الفصل 4
حساب المثلَّثات
Trigonometry

فيما سبق:
درست تحليل الدوالّ وتمثيلها بيانيًا.

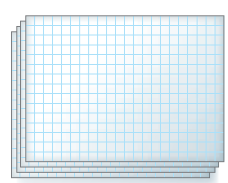
والآن:
- أجد قيم دوالّ مثلَّثية.
- أحلُّ مسائل باستعمال النسب المثلَّثية للمثلَّث القائم الزاوية.
- أستعمل قانون الجيوب وقانون جيوب التمام في حلِّ المثلَّث.
- أمثّل دوالّ مثلَّثية بيانيًا.

لماذا؟
القياس غير المباشر: للدوالّ المثلَّثية تطبيقات عملية في القياس غير المباشر، فمثلًا يمكن استعمال النسب المثلَّثية لمعرفة ارتفاعات الجبال أو الأشجار الشاهقة أو ناطحات السحاب أو إيجاد البُعد بين جبلين أو عرض نهر.

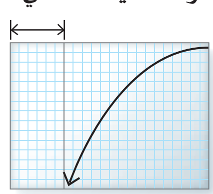
المطويات — منظم أفكار

حساب المثلَّثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول حساب المثلَّثات، مبتدئًا بأربع أوراق من أوراق الرسم البياني.

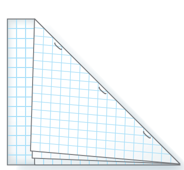
1. **جمِّع** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض.



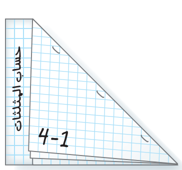
2. **اطوِ** الطرف العلوي للأوراق بحيث ينطبق على الحافة السفلية مكوّنًا مثلثًا ومستطيلًا، كما في الشكل.



3. **ثبِّت** الأوراق على طول خطّ الطيِّ لتشكِّل كتيبًا.



4. **عنوِن** المستطيل بحساب المثلثات، ورقِّم الصفحات بأرقام الدروس.

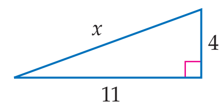


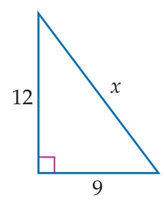
التهيئة للفصل الرابع

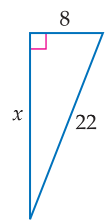
أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد قيمة x مقرَّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.
(تستعمل مع الدروس 3-4 إلى 1-4)

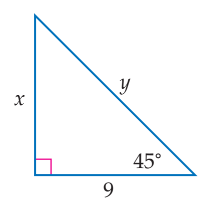
1)


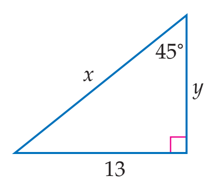
2)


3)


4) **حدائق:** لدى راشد حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 6m و 4m . يريد أن يرصف ممرًّا على قطر الحديقة. فكم سيكون طول الممر مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

أوجد القياسين المجهولين في كلٍّ مما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة): (تستعمل مع الدرس 1-4)

5)


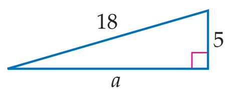
6)


7) **سلالم:** يستند سُلَّم إلى جدار بحيث يصنع معه زاوية °45 . إذا كان طول السُّلَّم 12 ft، فأوجد ارتفاع قمّته عن الأرض.

مراجعة سريعة

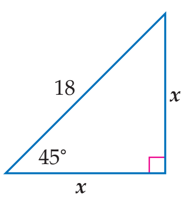
مثال 1

أوجد القياس المجهول في المثلَّث القائم الزاوية أدناه.



مثال 2

أوجد القياسين المجهولين فيما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



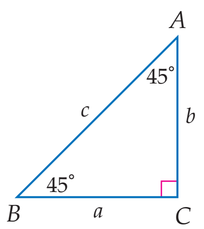
معمل الجداول الإلكترونية
استقصاء المثلَّثات القائمة الخاصة
Investigating Special Right Triangles

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أضلاع المثلَّثات القائمة الزاوية الخاصة.

يمكنك استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلَّثات القائمة الزاوية الخاصة.

نشاط المثلَّث الذي قياسات زواياه $90° - 45° - 45°$



ضلعا المثلَّث $90° - 45° - 45°$ في الشكل المجاور a, b متساويان.
ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا المثلَّث؟

الخطوة 1: أدخل الصيغ المشار إليها في برنامج الجداول الإلكترونية ، حيث $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

=SQRT(A2^2+B2^2)　=B2/A2　=B2/C2　=A2/C2

45-45-90 triangles

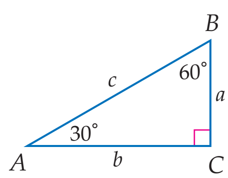
◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

Sheet 1　Sheet 2　Sheet 3

الخطوة 2: تحقَّق من النتائج؛ بما أن جميع المثلَّثات التي قياسات زوايا كلٍّ منها $90° - 45° - 45°$ متشابهة، فإن النسب بين أضلاعها تكون ثابتة، وتكون نسبة الضلع b إلى الضلع a مساوية للعدد 1 . ونسبة كلٍّ من الضلعين a, b إلى الضلع c مساوية للعدد 0.71 تقريبًا.

حلّل النموذج:

استعمل برنامج الجداول الإلكترونية المبيَّن أدناه للمثلَّث الذي قياسات زواياه $90° - 60° - 30°$.



30-60-90 triangles

◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

Sheet 1　Sheet 2　Sheet 3

1) انسخ ثم أكمل الورقة الإلكترونية أعلاه.

2) صِفِ العلاقة بين أطوال أضلاع المثلَّث $90° - 60° - 30°$ المُعطاة في الشكل أعلاه.

3) ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا النوع من المثلَّثات؟

الدوالّ المثلَّثية في المثلّثات القائمة الزاوية
Trigonometric Functions in Right Triangles

فيما سبق:

درست استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع مثلّثات قائمة الزاوية. (مهارة سابقة)

والآن:

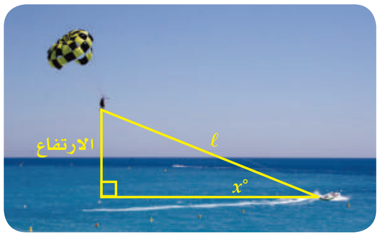
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا حادّة.
- أستعمل الدوالّ المثلَّثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلَّثات قائمة الزاوية.

المفردات:

حساب المثلَّثات
trigonometry
النسبة المثلَّثية
trigonometric ratio
الدالّة المثلَّثية
trigonometric function
الجيب
sine
جيب التمام
cosine
الظلّ
tangent
قاطع التمام
cosecant
القاطع
secant
ظلّ التمام
cotangent
دوالّ المقلوب
reciprocal functions
معكوس الجيب
inverse sine
معكوس جيب التمام
inverse cosine
معكوس الظلّ
inverse tangent
زاوية الارتفاع
angle of elevation
زاوية الانخفاض
angle of depression

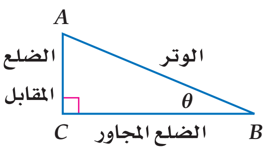
لماذا؟

يعتمد ارتفاع الشخص في التزلُّج الهوائي على طول حبل السحب ℓ والزاوية $x°$ التي يصنعها الحبل مع الخطّ الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلّج.



الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة يُعرّف **حساب المثلّثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلَّث وأضلاعه. وتقارن **النسبة المثلَّثية** بين طولَي ضلعين في المثلَّث القائم الزاوية، أمّا **الدالّة المثلَّثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلَّثية.

يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويُقرأ ثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادّة في المثلَّث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوالّ المثلَّثية الستِّ.



مفهوم أساسي: جميع الدوالّ المثلَّثية في مثلّث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثّل قياس زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، فإنّ الدوالّ المثلّثية الستّ تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\sin\theta$ (θ جيب) $= \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، $\csc\theta$ (θ قاطع تمام) $= \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

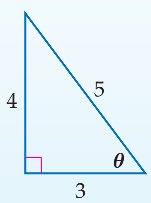
$\cos\theta$ (θ جيب تمام) $= \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، $\sec\theta$ (θ قاطع) $= \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta$ (θ ظل) $= \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ، $\cot\theta$ (θ ظل تمام) $= \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

أمثلة:

$\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ، $\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\csc\theta = \frac{5}{4}$ ، $\sec\theta = \frac{5}{3}$ ، $\cot\theta = \frac{3}{4}$



مثال 1 إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية

إذا كانت θ تمثّل قياس زاوية حادّة في المثلّث القائم الزاوية في C، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ عندما يكون:

طول الضلع المقابل للزاوية θ: $BC = 8$، طول الضلع المجاور للزاوية θ: $AC = 15$، طول الوتر: $AB = 17$

تحقق من فهمك

1) أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية B الواردة أعلاه.

لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظلّ على الترتيب. وتُستعمل في تعريف **دوالّ المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مجال أيِّ دالّة مثلَّثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادّة θ في المثلَّث القائم الزاوية؛ لذا فإن قيم الدوالّ المثلَّثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادّة وليس على أطوال أضلاع المثلَّث القائم الزاوية؛ أي أنَّ قيم الدوالّ المثلَّثية للزاوية الحادّة ستبقى كما هي مهما اختلفت أطوال أضلاع المثلَّث.

مثال 2 إيجاد النسب المثلَّثية

$\angle B$ زاوية حادّة في مثلَّث قائم الزاوية، إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$، فأوجد قيمة $\tan B$.

تحقق من فهمك

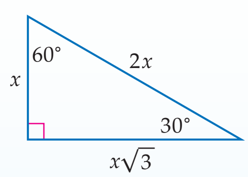
2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فأوجد قيمة $\sin B$.

تتكرَّر الزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ كثيرًا في حساب المثلَّثات.

مفهوم أساسي: بعض قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الخاصة

أضف إلى مطويتك

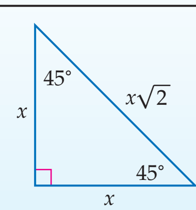
نستنتج من المثلَّث الذي قياسات زواياه $30°-60°-90°$ أن:



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$

نستنتج من المثلَّث الذي قياسات زواياه $45°-45°-90°$ أن:



$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan 45° = 1$

قراءة الرياضيات

تسمية المثلَّثات

تُستعمل الأحرف الكبيرة خلال هذا الفصل للدلالة على رؤوس المثلَّث وقياسات زوايا الرؤوس. ويُستعمل الحرف الصغير المقابل للحرف الكبير للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية، وتتضح دلالة الحرف من السياق.

