رابط الدرس الرقمي

المعادلات التربيعية : $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

أهداف الدرس

- تحليل ثلاثية حدود على الصورة : س 2 + ب س + جـ .
- حل معادلات على الصورة : س 2 + ب س + جـ = 0 .

المعرفة السابقة

خاصية التوزيع

أوجد ناتج ضرب (٢ س + ٣) (س + ٥) بالطريقة الأفقية

(٢س + ٣) (س + ٥)

= ٢ س (س + ٥) + ٣ (س + ٥)

= ٢ $س^{٢}$ + ١٠ س + ٣ س + ١٥

= ٢ $س^{٢}$ + ١٣ س + ١٥

٢س (س + ٥) + ٣ (س + ٥)

= ٢$س^{٢}$ + ١٠س + ٣س + ١٥

= ٢$س^{٢}$ + ١٣س + ١٥

سنتعلم اليوم:

تحليل $س^{٢} + ب س + جـ$

عندما يكون ب ، جـ موجبين

عندما تكون ب سالبة ، جـ موجبة

حل المعادلة بالتحليل

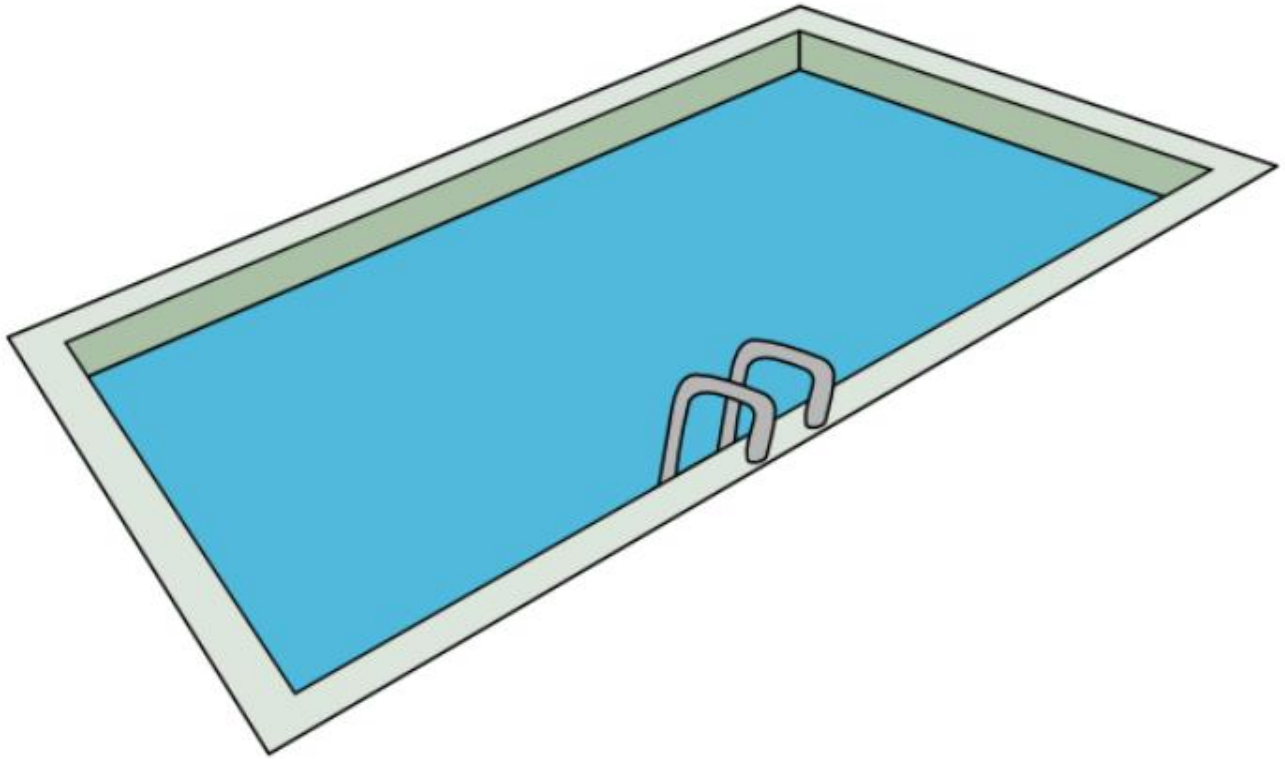
ماجد الحربي

ضـــرب

$$(س + ٦)\ (س + ٢) = س^{٢} + ٨ س + ١٢$$

تحليل

تمهيد



بركة سباحة سطحها مستطيل الشكل، يُراد وضع سياج حولها طوله ٢٤ م. إذا كانت مساحة سطح البركة ٣٦ م^{٢}، فما بعداها؟

لحل هذه المسألة يجب إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦ وَمجموعهما يساوي ١٢ (نصف محيط البركة).

