المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

قدرات

تقابل ٦ أشخاص في مكان ما ، إذا صافح كل شخص منهم الآخر مرة واحدة فقط ،
فكم عدد المصافحات التي تمت ؟

١٥ ١٨ ٢١ ٣٠

فيما سبق:

درست تمييز المتتابعة الحسابية. (الدرس 1-2)

والآن:

- أجد حدود متتابعة حسابية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا حسابية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.

المفردات:

الأوساط الحسابية
arithmetic means

المتسلسلة
series

المتسلسلة الحسابية
arithmetic series

المجموع الجزئي
partial sum

رمز المجموع
sigma notation

لماذا

في القرن الثامن عشر، طلب معلمٌ للرياضيات من طلابه في المرحلة الابتدائية أن يجدوا مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فقام أحد الطلاب واسمه كارل جاوس (Karl Gauss) بإعطاء الإجابة الصحيحة خلال ثوانٍ، مما أثار استغراب المعلم. وقد أصبح هذا الطالب "كارل جاوس" أحد أفضل علماء الرياضيات على مرِّ العصور.

لقد حلَّ جاوس هذا السؤال باستعمال المتسلسلات الحسابية.

المتتابعات الحسابية : لقد استعملت صيغة النقطة والميل في الدرس لإيجاد قيمة حدّ معيّن في متتابعة حسابية. ويمكنك إيجاد معادلة تستطيع من خلالها إيجاد أيّ حدّ من حدود متتابعة حسابية باستعمال الأسلوب نفسه.

ففي المتتابعة الحسابية a_n ، ... ، a_3 ، a_2 ، a_1 التي أساسها d يكون:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ صيغة الميل والنقطة

$(a_n - a_1) = d(n - 1)$ $(x, y) = (n, a_n), (x_1, y_1) = (1, a_1), m = d$

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ اجمع a_1 للطرفين

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حدّ من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحدّ الأول والأساس.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d ، حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

إيجاد حدّ معيَّن في متتابعة حسابية

مثال

أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: ... , 30 , 23 , 16 , 9

تحقق من فهمك

(1A a_n علمًا بأن: $a_1 = -4\ ,\ d = 6\ ,\ n = 9$

تحقق من فهمك

(1B a_{20} علمًا بأن: $a_1 = 15\ ,\ d = -8$

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغةٍ للحدّ النوني في هذه المتتابعة.

مثال

كتابة صيغة الحدّ النونيِ لمتتابعة حسابية

اكتب صيغة للحدّ النوني للمتتابعة الحسابية في كلّ ممَّا يأتي:

a) $5 , -13 , -31 , \ldots$

تنبيه!

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقَّق دائمًا من أن صيغة الحدّ النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغةٍ للحدّ النوني في هذه المتتابعة.

مثال

كتابة صيغة الحدّ النونيِ لمتتابعة حسابية

اكتب صيغة للحدّ النوني للمتتابعة الحسابية في كلَ ممَّا يأتي:

(b $a_5 = 19\ ,\ d = 6$

تحقق من فهمك

(2A $12, 3, -6, \ldots$

تحقق من فهمك

$a_6 = 12,\ d = 8$ **(2B**

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدَّان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمّى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدّين **أوساطًا حسابية**، ويمكنك استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بينهما.

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي

هو معدَّل عددين أو أكثر.

الوسط الحسابي بين العددين a, b يساوي $\frac{a + b}{2}$

الأوساط الحسابية

هي الحدود الواقعة بين أيِّ حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

إيجاد الأوساط الحسابية

مثال

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: 22 , ? , ? , ? , ? , ? , 8−

تحقق من فهمك

3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين 36 , 18−

بدیل

a_1 , d , n

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

عام

a_1 , a_n , n

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

المتسلسلات الحسابية : يمكنك الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة؛ لذا **فالمتسلسلة الحسابية** هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة **المجموع الجزئي**، ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي

المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1 , a_n , n	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
بالصيغة البديلة	a_1 , d , n	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لابد من إيجاد إحدى القيم n ، a_n ، a_1 قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحدّ النوني.

مثال

استعمال صيغ المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$

إرشادات للدراسة

صيغتا المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

سُمّيت الصيغة

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

بالصيغة العامة؛ لأنه تم التوصل إليها اعتمادًا على تعريف المتتابعة الحسابية، وباستعمال حدودها بشكل عام، بينما سُمّيت الصيغة

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

بالصيغة البديلة؛ لأنها تشتق من الصيغة العامة، ويمكن استعمالها بديلًا عن الصيغة العامة.

تحقق من فهمك

(4A $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

تحقق من فهمك

$n = 16, a_n = 240, d = 8$ **(4B**

يمكنك استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتتابعة الحسابية.

مثال

إيجاد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $a_1 = 7,\ a_n = 79,\ S_n = 430$

تحقق من فهمك

(5A $S_n = 120, n = 8, a_n = 36$

تحقق من فهمك

$a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280$ **(5B**

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال **رمز المجموع**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

رمز المجموع

الرموز:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

- $f(k)$: صيغة حدود المتسلسلة
- $k = 1$: أول قيمة لـ k
- n: آخر قيمة لـ k

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12} (4k + 2) = [4(1) + 2] + [4(2) + 2] + [4(3) + 2] + \ldots + [4(12) + 2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

مثال

أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$

A 846 **B** 910 **C** 975 **D** 1008

تحقق من فهمك

6) أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$

A 972 **B** 1053 **C** 1281 **D** 1701

تأكد

1) a_n علماً بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$

2) a_{18} في المتتابعة: $12, 25, 38, \ldots$

تأكد

5) 6, ?, ?, ?, 42

تأكد

7) أول 50 عددًا طبيعيًّا

تأكد

(11 $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$

تدرب

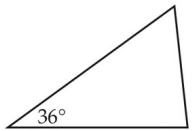
أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

52 $\sum_{k=3}^{x}(6k-5)=928$

تدرب

تدريب على اختبار

62) تُشكّل قياسات زوايا المثلّث أدناه متتابعة حسابية. إذا كان قياس الزاوية الصغرى °36، فما قياس الزاوية الكبرى؟



A 75°
B 84°
C 90°
D 97°

63) العبارة $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+1$ تكافئ:

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$
B $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$
C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$
D $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

تحصيلي

متتابعة حسابية فيها: $a_9 = 76$ ، $a_{10} = 83$ ؛ ما حدها الأول؟

(A) 27

(B) 20

(C) 13

(D) 7