تاريخ الرياضيات

اكتشف علماء العرب المسلمون العديد من العلاقات في حساب المثلَّثات، واستعملوها في حلِّ المعادلات، وإيجاد ارتفاع الشمس، وعمل الجداول الرياضية، ويرجع إليهم الفضل في جعله علمًا مستقلًّا عن علم الفلك.

ومن أبرز هؤلاء العلماء:

البيروني (أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني(362-439 هـ)).

الطوسي (نصر الدين الطوسي(597-672 هـ)).

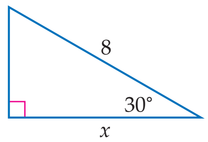
الكاشي (غياث الدين بن مسعود الكاشي (تُوفي سنة 839 هـ)).

البتاني (ابن عبد الله بن محمد بن سليمان الحراني (235-316 هـ)).

استعمال الدوالّ المثلَّثية: يمكنك استعمال الدوالّ المثلَّثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلَّث قائم الزاوية.

مثال 3 إيجاد طول ضلع مجهول

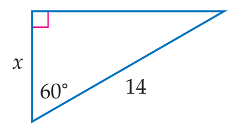
استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



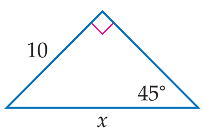
تحقق من فهمك

استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(3A



(3B



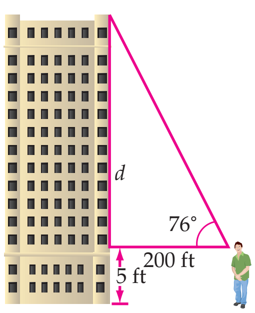
إرشادات للدراسة

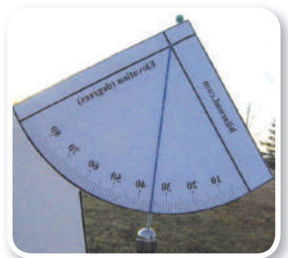
اختيار دالّة
إذا كان طول الوتر مجهولًا فإنه يجب استعمال دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام لإيجاد القيمة المجهولة.

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في المثلَّثات التي لا تتضمّن زواياها أيًّا من الزوايا: $30°, 45°, 60°$.

مثال 4 إيجاد طول ضلع مجهول

بناية: لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة 200 ft مبتعدًا عن قاعدة البناية. واستعمل أداة (مقياس زاوية الميل) لقياس الزاوية المحصورة بين خطِّ نظره المارّ بقمّة البناية والخطِّ الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع 5 ft، فما ارتفاع البناية؟



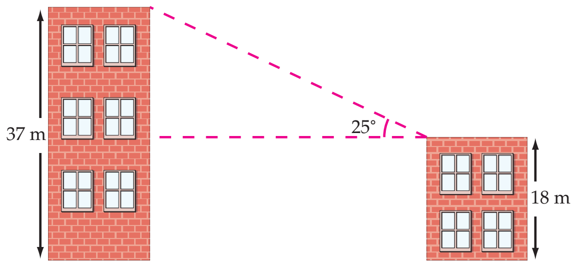


الربط بالحياة

مقاييس زاوية الميل تُستعمل لقياس زاوية ميل المجال المغناطيسي الأرضي ودرجة ميل واهتزاز المركبات والقوارب والطائرات. كما تُستعمل في رصد البراكين وحفر الآبار.

تحقق من فهمك

4) **بنايات:** في الشكل المجاور بنايتان، ارتفاع إحداهما 18 m، وارتفاع الأخرى 37 m، ولقياس المسافة الأفقية بينهما، وَضَعَ سعد أداة (مقياس زاوية الميل) على قمَّة البناية الصغرى، فوجد أن قياس الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي بين البنايتين والخط المارّ من الأداة إلى قمة البناية الكبرى هو $25°$. فما المسافة الأفقية بين البنايتين؟



عند حلِّ معادلات مثل $3x = -27$، تستعمل العملية العكسية للضرب. كما يمكنك استعمال معكوس الجيب أو جيب التمام أو الظل في إيجاد قياسات الزوايا.

مفهوم أساسي — معكوس النسب المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيبها يساوي x، فإن: **معكوس جيب** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\sin A = x$، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: **معكوس جيب تمام** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\cos A = x$، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وظلّها يساوي x، فإن: **معكوس ظل** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\tan A = x$، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.

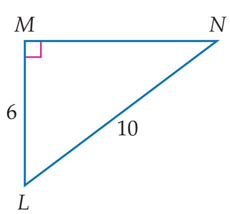
مثال: $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1}\sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

إذا علمت الجيب، أوجيب التمام أوالظل لزاوية حادّة، فإنه يمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد قياس هذه الزاوية والذي هو معكوس النسبة المثلَّثية المعلومة.

مثال 5 — إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كلِّ زاوية مما يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

a) $\angle N$



قراءة الرياضيات

معكوس النسب المثلَّثية

تُقرأ العبارة $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x، وتعني: الزاوية التي جيبها x، يشبه هذا الرمز رمز الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$. كن حذرًا ولا تخلط هذا الرمز مع رمز الأُسّ السالب؛ $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$.

إرشادات للدراسة

استعمال الآلة الحاسبة

لإيجاد $\sin^{-1}\frac{6}{10}$ باستعمال الآلة الحاسبة، اضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليسار إلى اليمين

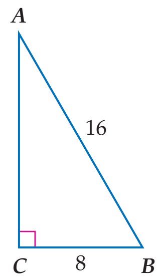
SHIFT sin (6 ÷ 10) =

ستحصل على الإجابة $36.9°$، ولإيجاد $\cos^{-1}\frac{8}{16}$ اضغط على المفاتيح

SHIFT cos (8 ÷ 16) =

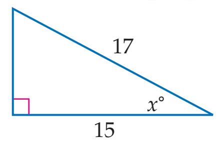
وستحصل على الإجابة $60°$

$\angle B$ (b

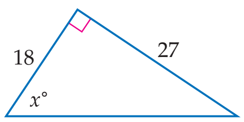


تحقق من فهمك أوجد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(5A



(5B

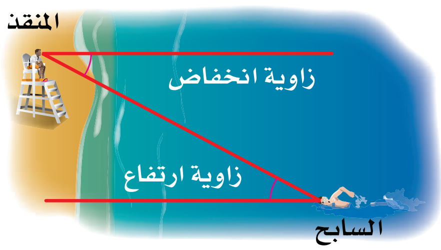


إرشادات للدراسة

زوايا الارتفاع والانخفاض

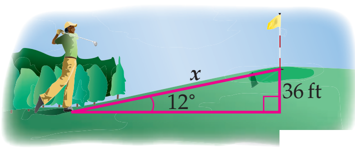
زاويتا الارتفاع والانخفاض للحالة الواحدة متطابقتان؛ لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لخطين متوازيين .

في الشكل المجاور، تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر السابح إلى المنقذ والخطِّ الأفقي له **زاوية الارتفاع**. كما تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر المنقذ إلى السابحِ والخطِّ الأفقي له **زاويةَ الانخفاضِ**.

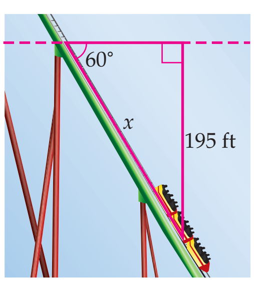


مثال 6 استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض

(a **لعبة الجولف:** يقف لاعب جولف أسفل تَلّ، وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التلِّ 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التلِّ عن الحفرة هي °12، فأوجد المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة.



(b **العربة الدوارة:** قياس زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوَّارة في إحدى مدن الألعاب هي °60. وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. أوجد طول هذا الجزء من المسار.

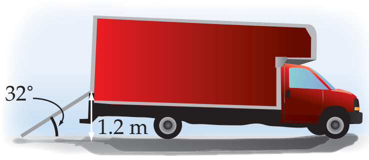


الربط بالحياة

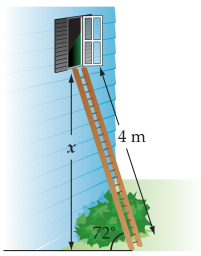
أكثر العربات الدوَّارة انحدارًا في العالم لها زاوية انحدار (انخفاض) تقارب °90 .

تحقق من فهمك

6A) تفريغ حمولة: استُعمِل سطحٌ مائل لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها $32°$. إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض $1.2\,m$، فأوجد طول السطح المائل.



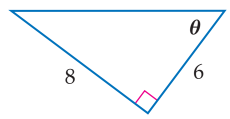
6B) سلالم: سُلَّمٌ طوله $4m$ يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها $72°$. ما ارتفاع قمّة السلّم عن الأرض؟



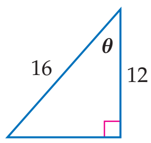
تأكـد

مثال 1 أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ الموضّحة في كلٍّ ممّا يأتي:

(1



(2



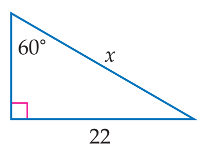
مثال 2 معتبرًا $\angle A$ زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، أجب عما يأتي:

3) إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$؟

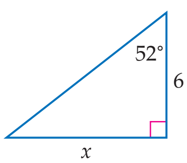
4) إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$، فما قيمة $\cos A$؟

مثال 3 استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

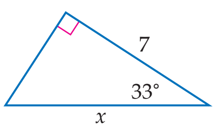
(5



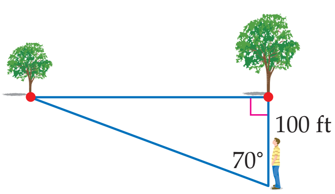
(6



(7

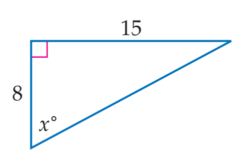


مثال 4 8) **أشجار:** يقف عبدالله ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرَّك مبتعدًا عن مكانه مسافة $100\,ft$، في مسار عموديّ على الخطّ الواصل بين الشجرتين، ومشكّلًا معهما زاوية قياسها $70°$ ، فما البُعد بين الشجرتين؟