تحليل س^{٢} + ب س + جـ: تعلمت كيف تضرب ثنائيتي حدّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، على أن تكون كل ثنائية حد منهما عاملاً لناتج الضرب. ويمكن استعمال نمط ضرب ثنائيتي الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود.

تمهيد

$(س + ٣)(س + ٤) = س^{٢} + ٤س + ٣س + ٣ \times ٤$ طريقة التوزيع بالترتيب

$= س^{٢} + (٤ + ٣)س + ٣ \times ٤$ خاصية التوزيع

$= س^{٢} + ٧س + ١٢$ بسّط.

لاحظ أن معامل الحدّ الأوسط ٧ هو مجموع العددين ٣ و٤، والحد الأخير ١٢ هو ناتج ضربهما.

لاحظ القاعدة الآتية في الضرب:

$(س + ٣)(س + ٤) = س^{٢} + (٤ + ٣)س + (٣ \times ٤)$

$(س + م)(س + ن) = س^{٢} + (ن + م)س + م ن$ لتكن م = ٣، ن = ٤

$= س^{٢} + (م + ن)س + م ن$ الإبدال (+)

$س^{٢} + ب س + جـ$ ب = م + ن، جـ = م ن

لاحظ أن معامل الحد الأوسط هو مجموع م وَ ن، والحدّ الأخير هو ناتج ضربهما.

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

تحليل $س^{٢}$ + ب س + جـ

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^{٢}$ + ب س + جـ ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب، وناتج ضربهما جـ ، ثم اكتب $س^{٢}$ + ب س + جـ على الصورة (س + م) (س + ن).

الرموز: $س^{٢}$ + ب س + جـ = (س + م) (س + ن) ، حيث م + ن = ب، م ن = جـ

مثال: $س^{٢}$ + ٦س + ٨ = (س + ٢) (س + ٤). لأن ٢ + ٤ = ٦، ٢ × ٤ = ٨

يكون لعاملي جـ الإشارة نفسها عندما تكون موجبة. ويعتمد كون العاملين موجبين أو سالبين على إشارة ب. فإذا كانت ب موجبة فالعاملان موجبان، وإذا كانت سالبة فالعاملان سالبان.

إرشادات لحل المسألة

خمّن وتحقّق

عند تحليل ثلاثية حدود، اعمل تخمينًا مدروسًا، وتحقق من المعقولية، ثم عدّل التخمين حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

تحليل $س^{٢}$ + ب س + جـ عندما يكون ب، جـ موجبين

ب ج +

مثال

حلّل : $س^{٢}$ + ٩س + ٢٠.

بما أن جـ ، ب موجبان في ثلاثية الحدود، ب = ٩، جـ = ٢٠. لذا يجب إيجاد عاملين موجبين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠. كوّن قائمة عوامل العدد ٢٠، و أوجد العاملين اللذين مجموعهما ٩.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
١، ٢٠	٢١
٢، ١٠	١٢
٤، ٥	٩

العاملان الصحيحان هما ٤، ٥

$س^{٢}$ + ٩س + ٢٠ = (س + م)(س + ن) اكتب القاعدة

= (س + ٤)(س + ٥) م = ٤، ن = ٥

تحقق: يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين لتحصل على العبارة الأصلية.

(س + ٤)(س + ٥) = $س^{٢}$ + ٥س + ٤س + ٢٠ طريقة التوزيع بالترتيب

= $س^{٢}$ + ٩س + ٢٠ ✓ بسّط.

تقويم حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

أ) $د^{٢} + ١١د + ٢٤$

ب) $س^{٢} + ١٤س + ٢٤$

تحليل $س^{٢}$ + ب س + جـ عندما تكون ب سالبة، جـ موجبة

ب

إذا كانت ب سالبة، وجـ موجبة في ثلاثية الحدود، استعمل ما تعرفه عن ضرب ثنائيتي الحد؛ لتقليص قائمة العوامل الممكنة.

