دوال التغير

قدرات

سبعة أعداد صحيحة متتالية موجبة متوسطها ٤ فما العدد الأول ؟

صفر ١ ٢ ٣

فيما سبق:

درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أحل مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك.
- أحل مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب.

المفردات:

التغيُّر الطردي
direct variation

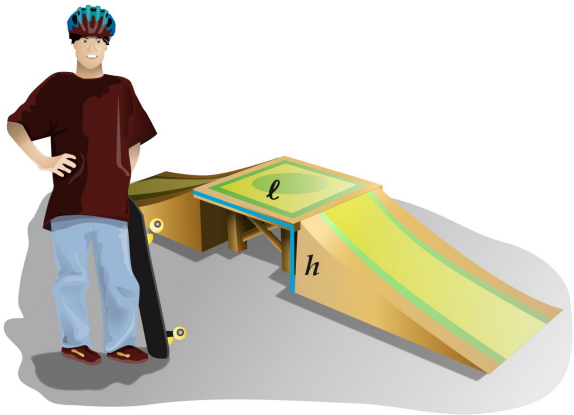
ثابت التغيُّر
constant of variation

التغيُّر المشترك
joint variation

التغيُّر العكسي
inverse variation

التغيُّر المركّب
combined variation

لماذا



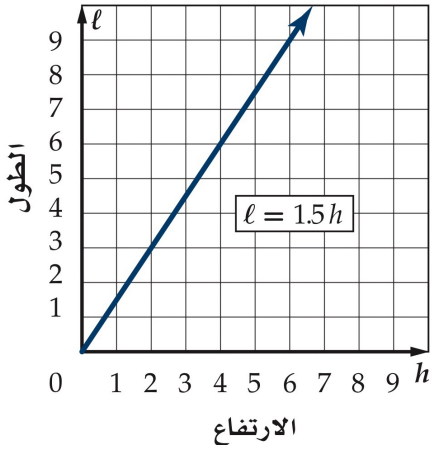
وجد عبدالله خلال بنائه منحدرًا للتزحلق، أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصّة ℓ مساويًا 1.5 مرة من ارتفاعها h .

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصّة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى نسبة الطول إلى الارتفاع ثابتة، وعندما تكون النسبة بين كميتين متغيرتين ثابتة، تسمى العلاقة بينهما (**تغيّرًا طرديًّا**) كما درست سابقًا، وبهذا فإن طول المنصة يتغيَّر طرديًّا مع ارتفاعها.

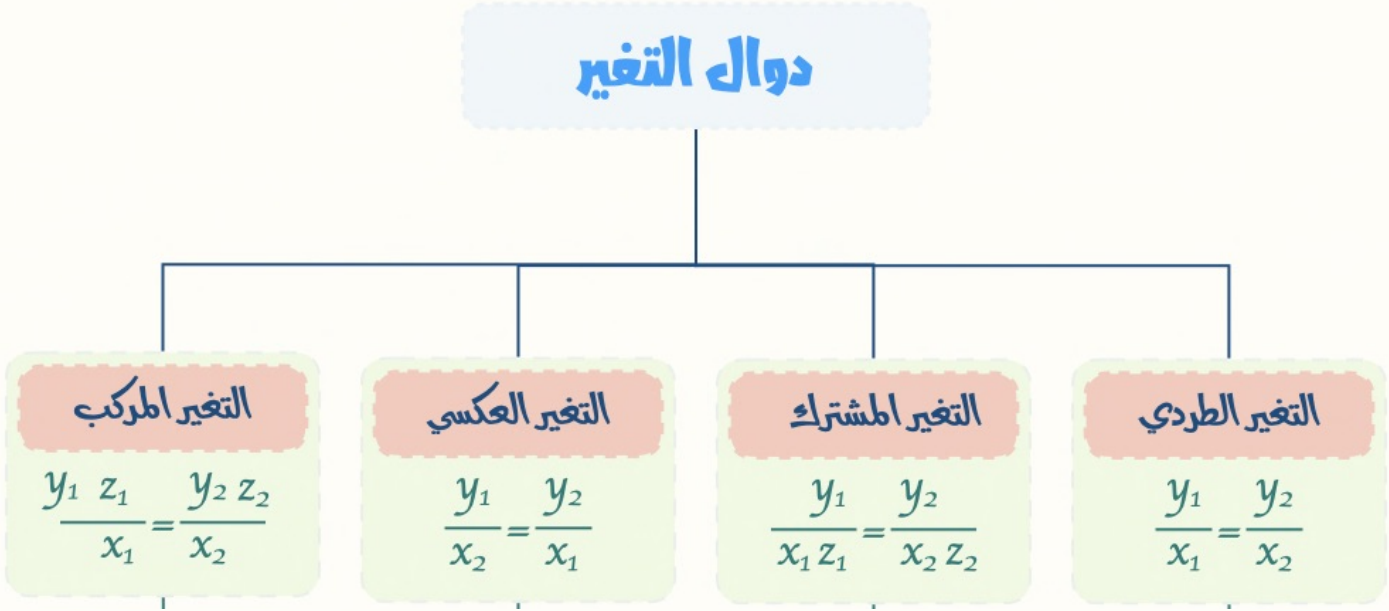
التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك إن المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $\ell = 1.5h$ وهي مثال على التغيُّر الطردي، حيث يعبّر عن التغيُّر الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k في هذه المعادلة **ثابت التغيُّر**.

