

لا تحف من المسافة بين الحام والحقيقة.. فمارمت استطعت أن تحام بشيء فبإمكانك تحقيقه..



المطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها رياضيات هـ

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها



وزارة التعليم
Kingdom of Saudi Arabia

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

لماذا؟



تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v ، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D ، وأقصى ارتفاع H :

$$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta, H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$$

حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ .

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية : من المفيد أحياناً أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 1

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ، فإننا نجد $\cos \theta$ أولاً.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ لإيجاد $\cos \theta$.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

ربّع ثم اطرح

$$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$$

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

خذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos \theta$ موجب أي $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

متطابقة ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

اضرب

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$$



تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.



المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 2

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ مما يأتي علمًا بأن $0^\circ < \theta < 90^\circ$: $\sin \theta = \frac{2}{3}$

(a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\sin \theta$, $\cos \theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

متطابقة ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3}$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$



مجموعة رقة الرياضيات

www.shikhah-math.com



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math





المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 2

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي علمًا بأن $0^\circ < \theta < 90^\circ$: $\sin \theta = \frac{2}{3}$

$\tan 2\theta$ (b)

الخطوة 1: أوجد $\tan \theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

تعريف دالة الظل

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

بالقسمة وانطاق المقام

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



مجموعة رقة الرياضيات

www.shikhah-math.com





المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 2

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ مما يأتي علمًا بأن $0^\circ < \theta < 90^\circ$: $\sin \theta = \frac{2}{3}$

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

متطابقة ضعف الزاوية

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

رَبْع المَقَام

بَسْط

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{2 \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2} \\ &= \frac{2 \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}} \\ &= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{5}{5}} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$



مجموعة رفاة الرياضيات

1443 - 1444



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ مما يأتي علمًا بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$; $\cos \theta = -\frac{1}{3}$:

$$\tan 2\theta \quad (2B)$$

$$\cos 2\theta \quad (2A)$$



المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها



إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

في إيجاد جيب نصف الزاوية

θ أو $\sin \frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن

استعمال المتطابقة

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

في إيجاد جيب تمام نصف

الزاوية θ أو $\cos \frac{\theta}{2}$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مفهوم أساسي

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مثال 3

(a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ تقع في الربع الثالث.

استعمل متطابقة فيثاغورس

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

اطرح

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

متطابقة نصف الزاوية

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

بسّط

بإنطاق المقام

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ، إذن ، } 135^\circ \text{ و } 90^\circ \text{ تقع بين } \frac{\theta}{2} \text{ ، فإن } 270^\circ \text{ و } 180^\circ \text{ تقع بين } \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

بما أن θ تقع في الربع الثالث ، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة

أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$.
وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مثال 3

(b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5^\circ$.

$$67.5^\circ = \frac{135^\circ}{2}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

في الربع الأول، فالقيمة موجبة

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1 = \frac{2}{2}$$

اطرح

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

اضرب

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

بسّط

$$\begin{aligned} \cos 67.5^\circ &= \cos \frac{135^\circ}{2} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos 135^\circ}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$



تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

مثال 4 من واقع الحياة

التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad \frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta}{\frac{v^2}{g} \sin 2\theta}$$

بسّط كلاً من البسط والمقام

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

بسّط

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

بسّط

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$= \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$$
$$= \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$= \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} \cdot \frac{g}{v^2 \sin 2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{2 \sin 2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{4 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{4} \tan \theta$$

تحقق من فهمك



يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالستمبر لكل ثانية تربيع) تقريباً بالصيغة:
 $g = 978 + 5.17 \sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$ ، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A بسّط هذه العلاقة مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة g عندما $L = 45^\circ$.



إثبات صحة المتطابقات

مثال 5

$$\cdot \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1} \quad \text{أثبت صحة المتطابقة}$$

$$\text{الطرف الأيمن} \quad \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

اضرب كلاً من البسط والمقام في $\sin \theta$

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = 1 \quad \text{اضرب في 1}$$

اضرب

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta, \quad 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$$

$$\frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$$

$$= \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 1}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 1}$$

$$= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \cos \theta \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \quad \checkmark$$

$$= \text{الطرف الأيسر}$$



تحقق من فهمك

$$.4 \cos^2 x - \sin^2 2x = 4 \cos^4 x \quad (5)$$





(27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ برّر إجابتك.

للعيد

$$\begin{aligned}\sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \sin(45 - 30) &= \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4}}{4}\end{aligned}$$

سليمان

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \sin \frac{30}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} \\ &= 0.5\end{aligned}$$

مسائل مهارات
التفكير العليا

(30) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin(A + B)$ لاشتقاق صيغة $\sin 2\theta$ ،
واستعمل الصيغة $\cos(A + B)$ لاشتقاق صيغة $\cos 2\theta$.



مسائل مهارات
التفكير العليا



(31) تبرير: اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

مسائل مهارات
التفكير العليا