تذكر
Remember

قاعدة الإشارات

ب

مثال

حلّل: س^{٢} − ٨س + ١٢

بما أن جـ موجبة، و ب سالبة في ثلاثية الحدود ، ب= −٨، جـ = ١٢ لذا يجب إيجاد عاملين سالبين مجموعها −٨ وحاصل ضربهما ١٢

عوامل العدد ١٢	مجموع العاملين
−١، −١٢	−١٣
−٢، −٦	−٨
−٣، −٤	−٧

العاملان الصحيحان هما −٢، −٦

س^{٢} − ٨س + ١٢ = (س + م)(س + ن)

= (س − ٢)(س − ٦)

اكتب القاعدة

م = −٢، ن = −٦

تحقق: مثّل المعادلتين: ص= س^{٢} − ٨س + ١٢ ، ص= (س−٢) (س− ٦) بيانيًّا على الشاشة نفسها. بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُللت بصورة صحيحة. ✔

إرشادات للدراسة

إيجاد العوامل

عندما تجد العوامل الصحيحة فليس هناك ضرورة لاختبار العوامل الأخرى. فمثلاً، العاملان الصحيحان في المثال٢ هما: −٢ وَ −٦، لذا فلا داعي لاختبار العاملين: −٣ وَ −٤

تقويم حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

٢ب) $و^{٢} - ١١و + ٢٨$

٤) $م^{٢} - ١٥م + ٥٠$

تحليل $س^{٢}$ + ب س + جـ عندما تكون جـ سالبة

ج

عندما تكون جـ سالبة، يكون لعامليها إشارتان مختلفتان. ولتحدد أي عامل منهما موجب وأيهما سالب، انظر إلى إشارة ب؛ فالعامل الذي له القيمة المطلقة الكبرى له إشارة ب نفسها.

ب

مراجعة المفردات

القيمة المطلقة

تمثل القيمة المطلقة للعدد ن المسافة بين العدد والصفر على خط الأعداد. وتُكتب على الصورة | ن |.

مثال

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

أ) $س^{٢} + ٢س - ١٥$

في ثلاثية الحدود هذه ب = ٢، جـ = −١٥ وبما أن جـ سالبة. فإن م وَ ن عددان مختلفان في الإشارة. وبما أن ب موجبة، فالعامل الذي قيمته المطلقة أكبر يكون موجبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل العدد −١٥، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما ٢.

عوامل العدد −١٥	مجموع العاملين
−١، ١٥	١٤
−٣، ٥	٢

العاملان الصحيحان هما −٣، ٥

$س^{٢} + ٢س - ١٥ = (س + م)(س + ن)$ اكتب القاعدة

$= (س - ٣)(س + ٥)$ م= −٣، ن= ٥

تحقق: $(س - ٣)(س + ٥) = س^{٢} + ٥س - ٣س - ١٥$ طريقة التوزيع بالترتيب

$= س^{٢} + ٢س - ١٥$ ✓ بسّط

مثال

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

ب) $س^{٢} - ٧س - ١٨$

في ثلاثية الحدود هذه ب = −٧، جـ = −١٨ . ، إذن م أو ن سالبة، وليس كلاهما. وبما أن ب سالبة، فالعامل ذو القيمة المطلقة الكبرى يكون سالبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل −١٨، على أن يكون أحد العاملين في كلّ زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما −٧.

