البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي

قدرات

اذا كان $أ^{٢}+ب^{٢}=٤$، $أ+ب=٨$، فأن $أ\ ب$ =

أ) ١٨ ب) ٣٠

ج) ٣٢ د) ٢٠

فيما سبق:

درست إيجاد
مجموع متسلسلة
حسابية. (الدرس 2-2)

والآن:

- أبرهن الجمل الرياضية باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.
- أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضادٍّ.

المفردات:

مبدأ الاستقراء الرياضيّ
mathematical induction

فرضية الاستقراء
induction hypothesis

لماذا

إذا صُفَّت قطع الدومينو متقاربة كما في الصورة المجاورة، فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى.
وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

مبدأ الاستقراء الرياضيّ: **مبدأ الاستقراء الرياضيّ** هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

مفهوم أساسيٌّ

أضف الى مطويتك

مبدأ الاستقراء الرياضيّ

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n، اتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يُسمّى **فرضية الاستقراء** .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال

برهان المجموع

برهن أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

تحقق من فهمك

1) برهن أن : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

برهان قابلية القسمة

مثال برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة

يقال عن عدد ما: إنه يقبل القسمة على 4 إذا أمكن كتابة ذلك العدد في الصورة $4r$، حيث r عدد طبيعي، ويُستعمل هذا التعبير في برهان قابلية القسمة.

تحقق من فهمك

2) برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n.

الأمثلة المضادَّة يمكنك إثبات خطأ جملة رياضية من خلال مبدأ الاستقراء الرياضيّ، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضادٍّ تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

مراجعة المفردات

مثال مضادٌّ

أحد معاني كلمة مضادّ هو مناقض، لذلك فإن المثال المضادّ هو مثال يناقض الفرضية.

مثال

استعمال المثال المضادِّ لإثبات خطأ جملة رياضية

أعطِ مثالًا مضادًّا يبيِّن خطأ الجملة: " $2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 ، حيث n أي عدد طبيعي".

n	$2^n + 2n^2$	هل تقبل القسمة على العدد 4 ؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	لا

تحقق من فهمك

3) أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: "$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$، حيث n أيّ عدد طبيعي".

وزارة التربية
of Education

تأكد

برهن صحّة كلَ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

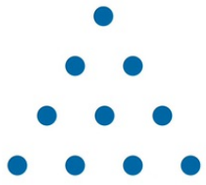
تأكد

برهن صحّة كلَ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

(2 $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

تأكد

3) نظرية الأعداد: يُسمّى العدد عددًا مثلَّثيًّا، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلَّث كما في الشكل أدناه.



a) إذا علمت أن العدد المثلَّثي الأول هو 1، فأوجد الأعداد المثلَّثية الخمسة التالية.

b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلَّثي الذي ترتيبه n .

c) برهن أنّ مجموع أول n من الأعداد المثلَّثية يساوي: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

تأكد برهن صحّة كلَ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

4) $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9

5) $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3

تأكد

أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

6) $3^n + 1$ يقبل القسمة على 4

7) $2^n + 3^n$ يقبل القسمة على 4

تدرب

تدريب على اختبار

29) أيُّ الأعداد الآتية يُعدّ مثالًا مضادًّا لإثبات خطأ الجملة:

$n^2 + n - 11$ عدد أولي؟

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

30) مبدأ العدِّ: يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكوّنة من 7 رموز، بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكوّنة من أحرف اسمه، والرموز الأربعة التالية مكوَّنة من أرقام العدد 1986 ، والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟

A 72

B 144

C 288

D 576