لاتقارن نفسك بالآخرين ، افهم ذاتك
وانطلق..

حل المعادلات المثلثية

رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

حل المعادلات المثلثية

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية.
(الدروس من 2–3 إلى 3–4)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

حل المعادلات المثلثية

لماذا

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية : درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ١ حل المعادلات على فترة معطاه

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ ، إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$.

المعادلة الأصلية $\qquad \sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$

حلّل بأخذ عامل مشترك $\qquad \cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$

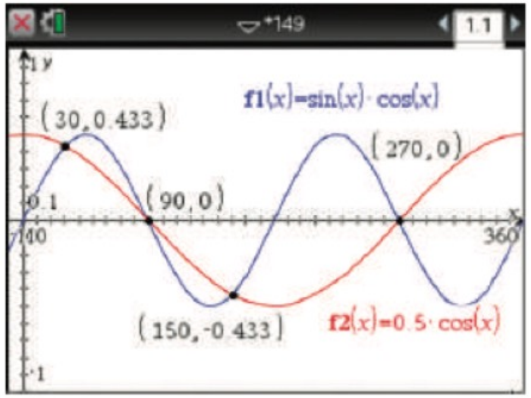
خاصية الضرب الصفري $\qquad \cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$

$\theta = 90°$ أو $270°$ $\qquad \sin\theta = \frac{1}{2}$

الزاوية المرجعية للزاوية °150 هي °30 $\qquad \theta = 30°$ أو $150°$

الحلول هي $30°, 90°, 150°$ فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$

التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin\theta\cos\theta, y = \frac{1}{2}\cos\theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين °0 و °180 فقط.



إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية

حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال ١ حل المعادلات على فترة معطاه

b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$ المعادلة الأصلية

$$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$$ حلّل

$2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$2\sin\theta = -1$ ، $\sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

التحقق:

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

1A) حُل المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$، إذا كانت $0 \le x \le 2\pi$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

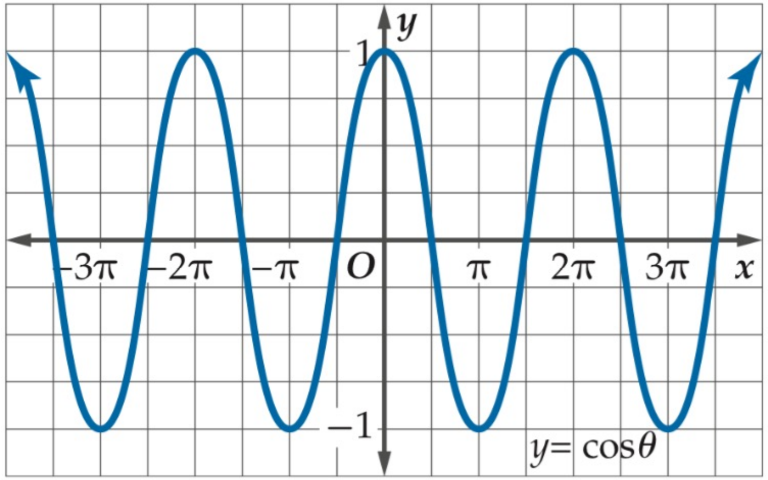
1B) حُل المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

مثال ٢ معادلة مثلثية لها عدد لانهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos \theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos \theta + 1 = 0$$
$$\cos \theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos \theta$ ؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos \theta = -1$.



الحلول هي $\dots, \pi, 3\pi, 5\pi$ ، وكذلك $\dots, -5\pi, -3\pi, -\pi$، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π.
طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

2A) حُل المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

تحقق من فهمك

2B) حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

مثال٣ من واقع الحياة

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20 \cos 3\pi t$	عوّض 31 بدلًا من h
$10 = -20 \cos 3\pi t$	اطرح 21 من كلا الطرفين
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كلا الطرفين على -20
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	خذ معكوس جيب التمام

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ ‏ k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ‏ ‏ $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ‏ اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال ٤ حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$	المعادلة الأصلية
$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$	ربع
$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$	بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين
$0 = 2\cos\theta\,(1 + \cos\theta)$	حلّل
$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$	خاصية الضرب الصفري
$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$	
$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$	

التحقق:

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180°$$
$$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$$
$$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$1 = 1 \ \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$$
$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$-1 \ne 1 \ \times$$

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

تحقق من فهمك

4) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

مثال ٥ حل معادلات مثلثية باستخدام متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$	المعادلة الأصلية
$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$	خاصية التوزيع
$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$	اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر
$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$	حلّل
$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$$\tan^2\theta = -1$$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$$\tan^2\theta = 3$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي : $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$ ؛حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٥ حل معادلات مثلثية باستخدام متطابقات

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$$

$$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$$

$$8 - 9 = -1 \ \checkmark$$

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$$

$$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$$

$$8 - 9 = -1 \ \checkmark$$

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو π، وهذا يبرر كتابة الحلول في الصورة:

$\theta = 60° + 180°k$

$\theta = 120° + 180°k$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

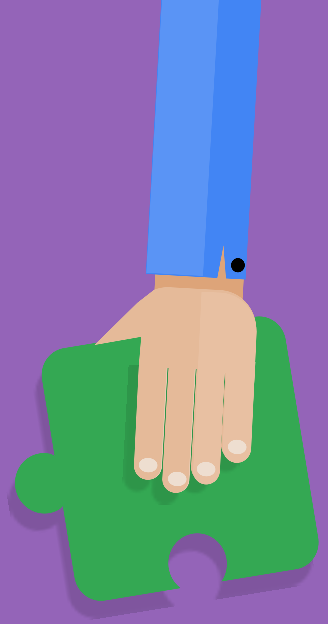
31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هلا	ليلى
$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$
$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$	$-\sin\theta = -\sin\theta$
$2\cos\theta = 1$	$2\cos\theta = 0$
$\cos\theta = \frac{1}{2}$	$\cos\theta = 0$
$\theta = 60°, 300°$	$\theta = 90°, 270°$

مسائل مهارات التفكير العليا

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مسائل مهارات التفكير العليا



33) اكتب: حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

شكرا لكم

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math