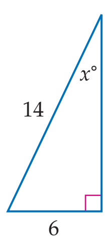


مثال 5 أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

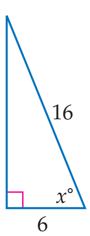
(9



(10



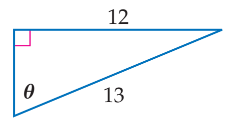
(11

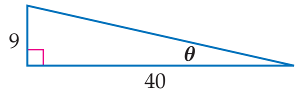


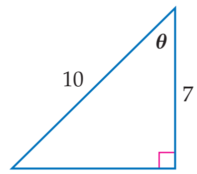
مثال 6 12) **سلالم:** إذا علمت أن زاوية ارتفاع السلالم المُوصَى بها لمكافحة الحرائق هي $75°$، فإلى أيّ ارتفاع على بناية يمكن أن يصل سُلّم طوله $6.5\,m$، إذا تمَّ الاعتماد على زاوية الارتفاع الموصى بها، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

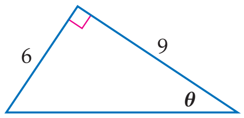
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ الموضَّحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

(13


(14


(15


(16


مثال 2 إذا علمت أن $\angle A$, $\angle B$ زاويتان حادّتان في مثلَّث قائم الزاوية، فأجب عما يأتي:

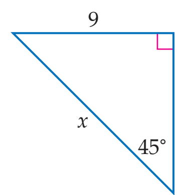
(17 إذا كان $\tan A = \frac{8}{15}$، فما قيمة $\cos A$؟

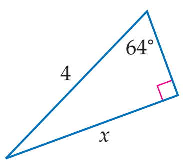
(18 إذا كان $\cos A = \frac{3}{10}$، فما قيمة $\tan A$؟

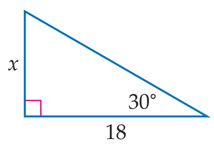
(19 إذا كان $\tan B = 3$، فما قيمة $\sin B$؟

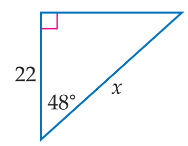
(20 إذا كان $\sin B = \frac{4}{9}$ ، فما قيمة $\tan B$؟

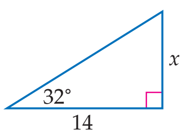
المثالان 3, 4 في كلٍّ ممَّا يأتي، استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

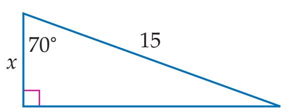
(21


(22


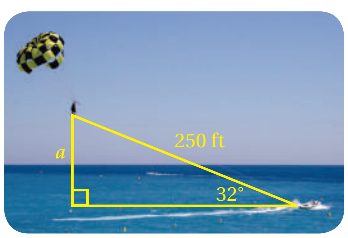
(23


(24


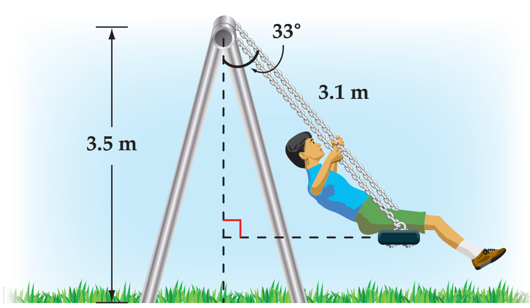
(25


(26


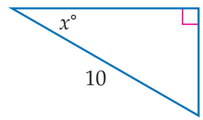
(27 **تزلُّج هوائي:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، واستعن بالمثلَّث إلى اليسار في إيجاد قيمة a التي تُمثِّل ارتفاع المتزلِّج، إذا كان طول حبل السحب 250 ft، وقياس الزاوية المحصورة بين الحبل والخطِّ الأفقي يساوي 32°، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

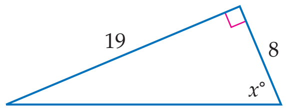


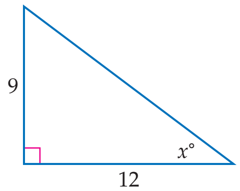
(28 **أرجوحة :** يلعب طفل على أرجوحة في متنزَّه، فإذا كان ارتفاع أعلى الأرجوحة من الأرض 3.5 m، والزاوية التي يصنعها حبل الأرجوحة مع الخطِّ العمودي على الأرض في لحظة ما، كما هو مُبيّن في الشكل المجاور، فأوجد ارتفاع مقعد الأرجوحة عن الأرض في تلك اللحظة.

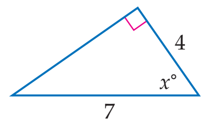


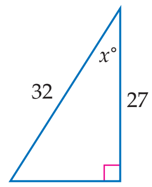
مثال 5 في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

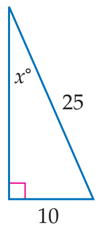
(29


(30


(31


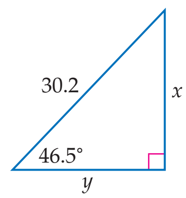
(32


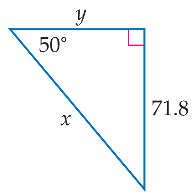
(33


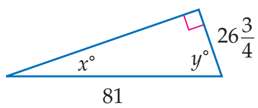
(34


مثال 6 (35 **تسلّق:** تسلّق أحد الأشخاص تلًّا بزاوية ارتفاع قياسها $20°$، أوجد ارتفاع الشخص عندما يكون قد قطع مسافة أفقية مقدارها $18\ m$.

في كلٍّ ممّا يأتي، استعمل دوالّ مثلّثية، لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(36


(37


(38


حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

(39 $\cos A = \frac{3}{19}$

(40 $\sin N = \frac{9}{11}$

(41 $\tan X = 15$

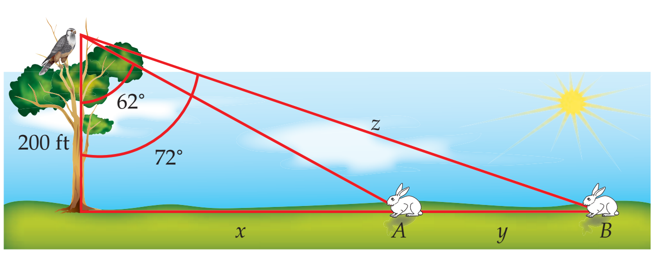
(42 $\sin T = 0.35$

(43 $\tan G = 0.125$

(44 $\cos Z = 0.98$

(45 **أعشاش:** تنظر فاطمة نحو عُشّ طائر على شجرة بزاوية ارتفاع قياسها $74.5°$، فإذا كان مستوى نظرها يرتفع $5\ ft$ عن سطح الأرض، وكانت تقف على بُعد $12\ ft$ من قاعدة الشجرة، فما ارتفاع عُشّ الطائر عن سطح الأرض، مقرِّبًا إلى أقرب قدم؟

(46 **صقور:** رأى صقر من ارتفاع $200\ ft$ أرنبين A, B. كما هو موضَّح في الشكل.



a) ما المسافة التقريبية z بين الصقر والأرنب B؟

b) ما البُعد بين الأرنبين؟

الربط بالحياة

يستطيع الصقر رؤية أجسام طولها $10\ cm$ من $1.5\ km$، كما أنه يستطيع رؤية الأشياء بوضوح عندما ينقضُّ بسرعة 100 ميل/ الساعة.

في $\triangle ABC$ ، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المُعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

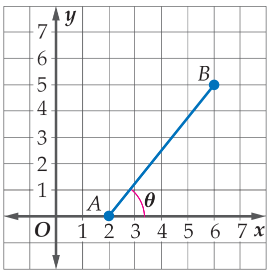
47) $m\angle A = 36°, a = 12$

48) $m\angle B = 31°, b = 19$

49) $a = 8, c = 17$

50) $\tan A = \frac{4}{5},\ a = 6$

مسائل مهارات التفكير العليا



51) **تحدٍّ:** قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(2, 0), B(6, 5)$ كما هو موضَّح في الشكل المجاور، ما قياس الزاوية الحادّة θ المحصورة بين القطعة المستقيمة والمحور x ؟ وضِّح كيف وجدت القياس.

52) **تبرير:** بيِّن ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرِّر إجابتك:
قيمة دالّة الجيب لأيِّ زاوية حادّة، لن تكون سالبة أبدًا.

53) **إجابة مفتوحة:** في المثلَّث القائم الزاوية ABC، إذا علمت أنّ: $\sin A = \sin C$ ، فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلَّث؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

54) إذا كان ثمن شطيرة x ريالًا، وثمن علبة عصير y ريالًا، وثمن شطيرتين مع علبة عصير 4.50 ريالات، وثمن ثلاث شطائر مع علبتي عصير 7.25 ريالات، فأيُّ المصفوفات الآتية يمكن ضربها في المصفوفة $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y ؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

55) نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5 . إذا كانت مساحة المستطيل $240\ cm^2$، فكم سنتمترًا طول قطر المستطيل؟

A 26

B 28

C 30

D 32

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممّا يأتي: (الدرس 1-1)

56) $\frac{15a^2b^2}{21ac} \cdot \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$

57) $\frac{14c^2f^5}{qa^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$

58) $\frac{3a^2+6a+3}{a^2\text{-}3a\text{-}10} \div \frac{12a^2\text{-}12}{a^2\text{-}4}$

أوجد مجموع حدود كلِّ متسلسلة مما يأتي:

59) $8 + 8 + 13 + \ldots + 58$ (الدرس 2-2)

60) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$ (الدرس 2-4)

4-2 الزوايا وقياساتها
Angles and Angle Measure

فيما سبق:
درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات. الدرس (4-1)

والآن:
- أرسم زوايا في الوضع القياسي، وأجد قياساتها.
- أحوّل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

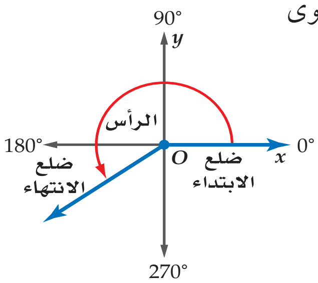
المفردات:
- الوضع القياسي standard position
- ضلع الابتداء initial side
- ضلع الانتهاء terminal side
- الراديان radian
- الزاوية المركزية central angle
- طول القوس arc length

لماذا؟

المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت نهارًا من خلال الظلّ الذي تسقطه على قرص مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظلّ على القرص $15°$ كلَّ ساعة.

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل، وأحد ضلعيها منطبقًا على الجزء الموجب من المحور x.

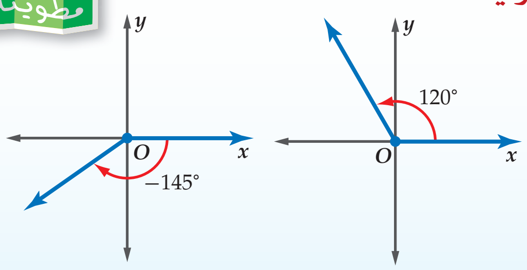
- يُسمّى الضلع المنطبِق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.