عوامل العدد −١٨	مجموع العاملين
١، −١٨	−١٧
٢، −٩	−٧
−٦، +٣	−٣

العاملان الصحيحان هما ٢، −٩

$س^{٢} - ٧س - ١٨ = (س + م)(س + ن)$

اكتب القاعدة

$= (س + ٢)(س - ٩)$

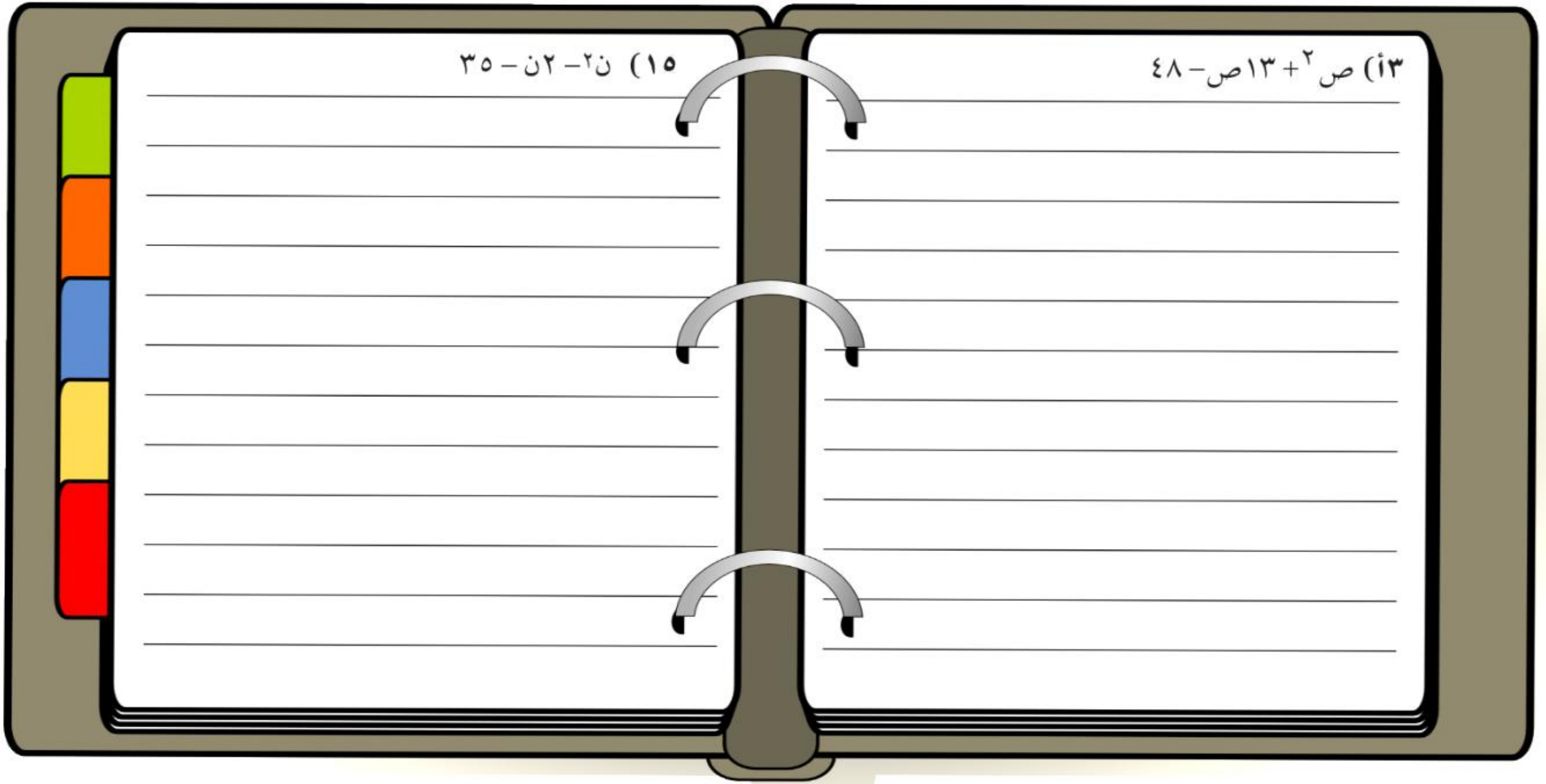
م = ٢، ن = −٩

تحقق: مثّل المعادلتين ص = $س^{٢} - ٧س - ١٨$ ،

ص = (س + ٢) (س − ٩) بيانيًّا على الشاشة نفسها،

بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُلّلت بصورة صحيحة. ✓

تقويم حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:



أ٣) $ص^{٢} + ١٣ص - ٤٨$

١٥) $ن^{٢} - ٢ن - ٣٥$

حل المعادلة بالتحليل

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكن كتابة **المعادلات التربيعية** على الصورة القياسية:

$أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ويمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري

خاصية الضرب الصفري

$١ س^{٢} - ٧ س - ٦٠ = ٠$

$أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$(س - ١٢)(س + ٥) = ٠$

$س - ١٢ = ٠$ ، $س + ٥ = ٠$

$+١٢ \quad +١٢$ ، $-٥ \quad -٥$

$س = ١٢$ ، $س = -٥$

خاصية الضرب الصفري

ا	ب	ت
يمكن تحليل كثيرة الحدود	إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا	يوجد عاملان مشتركان متساوين

حل المعادلة بالتحليل

حل المعادلة: $س^{٢} + ٦س = ٢٧$، وتحقّق من صحة الحل.

