الفشل ليس إلا فرصة لتجربة طريقاً آخر

رياضيات ٥

المتطابقات المثلثية

لمجموع زاويتين والفرق بينهما

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

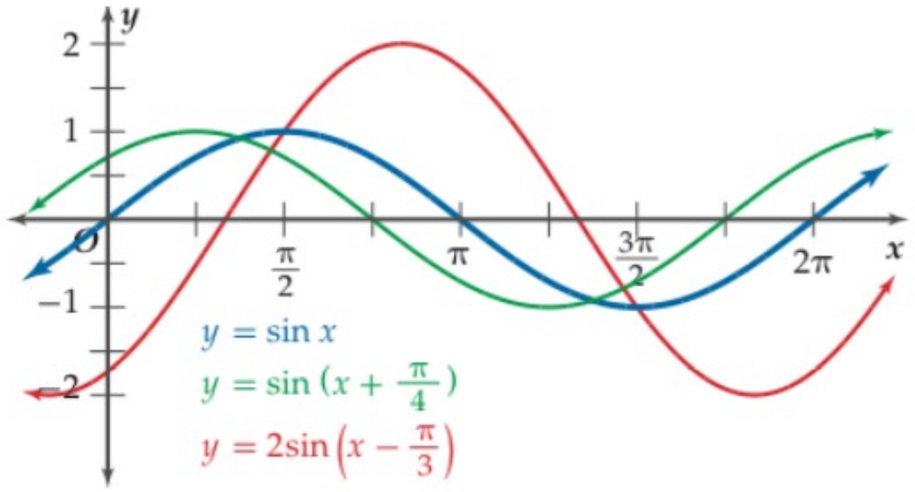
فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما



لماذا

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟

تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا.

ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.

متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمّن جمع الزاويتين x , $\frac{\pi}{4}$. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin (60° - 45°)$.

متطابقات الفرق

متطابقات المجموع

مفهوم أساسي

- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
- $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ١ إيجاد القيم المثلثية

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ وَ $60°$ يساوي $105°$، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin 105° = \sin (60° + 45°) \qquad 105° = 60° + 45°$$

متطابقة المجموع
$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$$

عوّض
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

بسّط
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة :

كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين $0°$, $360°$، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

مثال ١ إيجاد القيم المثلثية

b) $\cos(-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos(-120°) = \cos(60° - 180°) \qquad -120° = 60° - 180°$$

$$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° \qquad \text{متطابقة الفرق}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \qquad \text{عوّض}$$

$$= -\frac{1}{2} \qquad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

1A $\sin 15°$

1B $\cos(-15°)$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

استعمال متطابقات المجموع والفرق

مثال٢ من واقع الحياة:

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين من الزاويا الخاصة.

الصيغة الأصلية	$c = 3 \sin 165°t$
$120°t + 45°t = 165°t$	$= 3 \sin (120°t + 45°t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

المعادلة بحسب الفرع a	$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$
$t = 1$	$= 3 \sin (120° + 45°)$
متطابقة المجموع	$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$
عوّض مستعملًا الزاوية المرجعية $(\theta = 60°)$	$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
اضرب	$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
بسّط	$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٣ اثبات صحة المتطابقات المثلثية:

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

a) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

الطرف الأيسر	$\cos(90° - \theta)$
متطابقة الفرق	$= \cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta$
عوِّض	$= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$
بسِّط	$= \sin\theta$ ✓
	= الطرف الأيمن

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٣ اثبات صحة المتطابقات المثلثية:

(b $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

الطرف الأيسر	$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$
متطابقة المجموع	$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$
عوِّض	$=\sin\theta\cdot 0+\cos\theta\cdot 1$
بسِّط	$=\cos\theta$ ✓
	= الطرف الأيمن

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ (**3A**

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ (**3B**

مسائل مهارات التفكير العليا

30) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot(A + B)$ بدلالة $\cot A$, $\cot B$.

تدريب على الإختبار

43)

ما القيمة الدقيقة للعبارة:

$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D $\sqrt{3}$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math