مفهوم أساسي: قياسات الزوايا

أضف إلى مطويتك

يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.



مثال 1 رسم زاوية في الوضع القياسي

ارسم كلًّا من الزاويتين المُعطى قياساهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

a) $215°$ b) $-40°$

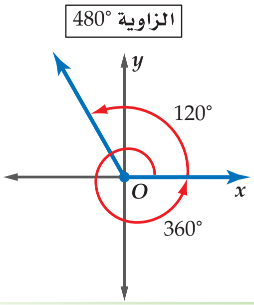
تحقق من فهمك

1A) $80°$ 1B) $-105°$

يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة.

فعلى سبيل المثال:

دورة كاملة مقدارها $360°$ إضافة إلى دورة بمقدار $120°$ تشكّلان زاوية قياسها $480° = 360° + 120°$



الربط بالحياة

التزلُّج المائي رياضة يضع فيها المتزلّج زلّاجة من الزجاج الليفي، أو من أنواع مختلفة من الخشب في قدميه، ويتم سحبه فوق الماء بواسطة زورق ذي محرّك سريع.

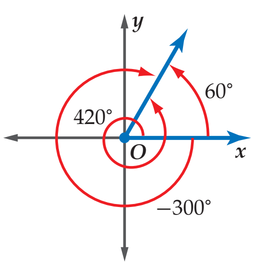
مثال 2 من واقع الحياة — رسم زاوية في الوضع القياسي

التزلُّج المائي: يتضمّن التزلُّج المائي أن يقوم المتزلّج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء في أثناء تنفيذه هذه الرياضة. إذا تضمّنت إحدى المناورات الدوران بمقدار $540°$ في الهواء، فارسم زاوية قياسها $540°$ في الوضع القياسي.

تحقق من فهمك

2) **عجلات:** أوقف سعيد درّاجته، فتحرَّكت عجلتاها بزاوية قياسها $600°$، ارسم زاوية قياسها $600°$ في الوضع القياسي.

عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: $-300°$, $420°$, $60°$ كما هو موضَّح في الشكل المجاور.



يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات $360°$.

- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$

مثال 3 — إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

a) $130°$

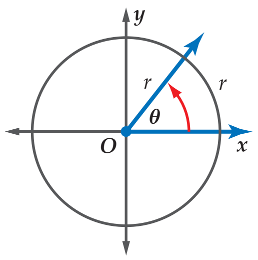
b) $-200°$

تحقق من فهمك

3A) $15°$ **3B)** $-45°$

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس:

يمكن أن تقاس الزوايا أيضًا بوحدات تستند إلى طول قوس من دائرة. فقياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدّد على الدائرة قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة هو 1 **راديان** (rad)



$\theta = 1$ راديان

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $2\pi\,\text{rad} = 360°$ ، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$2\pi\,\text{rad} = 360° \text{ أي أن } \pi\,\text{rad} = 180°$$

إرشادات للدراسة

القياس بالراديان

كما في القياس بالدرجات، فإن القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.

- قياس زاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان الدوران عكس حركة عقارب الساعة.
- قياس زاوية بالراديان يكون سالبًا إذا كان الدوران مع حركة عقارب الساعة.

مفهوم أساسي — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\dfrac{\pi\ \text{rad}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\dfrac{180°}{\pi\ \text{rad}}$

مثال 4 — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

a) $-30°$

b) $\dfrac{5\pi}{2}$

قراءة الرياضيات

القياس بالراديان

كلمة راديان أو rad تُحذف عادة عندما يتمُّ التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. ومن هنا فعندما لا نضع وحدة لقياس مُعطى لزاوية تكون الوحدة هي الراديان.

✓ **تحقق من فهمك**

4A) $120°$

4B) $-\dfrac{3\pi}{8}$

ملخّص المفهوم — القياس بالدرجات وبالراديان

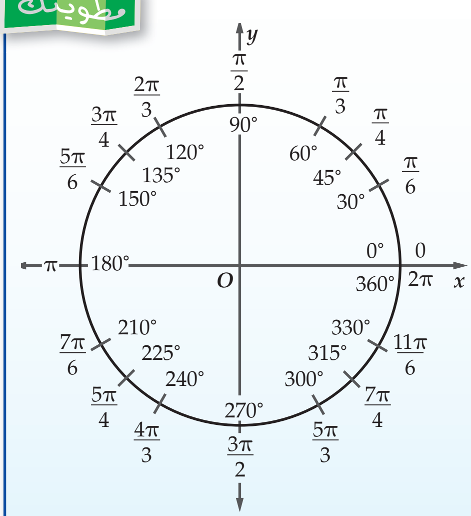
أضف إلى مطويتك

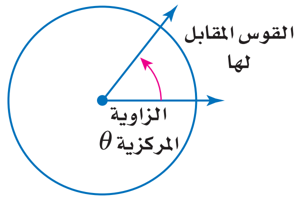
يُظهر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصّة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصّة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$$45° = \frac{\pi}{4} \qquad 30° = \frac{\pi}{6}$$

$$90° = \frac{\pi}{2} \qquad 60° = \frac{\pi}{3}$$





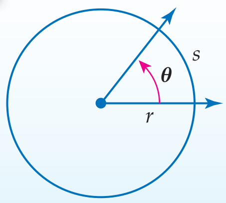
الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.

مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$



سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال (48)

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد طول القوس

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in، ما المسافة بالقدم التي يقطعها الإطار بعد أن تدور إطارات الشاحنة ثلاثة أرباع دورة؟

تنبيه

طول القوس
تذكَّر أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجات عندما تحسب طول القوس. وتذكَّر أيضًا أن الدورة الكاملة تساوي 2π راديان.

تحقق من فهمك

5) **مطاعم:** يقع في أعلى برج الخرج مطعم دوَّار، نصف قطره 90 ft، حيث يدور الجناح المخصَّص لتقديم الطعام والقريب من النوافذ الخارجية دورة كاملة كل 90 دقيقة. إذا ذهب شخص للمطعم لتناول العشاء وجلس على طاولة بجانب النافذة عند الساعة 6:42 مساءً وانتهى عند الساعة 8:00 مساءً، فما المسافة التي دارها؟

تأكـد

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

1) $140°$ 2) $-60°$ 3) $390°$

مثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

4) $25°$ 5) $175°$ 6) $-100°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممَّا يأتي:

7) $\frac{\pi}{4}$ 8) $225°$ 9) $-40°$

مثال 5 10) **تنس طاولة:** تحرَّك لاعب تنس طاولة في مسار على شكل قوسٍ من دائرة. إذا كان طول نصف قطر دائرته هو 1.2 m، وزاوية دوران اللاعب تساوي $100°$، فما طول هذا القوس، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 ,1 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

(11 $75°$ **(12** $160°$ **(13** $-90°$

(14 $-120°$ **(15** $295°$ **(16** $510°$

(17 **جمباز:** يتأرجح لاعب جمباز على جهاز له عارضتان، ليدور بزاوية قياسها $240°$. ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

مثال 3 في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

(18 $50°$ **(19** $95°$ **(20** $205°$

(21 $350°$ **(22** $-80°$ **(23** $-195°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان ، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

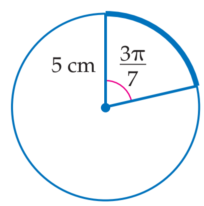
(24 $330°$ **(25** $\frac{5\pi}{6}$ **(26** $-\frac{\pi}{3}$

(27 $-50°$ **(28** $190°$ **(29** $-\frac{7\pi}{3}$

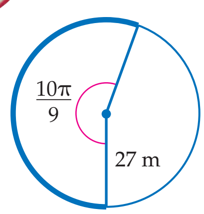
مثال 5 **(30** **رياضة:** درّاجة ذات عجلة واحدة نصف قطرها 0.8 ft، ما المسافة التي تقطعها العجلة إذا دارت $\frac{1}{4}$ دورة؟

أوجد طول القوس المحدد في كلٍّ من الدائرتين الآتيتين، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(31



(32



(33 **ساعات:** كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق في ساعة ليدور بزاوية قياسها 2.5π راديان؟

(34 **المزولة:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية هذا الدرس، نجد أن الظلّ يدور على القرص $15°$ كلَّ ساعة.

a) بعد كم ساعة يدور الظلُّ بزاوية قياسها $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟

b) ما قياس الزاوية بالراديان التي يدورها الظلّ بعد مرور 5 ساعات؟

c) مزولة طول نصف قطرها 8 in ، ما طول القوس الذي يصنعه دوران الظلِّ على حافة القرص بعد مرور 14 ساعة، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

الربط بالحياة

استُعملت المزولة قديمًا في المسجد الأقصى لمعرفة أوقات الصلاة.

في كلٍّ ممّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

(35 $620°$ **(36** $-400°$ **(37** $-\frac{3\pi}{4}$ **(38** $\frac{19\pi}{6}$

(39 **تمثيلات متعدِّدة:** لديك النقطتان $C(6, 0), D(6, 8)$.

a) **هندسيًّا:** ارسم المثلّث $\triangle ECD$ حيث E هي نقطة الأصل.

b) **جبريًّا:** أوجد ظلَّ $\angle CED$.

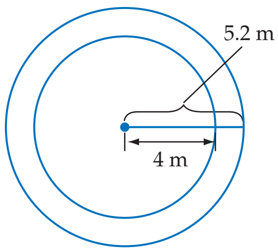
c) **جبريًّا:** أوجد ميل $\overline{ED}$.

d) **لفظيًّا:** ما العلاقة التي تستطيع استنتاجها بين الميل وظلِّ الزاوية؟

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

(40 $\frac{21\pi}{8}$ (41 $124°$ (42 $-200°$ (43 5

(44 **أحصنة دوّارة :** في مدينة ألعاب، تدور لعبة الأحصنة في دائرتين، الأولى داخلية طول نصف قطرها $4\,m$، والثانية خارجية طول نصف قطرها $5.2\,m$. إذا كانت الأحصنة تدور 5 دورات في الدقيقة، فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

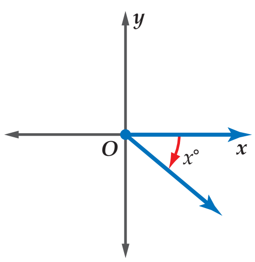


a) أوجد قياس الزاوية θ بالراديان التي يدورها حصان في ثانية واحدة.

b) كم يزيد طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الخارجية على طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الداخلية، وذلك بعد مرور ثانية واحدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(45 **اكتشف الخطأ :** كتب كلٌّ من عليٍّ وأحمد عبارة تُمثّل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور. من منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.