الطول (ℓ)	الارتفاع (h)	النسبة $(\frac{\ell}{h})$
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5

لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $\ell = 1.5h$ هو مستقيم يمرُّ بنقطة الأصل، لذا فالتغيُّر الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$ ، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيُّر الطردي هو ثابت التغيُّر.



وللتعبير عن التغيُّر الطردي، فإننا نقول إن y تتغيَّر طرديًّا مع x. وبمعنى آخر كلما زادت x، فإن y تزداد بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير موجبًا، وينقص بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير سالبًا.


دوال التغير
التغير الطردي
$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$
التغير المشترك
$\frac{y_1}{x_1 z_1}=\frac{y_2}{x_2 z_2}$
التغير العكسي
$\frac{y_1}{x_2}=\frac{y_2}{x_1}$
التغير المركب
$\frac{y_1 \ z_1}{x_1}=\frac{y_2 \ z_2}{x_2}$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التغيُّر الطردي

التعبير اللفظي: تتغيّر y طرديًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$ ، ويسمى العدد k ثابت التغيُّر.

مثال: إذا كانت $y = 3x$ ، فإن y تتغير طرديًّا مع x . فكلما زادت x بمقدار 1، فإن y تزداد بمقدار 3، فعندما تكون قيمة $x = 1$ ، فإن $y = 3$، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1 \quad , \quad y_2 = kx_2$$

$$\frac{y_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (يسمّى هذا التناسب تناسبًا طرديًّا؛ أي أن y تتناسب طرديًّا مع x).

ويمكنك استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم y .

إرشادات للدراسة

ثابت التغيُّر

في التغير الطردي، المستقيم الذي له ثابت تغيُّر موجب ، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين ، بينما المستقيم الذي له ثابت تغيُّر سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

التغيُّر الطردي

مثال

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

تحقق من فهمك

1) إذا كانت r تتغيَّر طرديًّا مع t ، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المشترك

يصنّف بعض الرياضيين التغيُّر المشترك بوصفه حالة خاصة من التغيُّر المركّب الذي ستدرسه لاحقًا.

هناك نوع آخر من التغيُّر يُسمى **التغيُّر المشترك**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

مفهوم أساسي — **التغيُّر المشترك**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.

مثال: إذا كانت: $x = 6, z = -2, y = -60$ ، وكانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x وَ z، حيث

إن: $y = -60 = 5(6)(-2) = kxz \Rightarrow k = 5$ ، فإن قيمة y عندما $x = 4، z = -5$

تكون: $y = 5 \times 4 \times (-5) = -100$.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وعلمتَ بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1z_1 \quad , \quad y_2 = kx_2z_2$$

$$\frac{y_1}{x_1z_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2z_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع حاصل ضرب x ، z).

التغيُّر المشترك

مثال

إذا كانت y تتغيَّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $y = 20$ عندما $x = 5$ و $z = 3$،
فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$.

تحقق من فهمك

of Education
1443

2) إذا كانت r تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع v و t ، وكانت $r = 70$ عندما $v = 10$ و $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $v = 2$ ، و $t = 8$.

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب هناك نوع ثالث من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي** ، فإذا تغيَّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا هوَ k .

