اثبات صحة المتطابقات المثلثية

ثالث ثانوي_رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.
(الدرس1 – 3)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

لماذا:

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ

تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$ ، حيث $0° < \theta < 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل أحد طرفي المتطابقة : يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي

إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسِّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال ١: اثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$

الطرف الأيسر	$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$
اضرب كلًا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$	$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$
$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$	$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$
$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$	$= \frac{\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$
اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$	$= 1+\cos\theta$ ✓
	الطرف الأيمن $=$

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

(1 $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال ؟: على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ **C** $\cot^2\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\csc^2\theta$

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلّك اختر قيمة لـ θ. وعوّض بها في البديل المختار، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوالّ دوالّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

اضرب

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

اقلب المقام واضربه بالبسط

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \cot\theta \cdot \cot\theta$$

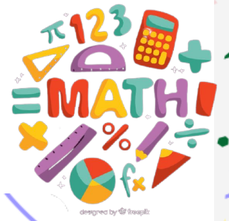
اضرب

$$= \cot^2\theta$$

الجواب هو C.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اثبات صحة المتطابقات المثلثية



تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta\,(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ **B** $\tan^2\theta$

C $\cos^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل طرفي المتطابقة : في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي **اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات**

- بسِّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّل أو اضرب كلًّا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب ، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال ٣: اثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta \cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

نبسِّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta \cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

اضرب

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta$$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

اطرح

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تنبيه!

تبسيط الطرفين

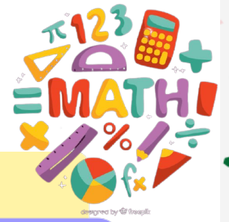
تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عمليةَ التحقّق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقّق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية



تدرب
وحل المسائل:

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta = 1$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

تدرب
وحل المسائل:

11) اختيار من متعدد: أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$ ؟

(مثال 2)

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

مسائل مهارات التفكير العليا

44) اكتشف المختلف: حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

49) تبرير: برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.