علي	أحمد
$(x - 360)°$	$(360 - x)°$

(46 **تحدٍّ :** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع الجزء الموجب من المحور x عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة هذا المستقيم.

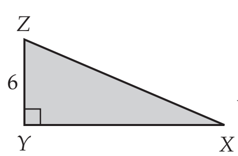
(47 **مسألة مفتوحة :** ارسم زاوية حادّة في الوضع القياسي وسمِّها. وأوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، بحيث تكونان مشتركتين في ضلع الانتهاء مع هذه الزاوية.

(48 **برهان :** برهن صيغة طول القوس المقابل للزاوية المركزية.

تدريب على اختبار

(49 إذا كان $(x+6)(x+8) - (x-7)(x-5) = 0$، فأوجد قيمة x .

(50 **هندسة :** إذا كانت مساحة المثلَّث المجاور 60 وحدة مربّعة، فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟

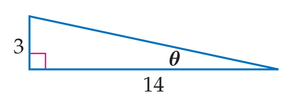


A $2\sqrt{34}$ B $4\sqrt{109}$ C $2\sqrt{109}$ D $4\sqrt{34}$

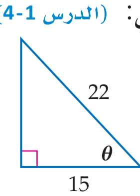
مراجعة تراكمية

أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 1-4)

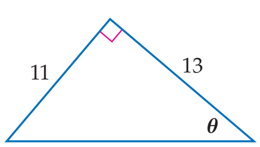
(51



(52



(53



حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي: (الدرس 6-1)

(54 $a + 1 = \frac{6}{a}$ (55 $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$ (56 $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر في المثلّثات القائمة الزاوية التي طول كلٍّ من ساقيها كما يأتي: (مهارة سابقة)

(57 $a = 12, b = 15$ (58 $a = 8, b = 17$ (59 $a = 14, b = 11$

4-3 الدوالّ المثلَّثية للزوايا
Trigonometric Functions of Angles

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة. الدرس (1-4)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيِّ زاوية.
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية.

المفردات:

الزاوية الربعية
quadrantal angle

الزاوية المرجعية
reference angle

لماذا؟

تنتشر العجلة الدوّارة في كُبْريات مدن الألعاب. ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من $90°$.

الدوالّ المثلَّثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا قياساتها تزيد على $90°$ أو تقلُّ عن $0°$.

مفهوم أساسي — الدوالّ المثلَّثية للزوايا

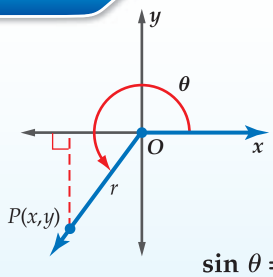
أضف إلى

لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثّل البُعد بين نقطة الأصل والنقطة P.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوالّ المثلَّثية الستُّ للزاوية θ معرَّفة كما يأتي:

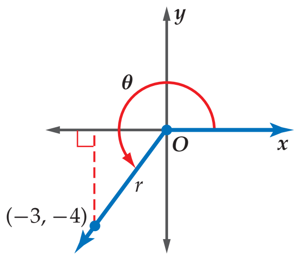
$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$ $\quad$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\sin \theta = \frac{y}{r}$

$\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$ $\quad$ $\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\quad$ $\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$



مثال 1 — إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية بمعلومية نقطة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-3, -4)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.



تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-6, 2)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن الزاوية θ تُسمّى **زاوية ربعية**.

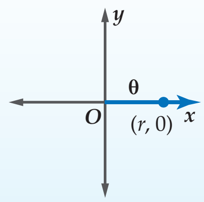
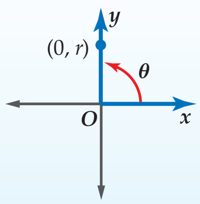
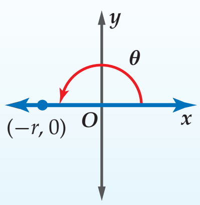
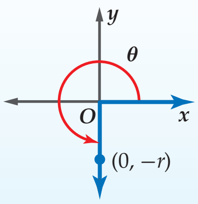
إرشادات للدراسة

الزوايا الربعية

قياس أيِّ زاوية ربعية هو من مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

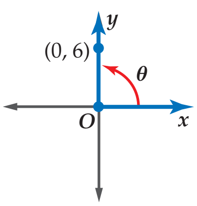
مفهوم أساسي: الزوايا الربعية

أضف إلى مطويتك

$\theta = 0°$ أو $\theta = 0\ rad$	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi$ rad	$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad
			

مثال 2 الزوايا الربعية

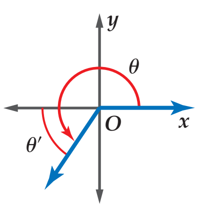
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(0, 6)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية السّتِّ للزاوية θ.



تحقق من فهمك

2) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-2, 0)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية السّتِّ للزاوية θ.

الدوالّ المثلّثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ' هي الزاوية الحادّة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يبيِّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.



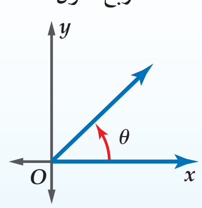
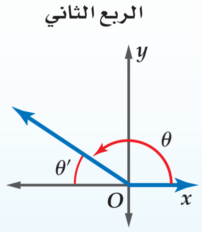
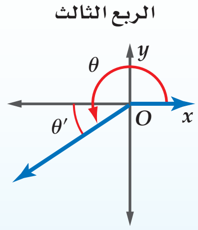
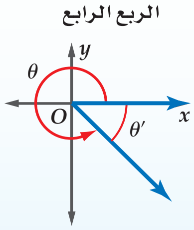
قراءة الرياضيات

الرمز θ'

θ' يُقرأ: ثيتا شرطة.

مفهوم أساسي: الزوايا المرجعية

أضف إلى مطويتك

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$، استعمل زاوية بقياس موجب محصور بين $0°, 360°$ ومشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ.

مثال 3 إيجاد الزوايا المرجعية

ارسم كلًّا من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

a) $210°$

b) $-\frac{5\pi}{4}$

تحقق من فهمك

3A) $-110°$

3B) $\frac{9\pi}{3}$

إرشادات للدراسة

رسم الزوايا في الوضع القياسي

يمكنك الرجوع إلى الشكل الموجود في ملخّص المفهوم في الدرس 2-4؛ لمساعدتك على رسم الزوايا في الوضع القياسي.

إرشادات للدراسة

الدورة الكاملة $[0°, 360°]$

لإيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ ، وقياسها موجب محصور بين $0°, 360°$:

- إذا كانت θ أكبر من $360°$، فاطرح منها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.
- إذا كانت θ أصغر من $0°$، فأضف إليها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.

لإيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيِّ زاوية θ، يمكنك استعمال الزوايا المرجعية وتُحدّد إشارة كلِّ دالّة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

مفهوم أساسي إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ'.

الخطوة 3: حدِّد إشارة قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta: +$	$\sin\theta, \csc\theta: +$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: -$	$\tan\theta, \cot\theta: +$
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta: -$	$\sin\theta, \csc\theta: -$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: +$	$\tan\theta, \cot\theta: -$

يمكنك استعمال قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ التي تعلّمتها في الدرس 1-4.

قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الخاصّة

الجيب	جيب التمام	الظلّ	قاطع التمام	القاطع	ظلّ التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال 4 استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالّة مثلَّثية

أوجد القيمة الدقيقة للدالّة المثلَّثية في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) $\cos 240°$

b) $\csc \frac{5\pi}{6}$

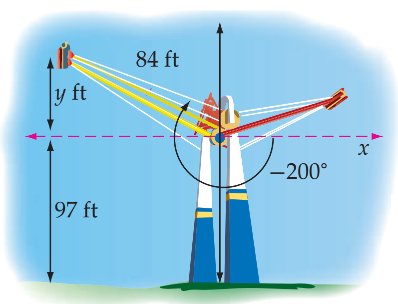
تحقق من فهمك

4A) $\cos 135°$

4B) $\tan \frac{5\pi}{6}$

مثال 5 من واقع الحياة استعمال الدوالّ المثلَّثية

أراجيح: إذا كان طول كلِّ ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور 84 ft، وارتفاع محور الدوران 97 ft، فأوجد الارتفاع الكليَّ لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضَّح في الشكل.



الربط بالحياة

في بعض أنواع الأراجيح الدوّارة يشعر الراكب بانعدام الوزن في لحظة ما، حيث تصل سرعة الأرجوحة إلى 60 ميلًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

تحقق من فهمك

5) **أراجيح:** أوجد الارتفاع الكليّ لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذه الذراع 72 ft، وارتفاع محور الدوران 88 ft، وقياس زاوية الدوران $-195°$

تأكـد

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ :

1) $(1, 2)$ 2) $(-8, -15)$ 3) $(0, -4)$

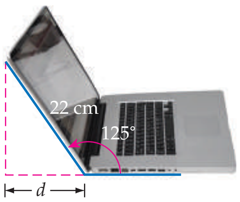
مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

4) $300°$ 5) $115°$ 6) $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية فيما يأتي:

7) $\sin \frac{3\pi}{4}$ 8) $\tan \frac{5\pi}{3}$ 9) $\sec 120°$ 10) $\sin 300°$

مثال 5 11) **تقنية:** فتح سعيد حاسوبه المحمول الذي طول شاشته 22 cm، فشكّل زاوية قياسها $125°$ كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.



a) أعد رسم الشكل السابق في المستوى الإحداثيِّ بحيث تكون الزاوية $125°$ مرسومة في الوضع القياسي.

b) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية $125°$ ، ثم اكتب دالّة مثلَّثية يمكن استعمالها في إيجاد d.

c) استعمل هذه الدالّة، لإيجاد قيمة d، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

12) $(5, 12)$ 13) $(-6, 8)$ 14) $(3, 0)$

15) $(0, -7)$ 16) $(4, -2)$ 17) $(-9, -3)$

مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها.