تتغير كميتان موجبتان أو سالبتان معًا عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى. وتتغير كميتان إحداهما موجبة والأخرى سالبة عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بزيادة الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

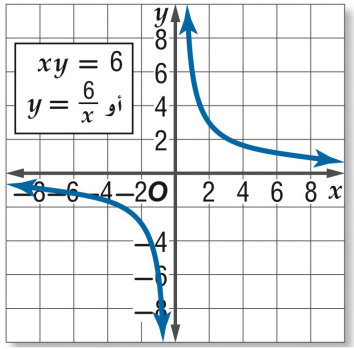
التغيُّر العكسي

التعبير اللفظي: تتغيَّر y عكسيًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

مثال: إذا كانت $xy = 12$ ، فإن y تتغير عكسيًّا مع x. فكلما زادت x نقصت y والعكس، فعندما $x = 2$ فإن $y = 6$، بينما عندما $x = 3$ فإن $y = 4$.

إذا كانت y تتغيَّر مع x كما في الجدول المجاور، فإنك تلاحظ أن قيم x تزداد بتناقص قيم y، وهما كميتان موجبتان؛ لذا فإن y تتغير تغيُّرًا عكسيًّا مع x بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$، ويكون التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.

x	6	3	2
y	1	2	3



وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر العكسي يشبه التمثيل البياني لدالّة المقلوب تمامًا.

يمكنك استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيّرًا عكسيًّا مُعطىً فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$$x_1 y_1 = k \text{ ، } x_2 y_2 = k$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

ومن ذلك نجد أنَّ $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًّا؛ أي أن y تتناسب عكسيًّا مع x).

التغيُّر العكسي

مثال

إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = 2$، فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

تحقق من فهمك

3) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 12$.

حقوق الطبع محفوظة

مثال

كتابة التغير العكسي وحله

موجات الصوت: يتغيَّر التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود f عكسيًّا مع طول السلك l. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية، فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in.

تحقق من فهمك

4) **فضاء:** يتغيَّر الطول الظاهري لجسم عكسيًّا مع بُعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بُعد الأرض عن الشمس 93 مليون ميل تقريبًا، وبُعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة بطول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟

هناك نوع رابع من التغيُّر هو **التغيُّر المركّب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وy تتغيَّر عكسيًّا مع z ، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \qquad , \qquad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمّى هذا التناسب تناسبًا مركّبا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

التغيُّر المركّب

مثال

إذا كانت f تتغيَّر طرديًّا مع g وعكسيًّا مع h ، وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$ ، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المركّب

في العلاقة $y = \frac{kx}{z}$ تظهر الكميات التي تتغيَّر طرديًّا مع y في البسط. أما التي تتغيَّر عكسيًّا فتظهر في المقام.

تحقق من فهمك

5) إذا كانت p تتغيَّر طرديًّا مع r وعكسيًّا مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ ، و $r = 2$ ؛ فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟

جارة التعـ

تأكد

1) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$.

تأكد

2) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$.

تأكد

3) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$.

تأكد

5) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$.

تدرب

حدِّد إذا كانت كل علاقة ممثلة فى الجداول أدناه تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو تغيّرًا عكسيًّا، أو غير ذلك:

15)

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

16)

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي والتغيُّر العكسي

يمكن تحديد نوع التغيُّر من خلال جدول قيم لـ x و y. فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر طردي. أما إذا كانت xy تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر عكسي.

تدرب

حدِّد إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو عكسيًّا، أو مشتركًا، أو مركّبا، ثم أوجد ثابت التغيُّر (التناسب) فى كلٍّ منها :

19 $a = 27b$

20 $c = \frac{7}{d}$

21 $-10 = gh$

تدرب

تدريب على اختبار

29) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b ، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b=15$ عندما $c=2$, $a=4$ فما قيمة b عندما $a=7$, $c=-8$ ؟

A $\frac{-1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$

B -105 **D** 105

30) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضَّحة بالجدول المجاور؟

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

A طردي **C** مشترك

B عكسي **D** مركّب

تحصيلي

إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ، حيث $y = 24$ عندما $x = 8$ فما قيمة x عندما $y = 48$ ؟

(A) 3

(B) 4

(C) 16

(D) 18