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} + ٦س - ٢٧ = ٠$	اطرح ٢٧ من كلا الطرفين
$(س - ٣)(س + ٩) = ٠$	حلِّل إلى العوامل
$س - ٣ = ٠$ أو $س + ٩ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$س = ٣$ $\quad$ $س = -٩$	حل كل معادلة

تحقق: عوّض عن س بكل من ٣، -٩ في المعادلة الأصلية.

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$

$(٣)^{٢} + ٦(٣) \stackrel{؟}{=} ٢٧$

$٩ + ١٨ = ٢٧$ ✓

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$

$(-٩)^{٢} + ٦(-٩) \stackrel{؟}{=} ٢٧$

$٨١ - ٥٤ = ٢٧$ ✓

تقويم

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤ب) $س^{٢} + ٣س - ١٨ = ٠$

١٠) $س^{٢} - ١٠س = -٢٤$

حل المسألة بالتحليل

مثال من واقع الحياة

تصميم: يصمّم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة عن عرضها بِـ ٢ بوصة. وَمساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربّعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطّط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض× الطول

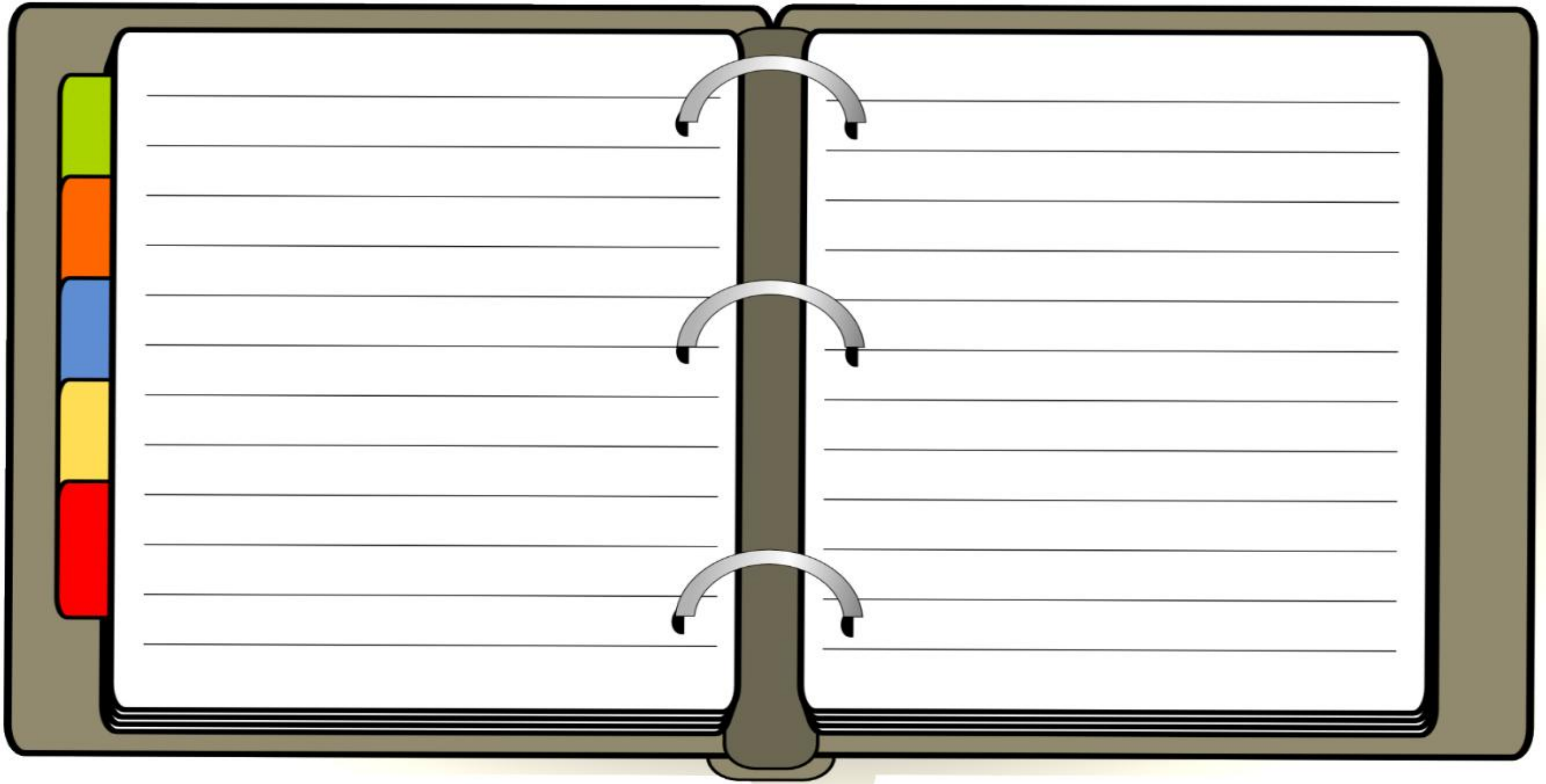
حلّ: بما أن ض = عرض اللوحة، فيكون طول اللوحة = ض+ ٢ + ٤ = ض+ ٦