18) $195°$ 19) $285°$ 20) $-250°$

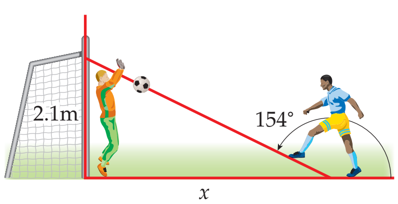
21) $\frac{7\pi}{4}$ 22) $-\frac{\pi}{4}$ 23) $400°$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية فيما يأتي:

24) $\sin 210°$ 25) $\tan 315°$ 26) $\cos 150°$ 27) $\csc 225°$

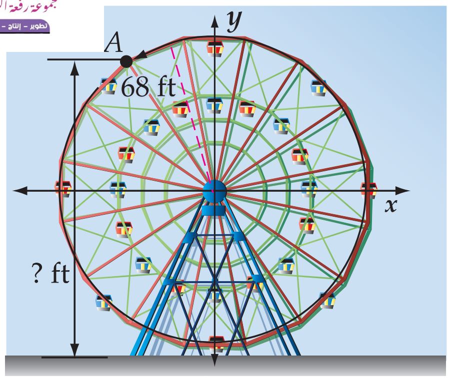
28) $\sin \frac{4\pi}{3}$ 29) $\cos \frac{5\pi}{3}$ 30) $\cot \frac{5\pi}{4}$ 31) $\sec \frac{11\pi}{6}$

مثال 5 32) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ الكرةَ نحو الهدف من مسافة x m عن حارس المرمى كما هو مبيَّن في الشكل المجاور، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع 2.1 m من سطح الأرض.



a) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية $154°$. ثم اكتب دالّة مثلَّثية يمكن استعمالها في إيجاد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة.

b) ما المسافة التقريبية بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة؟



33) عجلات دوّارة: في إحدى مدن الألعاب عجلة دوّارة طول نصف قطرها 68 ft، وترتفع عن سطح الأرض 15 ft. بعد جلوس الشخص في العربة السفلية دارت العجلة بزاوية قياسها $202.5°$ عكس حركة عقارب الساعة قبل أن تتوقف. فكم يكون ارتفاع هذه العربة عن سطح الأرض عندما تتوقف العجلة عن الدوران؟

افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وقد أُعطي فيما يأتي قيمة إحدى الدوالّ المثلّثية للزاوية θ والربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها. أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الخمس الأخرى للزاوية θ.

34) $\sin\theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

35) $\tan\theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

36) $\cos\theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

37) $\cot\theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

38) $\cot 270°$

39) $\csc 180°$

40) $\sin 570°$

41) $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

42) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

43) $\cot\frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **تحدٍّ:** الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، حيث $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta = -1$. هل من الممكن أن يكون قياس الزاوية θ مساويًا لـِ $225°$؟ وضِّح إجابتك.

45) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة: $3\sin 60° = \sin 180°$ صحيحة أم غير صحيحة. وضِّح إجابتك.

46) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على زاوية θ بقياس سالب بحيث: $\sin\theta > 0, \cos\theta < 0$.

47) **اكتب:** وضِّح خطوات إيجاد قيمة دالّة مثلّثية لزاوية قياسها أكبر من $90°$. مضمِّنًا ذلك وصفًا للزاوية المرجعية في هذه الخطوات.

تدريب على اختبار

48) إذا كان مجموع عددين 21، والفرق بينهما 3، فما ناتج ضربهما؟

49) ما المقدار الذي يكافئ المقدار: $(-6 + i)^2$؟

A $-12i$ B $36 - 12i$ C $36 - i$ D $35 - 12i$

مراجعة تراكمية

حوّل قياس كلِّ زاوية مكتوبة بالراديان فيما يأتي إلى الدرجات: (الدرس 2-4)

50) $\frac{4}{3}\pi$

51) $\frac{11}{6}\pi$

52) $-\frac{17}{4}\pi$

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية علمًا بأن جميع الزوايا حادّة: (الدرس 1-4)

53) $\cos A = \frac{13}{17}$

54) $\sin 30° = \frac{b}{6}$

55) $\tan C = \frac{9}{4}$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 6-1)

56) $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$

57) $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$

58) $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$

4-4 قانون الجيوب
Law of Sines

فيما سبق:

درست إيجاد أطوال أضلاع مثلّثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها. الدرس (1-4)

والآن:

- أجد مساحة مثلّث باستعمال طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أستعمل قانون الجيوب في حلِّ المثلّثات.

المفردات:

قانون الجيوب
Law of Sines

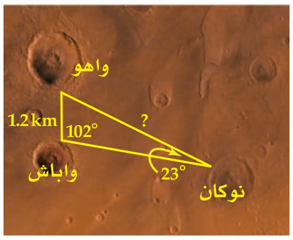
حل المثلّث
solving a triangle

رابط الدرس الرقمي

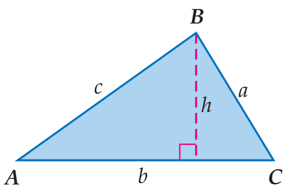
www.ien.edu.sa

لماذا؟

يوجد على سطح كوكب المريخ عشرات الآلاف من الفوّهات أو الحفر، وقد أطلق عليها العلماء تسميات عديدة لعلماء مشهورين وأسماء مدن ومؤلِّفي قصص علمية خيالية. والشكل المجاور يبيِّن ثلاثًا من هذه الفوّهات. يمكنك استعمال حساب المثلّثات في إيجاد المسافة بين الفوهتين واهو ونوكان.



إيجاد مساحة المثلّث: في المثلّث المجاور $\sin A = \frac{h}{c}$ أي أنَّ $h = c \sin A$.



المساحة $= \frac{1}{2} bh$ صيغة مساحة المثلّث

المساحة $= \frac{1}{2} b(c \sin A)$ عوِّض عن h بـ $c \sin A$

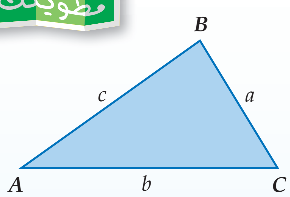
المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A$ بسِّط

يمكنك استعمال هذه الصيغة أو صيغتين أخريين لإيجاد مساحة مثلَّث، إذا كان معلومًا لديك طولا أيِّ ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مفهوم أساسي — مساحة المثلّث

أضف إلى مطويتك

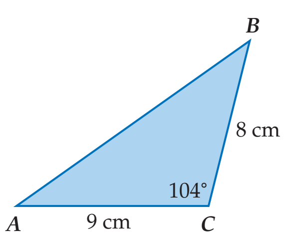
التعبير اللفظي: مساحة المثلَّث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولَي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.



الرموز: $k = \frac{1}{2} bc \sin A$ $\quad$ $k = \frac{1}{2} ac \sin B$ $\quad$ $k = \frac{1}{2} ab \sin C$

مثال 1 — إيجاد مساحة مثلَّث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.



تحقق من فهمك

1) أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31°$, $b = 18\,m$, $c = 22\,m$ مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلَّث في اشتقاق **قانون الجيوب**، الذي يبيِّن العلاقات بين أطوال أضلاع مثلَّث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$ اكتب صيغ مساحة المثلَّث الثلاث المتساوية

$$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$$ اضرب كلَّ عبارة في 2

$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$ اقسم كلَّ عبارة على abc

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$ بسِّط

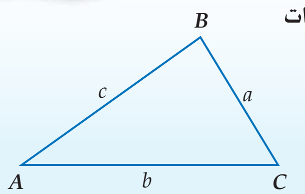
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون الجيوب

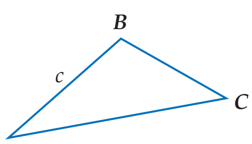
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

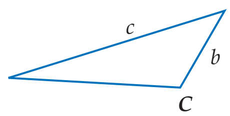


حَلُّ المثلَّث يعني استعمال القياسات المُعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلَّث وقياس زواياه.

ويمكنك استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّث في الحالات الآتية:



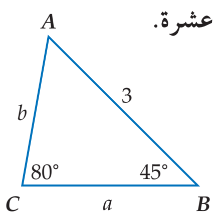
- معرَّفة قياسي زاويتين في المثلَّث وطول أي ضلع فيه (زاوية – زاوية – ضلع (حالة AAS)، أو زاوية – ضلع – زاوية (حالة ASA))



- معرَّفة طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (ضلع – ضلع – زاوية (حالة SSA))

مثال 2 حَلُّ مثلَّث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

حُلَّ $\triangle ABC$، الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



إرشادات للدراسة

علاقات بديلة

يمكن كتابة قانون الجيوب كما يأتي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبذلك يمكنك استعمال العلاقتين الآتيتين لحلِّ المثلَّث في المثال 2

$$\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

$$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

تحقق من فهمك

2) حُلَّ $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 42°, Q = 65°, n = 5$، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.

إذا عُلِمَ لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع، فإنه يوجد مثلَّث وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولَي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلَّثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلَّث حلّ، أو له حلٌّ واحد، أو له حلان.

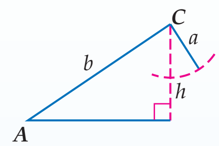
مفهوم أساسي

المثلَّثات الممكنة في حالة (SSA)

أضف إلى مطويتك

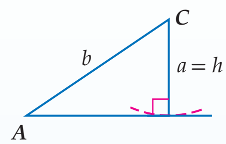
افترض مثلَّثا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

$\angle A$ حادّة



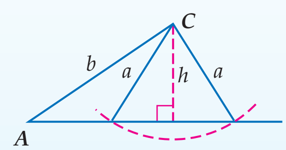
$a < h$

لا يوجد حلٌّ



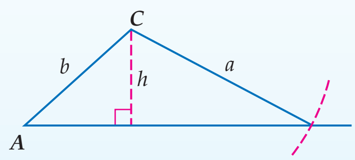
$a = h$

حلٌّ واحد



$h < a < b$

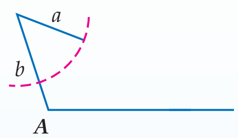
حلّان



$a \geq b$

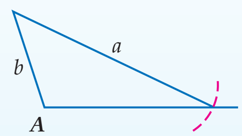
حلٌّ واحد

$\angle A$ قائمة أو منفرجة



$a \leq b$

لا يوجد حلٌّ



$a > b$

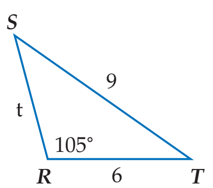
حلٌّ واحد

بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$، فيمكنك استعمال الصيغة $h = b \sin A$ لإيجاد قيمة h في المثلَّثات الحادّة الزوايا.

مثال 3 حَلُّ مثلَّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدِّد إن كان لكلِّ مثلَّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105°, r = 9, s = 6$.



إرشادات للدراسة

الحالة المبهمة

الحالة التي يكون للمثلَّث فيها حلان تُسمَّى الحالة المبهمة.

