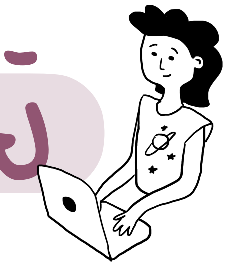
تنبيه!

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

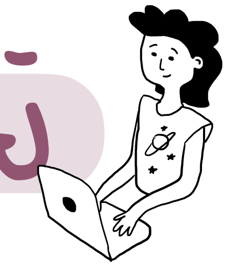


تحقق من فهمك



أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3A) $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

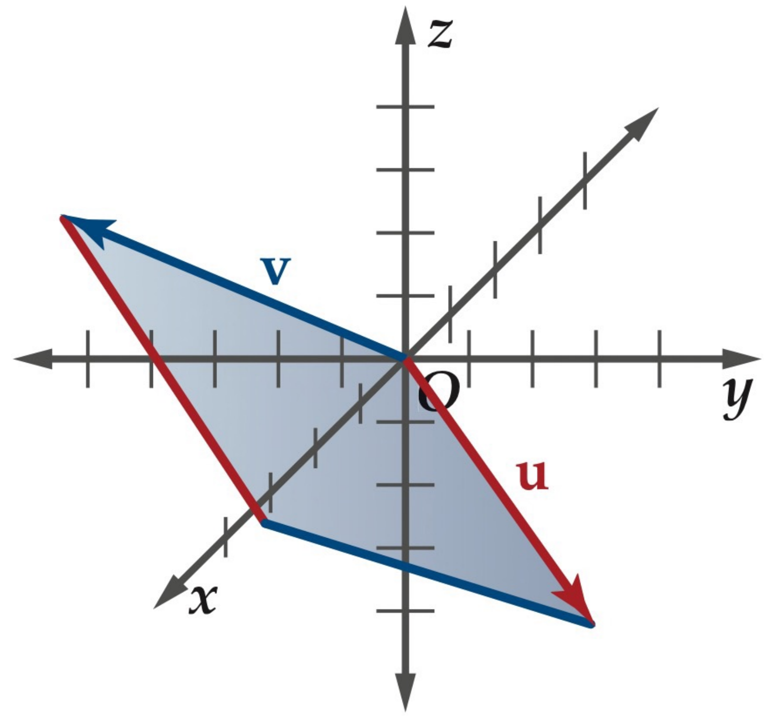


تحقق من فهمك

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلِّ مماياتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3B) $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل 5.5.1 .



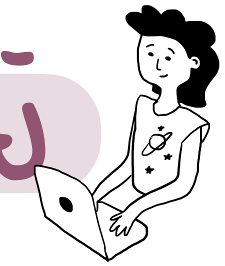
الشكل 5.5.1

مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

مثال

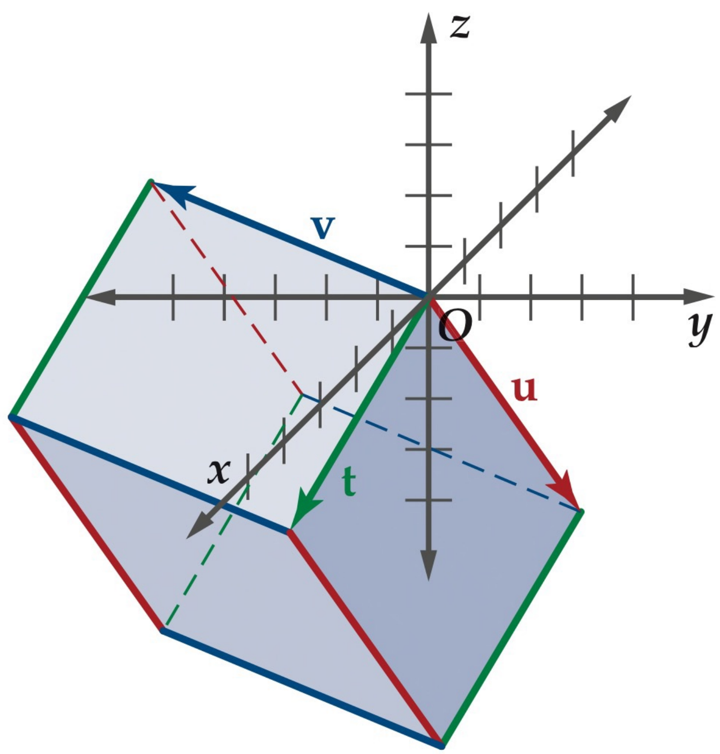
أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

تحقق من فهمك



4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 5.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة للضرب القياسيّ الثلاثي لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.



الشكل 5.5.2

مفهوم أساسي

الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي

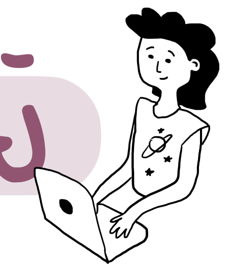
$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال

حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k},\ \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
أحرف متجاورة.

تحقق من فهمك



5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

تدرب

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7 \rangle$

تدرب

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5 \rangle$

تدرب

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$

(12 $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3 \rangle$

تدرب

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران

(16 $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 6, -5, 3 \rangle$

تدرب

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6 \rangle$

تدرب

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى

24) $\langle 3, -8, 4 \rangle$

تدرب

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟

A $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 1, 2, 3 \rangle$

B $\langle 1, -2, 3 \rangle$, $\langle 2, -4, 6 \rangle$

C $\langle 3, 4, 6 \rangle$, $\langle 6, 4, 3 \rangle$

D $\langle 3, -5, 4 \rangle$, $\langle 6, 2, -2 \rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$ ؟

A $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

تحصيلي

أي المتجهات التالية عمودي على المتجهين ..

$$\mathbf{v} = \mathbf{2i - k} \quad , \quad \mathbf{w} = \mathbf{4i + 3j - k}$$

A) $\langle -3,2,6 \rangle$

B) $\langle -3,6,-6 \rangle$

C) $\langle 3,-2,6 \rangle$

D) $\langle -3,-6,6 \rangle$