ض (ض+ ٦) = ٦١٦	اكتب المعادلة
ض^{٢}+ ٦ض= ٦١٦	اضرب
ض^{٢}+ ٦ض – ٦١٦= ٠	اطرح ٦١٦ من كل طرف
(ض + ٢٨) (ض – ٢٢) = ٠	حلل
ض + ٢٨ = ٠ أو ض – ٢٢ = ٠	خاصية الضّرب الصفري
ض = –٢٨ ض = ٢٢	حل كل معادلة

بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة.

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المساحة = ٢٢(٢٢ + ٦) = ٦١٦ بوصة مربعة، وهي مساحة اللوحة. ✓

تقويم ٢٤) **هندسة :** مساحة مثلث ٣٦سم^{٢}، ويزيد ارتفاعه ٦ سم على طول قاعدته. فما ارتفاعه؟ وما طول قاعدته؟



تقويم **اكتشف الخطأ:** حلّل كلٌّ من خليل وماجد العبارة: $س^{٢}+٦س-١٦$. فأيهما إجابته صحيحة؟

ماجد

$س^{٢}+٦س-١٦=(س+٢)(س-٨)$

خليل

$س^{٢}+٦س-١٦=(س-٢)(س+٨)$

ملخص مفهوم

المعادلاتُ التربيعيةُ

$س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$أ = ١$

حلُّ المعادلاتُ بالتحليلِ

م ، ن

$م + ن = ب$

$م \times ن = جـ$

$(س + م)(س + ن) = ٠$

$(س + م) = ٠$

$(س + ن) = ٠$

ملخص مفهوم

المعادلات التربيعية $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$$س^{٢} + ب س + جـ$$

تحليل

ب . جـ	ب ، جـ	جـ
+	− ، +	−
٣ × ٨	-١ × ٢١-	٣٠- × ١٦
٣ + ٨	٢١- + (-١)	٣٠- + ١٦
$ر^{٢} + ١١ ر + ٢٤$	$م^{٢} - ٢٢ م + ٢١$	$ص^{٢} + ١٣ ص - ٤٨$
$= (ر + ٣) (ر + ٨)$	$= (م - ١) (م - ٢١)$	$= (ص - ٣) (ص + ١٦)$

حل المعادلات بالتحليل

$$ع^{٢} - ٣ ع - ٧٠ = ٠$$

١ كتابتها بالصورة القياسية

$$ع^{٢} - ٣ ع - ٧٠ = ٠$$

٢ تحليل ثنائي الحدود

$$(ع + ٧) (ع - ١٠) = ٠$$

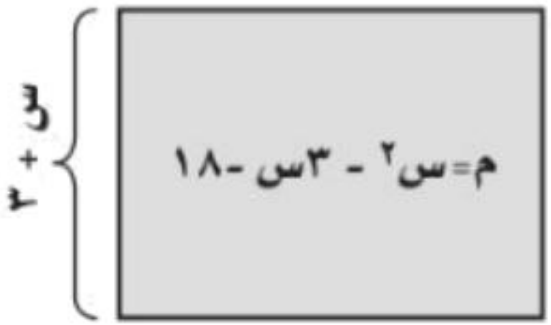
٣ خاصية الضرب الصفري

$ع + ٧ = ٠ \longleftarrow ع = -٧$

$ع - ١٠ = ٠ \longleftarrow ع = ١٠$

قيم نفسك

٣٧) **هندسة:** ما العبارة التي تمثّل طول المستطيل في الشكل المجاور؟



أ) س + ٥ **جـ)** س – ٦

ب) س + ٦ **د)** س – ٥