إرشادات للدراسة

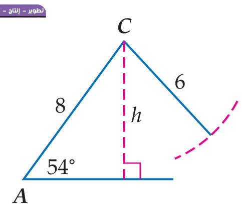
الزاوية A حادّة

في الجهة اليمنى من الأشكال المجاورة. الارتفاع h يقارن مع a لأن h هو أقصر بعد من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادّة.

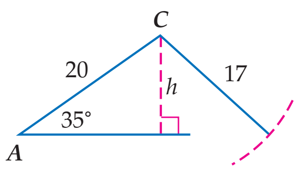
$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin A = \frac{h}{b}$

b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54°, a = 6, b = 8$.



c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 35°, a = 17, b = 20$.



إرشادات للدراسة

حلّان

في الفرع C، بما أن $h < a < b$ فإن للمثلّث حلّين أحدهما عندما تكون الزاوية B حادّة، والآخر عندما تكون الزاوية B منفرجة (مكمّلة للزاوية الحادّة في الحلّ الأول).

إرشادات للدراسة

الزاوية المرجعية

في الحالة الثانية استعملت زاوية مرجعية قياسها $42°$ لإيجاد القياس الآخر للزاوية B .

تحقق من فهمك

حدِّد إن كان لكل مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95°, r = 10, s = 12$

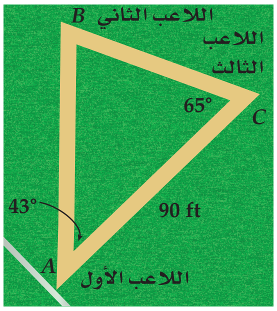
3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32°, n = 7, p = 4$

3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47°, a = 15, b = 18$

مثال 4 من واقع الحياة

استعمال قانون الجيوب لحل مسألة

كرة قدم: يُمثّل الشكل المجاور إحدى التمريرات الحاسمة بين ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.



الربط بالحياة

يقع إستاد الملك فهد الدولي بالجهة الشمالية الشرقية من مدينة الرياض على مساحة إجمالية تبلغ 500 000 متر مربع ، ويتكون من مبنى اللاعبين وملعب كرة القدم العشبي وملحقاته الخدمية ومضمار للجري ولألعاب القوى وقناة الحماية والمدرجات ومقاعد الجمهور .

المصدر : الهيئة العامة للرياضة

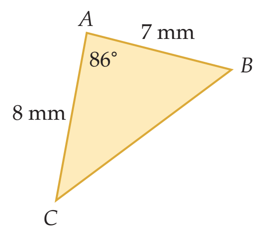
تحقق من فهمك

4) **كرة قدم:** أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني في الشكل أعلاه.

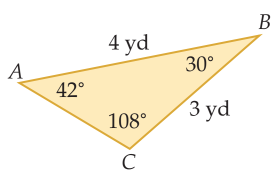
تأكـد

مثال 1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

1)



2)

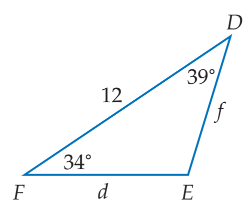


3) $A = 40°, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

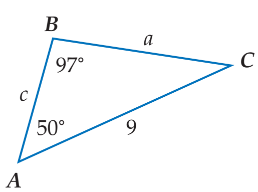
4) $B = 103°, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in}$

مثال 2 حُلّ كلَّ مثلَّث مما يأتي، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:

5)



6)



7) $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 80°, H = 40°, g = 14$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

8) $A = 95°, a = 19, b = 12$

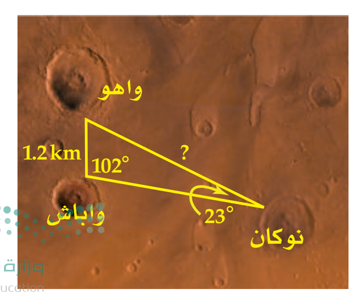
9) $A = 60°, a = 15, b = 24$

10) $A = 34°, a = 8, b = 13$

11) $A = 30°, a = 3, b = 6$

مثال 4

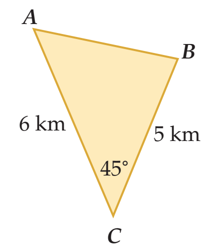
12) **فضاء:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين فوّهة واهو وفوّهة نوكان.



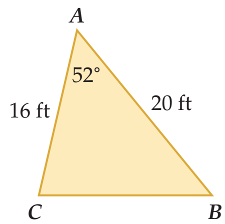
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد مساحة كلٍّ من المثلّثات الموضّحة في الأشكال الآتية مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة:

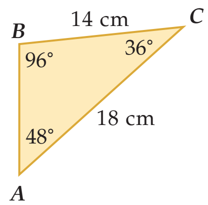
(13



(14



(15



(16 $C = 25°, a = 4 \text{ ft}, b = 7 \text{ ft}$

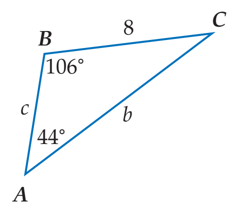
(17 $A = 138°, b = 10 \text{ in}, c = 20 \text{ in}$

(18 $B = 92°, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$

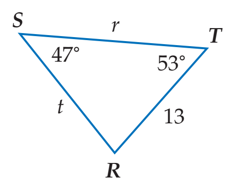
(19 $C = 116°, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$

مثال 2 حُلّ كلَّ مثلّث ممّا يأتي مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

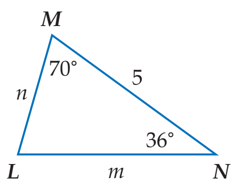
(20



(21



(22



(23 $\triangle HJK$ الذي فيه: $H = 53°,\ J = 20°,\ h = 31$.

(24 $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 109°,\ Q = 57°,\ n = 22$.

(25 $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 50°,\ a = 2.5,\ C = 67°$.

(26 $\triangle ABC$ الذي فيه: $B = 18°,\ C = 142°,\ b = 20$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلّث ABC في كلٍّ ممّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(27 $A = 100°, a = 7, b = 3$

(28 $A = 75°, a = 14, b = 11$

(29 $A = 38°, a = 21, b = 18$

(30 $A = 52°, a = 9, b = 20$

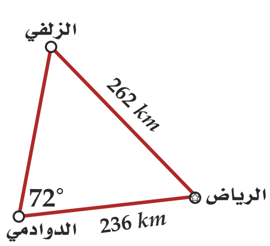
(31 $A = 42°, a = 5, b = 6$

(32 $A = 44°, a = 14, b = 19$

(33 $A = 131°, a = 15, b = 32$

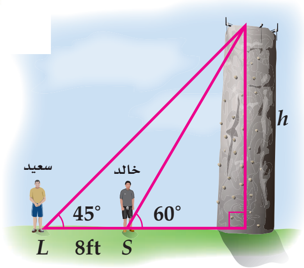
(34 $A = 30°, a = 17, b = 34$

مثال 4 **جغرافيا:** في الشكل المجاور ثلاثة مواقع جغرافية تشكِّل مثلّثًا. إذا كانت المسافة بين الرياض والدوادمي 236 km، وبين الرياض والزلفي 262 km، وقياس الزاوية عند الدوادمي °72، فأجب عما يأتي:



(35 أوجد قياس الزاوية عند مدينة الرياض.

(36 أوجد المسافة بين الزلفي والدوادمي.



37) **تسلُّق:** يقف خالد وسعيد أمام جدار صخري للتسلُّق والمسافة بينهما 8 أقدام كما هو مبيّن في الشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخري، مقرّبًا إلى أقرب قدم؟

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **اكتشف الخطأ:** $\triangle RST$ فيه: $R = 56°, r = 24, t = 12$. فإذا حاول كلٌّ من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$، فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.

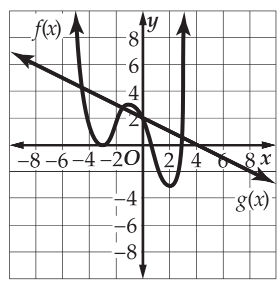
رضوان	علي
$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$ $\sin T \approx 0.4145$ $T \approx 24.5°$	بما أن $r > t$ فلا يوجد للمثلّث حلّ.

39) **تبرير:** أوجد أطوال أضلاع مثلّثين مختلفين ABC، بحيث يكون في كلٍّ منها $A = 55°$ ،$C = 20°$.

40) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت $d = 38$ ، $R = 62°$، فأوجد قيمة لِـ r، بحيث لا يوجد للمثلّث DRF حلّ عندها . ووضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

41) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور التمثيل البياني لكلٍّ من $f(x), g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$؟



42) إذا كان أحد أصفار الدالّة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو 4. فأيٌّ مما يأتي يُمثّل تحليلًا للعبارة: $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

A $(x-6)(x+3)(x+4)$

B $(x-6)(x+3)(x-4)$

C $(x+6)(x+3)(x-4)$

D $(x+12)(x-1)(x-4)$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي: (الدرس 3-4)

43) $\sin 210°$ 44) $\cos \frac{3}{4}\pi$ 45) $\cot 60°$

في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كلِّ زاوية مُعطاة: (الدرس 2-4)

46) $125°$ 47) $-32°$ 48) $\frac{2}{3}\pi$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية (إن وجد): (الدرس 4-2)

49) $64 + 48 + 36 + \ldots$ 50) $27 + 36 + 48 + \ldots$ 51) $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5(1.1)^n$

إذا كانت $w = 6, x = -4, y = 1.5, z = \frac{3}{4}$، فأوجد قيمة كلِّ عبارة ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

52) $w^2 + y^2 - 6xz$ 53) $x^2 + z^2 + 5wy$ 54) $wy + xz + w^2 - x^2$

توسـع **4-4** معمل الهندسة

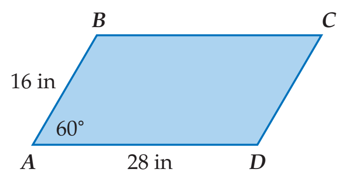
مساحة متوازي الأضلاع
Area of Parallelogram

الهدف أستعمل نسبة الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

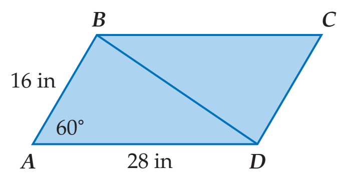
يمكنك إيجاد مساحة أيّ مثلَّث باستعمال الجيب. وكذلك يمكنك استعمال الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

نشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



الخطوة 1: ارسم القطر $\overline{BD}$.



يقسم القطر $\overline{BD}$ متوازي الأضلاع إلى مثلَّثين متطابقين هما: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

الخطوة 2: أوجد مساحة $\triangle ABD$.

$K = \frac{1}{2}(AB)(AD)\sin A$ صيغة مساحة المثلَّث

$= \frac{1}{2}(16)(28)\sin 60°$ $AB = 16, AD = 28, A = 60°$

$= 224\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ اضرب وعوِّض قيمة $\sin 60°$

$= 112\sqrt{3}$ بسِّط

الخطوة 3: أوجد مساحة $\square ABCD$.

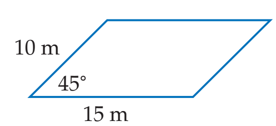
مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتَي المثلَّثين: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

وبما أن $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ، فإن مساحة $\triangle CDB$ تساوي مساحة $\triangle ABD$.

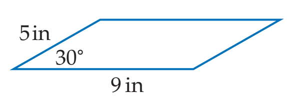
لذا فإن مساحة $\square ABCD$ تساوي مثلَي مساحة $\triangle ABD$. أي $2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3} \approx 387.98\ \text{in}^2$

تمارين:

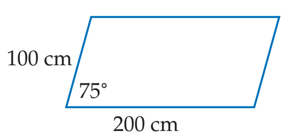
(1



(2



(3



أوجد كلًّا ممّا يأتي لكلِّ متوازي أضلاع أعلاه:

a) المساحة.

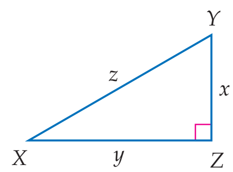
b) المساحة عندما يصبح قياس الزاوية المعلومة نصف القياس المُعطى.

c) المساحة عندما يكون قياس الزاوية المعلومة مثلي القياس المُعطى.

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-4 إلى 4-4

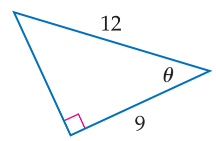
حُلّ $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين: 2 ,1 وفق القياسات المُعطاة، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



1) $Y = 65°, x = 16$

2) $X = 25°, x = 8$

3) أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ



4) ارسم زاوية قياسها $-80°$ في الوضع القياسي.

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

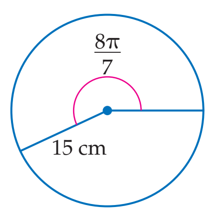
5) $215°$

6) $-350°$

7) $\frac{8\pi}{5}$

8) $\frac{9\pi}{2}$

9) **اختيار من متعدد:** طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة أدناه، مقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة يساوي:



A 4.2 cm

B 17.1 cm

C 53.9 cm

D 2638.9 cm

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من الدالّتين المثلّثيتين فيما يأتي:

10) $\tan \pi$

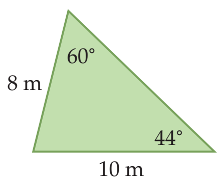
11) $\cos \frac{3\pi}{4}$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقطتين الآتيتين في كلِّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ:

12) $(0, -5)$

13) $(6, 8)$

14) **حديقة:** عند فيصل حديقة مثلَّثة الشكل كما في الشكل أدناه. ما مساحة الحديقة؟



حدّد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممَّا يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

15) $A = 38°, a = 18, c = 25$

16) $A = 65°, a = 5, b = 7$

17) $A = 115°, a = 12, b = 8$

في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

18) $240°$

19) $\frac{9\pi}{4}$

20) $-\frac{\pi}{4}$

21) **اختيار من متعدد:** افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos \theta > 0$. في أيِّ ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ؟

A الربع الأول أو الثاني

B الربع الأول أو الثالث

C الربع الثاني أو الثالث

D الربع الأول أو الرابع

4-5 قانون جيوب التمام
Law of Cosines

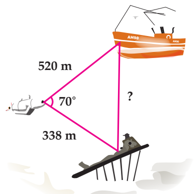
فيما سبق:
درست حلّ مثلَّثات باستعمال قانون الجيوب. الدرس (4-4)

والآن:
- أستعمل قانون جيوب التمام لحلِّ مثلَّثات.
- أختار طرقًا مناسبة لحلِّ مثلَّثات.

المفردات:
قانون جيوب التمام
Law of Cosines

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا؟



الغوّاصات التي تُنزلها السفن إلى المحيط تُستعمل لإيصال الأشخاص إلى أعماق لا يمكنهم الوصول إليها بوسائل أخرى. الغواصة في الشكل المجاور على بُعد 520 m من السفينة، وترسل ضوءًا إلى حطام سفينة أخرى على بُعد 338 m عنها، يمكن استعمال حساب المثلَّثات لإيجاد المسافة بين السفينة والحطام.

استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المثلَّثات: لا يمكنك استعمال قانون الجيوب لحلِّ مثلَّث مثل المثلَّث المرسوم في الشكل أعلاه. يمكنك استعمال **قانون جيوب التمام** لحل المثلَّث في الحالتين الآتيتين:

- معرَّفة طولي ضلعين في المثلَّث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع - زاوية - ضلع (حالة SAS))
- معرَّفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلَّث (ضلع - ضلع - ضلع (حالة SSS))

مفهوم أساسي — قانون جيوب التمام

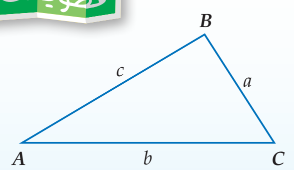
أضف إلى مطويتك

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

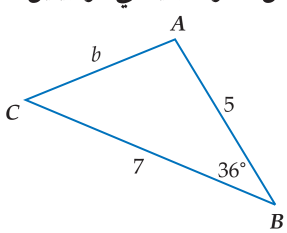
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



ستبرهن هذه الصيغة في السؤال (31)

مثال 1 حَلُّ مثلَّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حُلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.



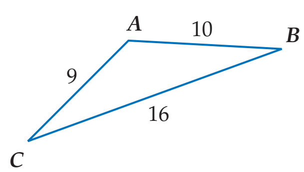
✓ تحقق من فهمك

1) حُلّ $\triangle FGH$ الموضَّح في الشكل المجاور الذي فيه: $G = 82°, f = 6, h = 4$ مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المثلَّث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة، وتكون الخطوة الأولى للحلِّ هي إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلَّث حتى نضمن أن الزاويتين الأخريين حادَّتان عند استعمال قانون الجيوب بعد ذلك.

مثال 2 حل مثلَّث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة

حُلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استعمال قانون جيوب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس زاوية أخرى.

إرشادات للدراسة

التقريب

يمكن أن يؤدي التقريب في بعض الأحيان إلى إجابات غير دقيقة، مثل أن يكون لدينا مثلَّث مجموع قياسات زواياه 181°.

✓ تحقق من فهمك

2) حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5, b = 11, c = 8$ مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

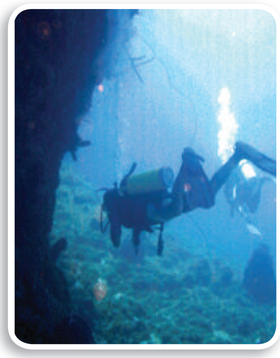
اختيار الطريقة المناسبة لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال قانون الجيوب وقانون جيوب التمام لحل مثلثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقلِّ إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسَي أيٍّ عنصرين آخرين من عناصر المثلَّث. وإذا كان للمثلَّث حلّ، فيجب أن تُقرّر ما إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام لحلِّه.

ملخّص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حَلُّ المثلَّثات غير القائمة الزاوية

إذا أُعطيت	فابدأ الحلَّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أيِّ ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

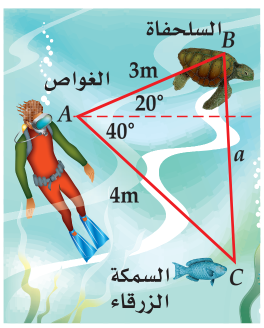


الربط بالحياة

الرقم القياسي لأعمق مسافة غاص إليها غوّاص هو 318.2 m .

مثال 3 من واقع الحياة استعمال قانون جيوب التمام

غوص: ينظر غواص إلى أعلى بزاوية قياسها $20°$ ليرى سلحفاة تبعد عنه 3 m، وينظر إلى أسفل بزاوية قياسها $40°$ فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4 m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟

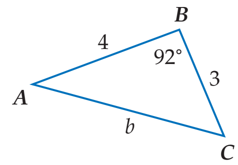


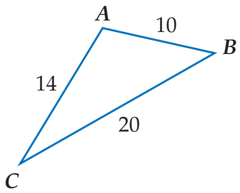
✓ تحقق من فهمك

3) **ماراثون:** ركض سعيد مسافة 6 km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها $79°$ ، وركض مسافة 7 km . ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟

تأكـد

المثالان 1, 2 حُلَّ كلَّ مثلّث ممّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

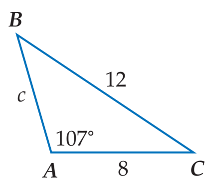
(1


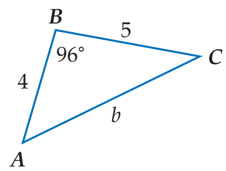
(2


(3 $a = 5, b = 8, c = 12$

(4 $B = 110°, a = 6, c = 3$

مثال 3 حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلِّ كلِّ مثلّث ممّا يأتي، ثم حُلَّ المثلّث مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(5


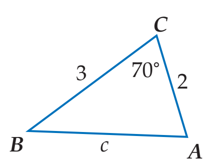
(6


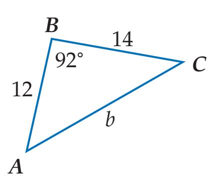
(7 $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 35°, s = 16, t = 9$.

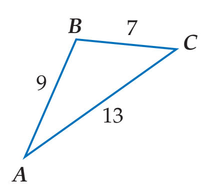
(8 **كرة قدم:** في إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بُعد 20 m من لاعب الجناح الأيمن. ودار لاعب خطّ الوسط بزاوية قياسها °40 ، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بُعد 16 m منه. ما المسافة بين لاعبي الجناحين؟

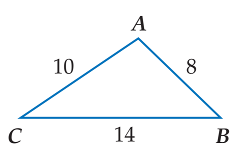
تدرب وحل المسائل

المثالان 1، 2 حُلَّ كلَّ مثلّث ممّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(9


(10


(11


(12


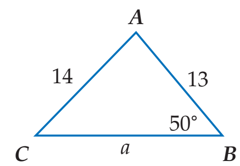
(13 $A = 116°, b = 5, c = 3$

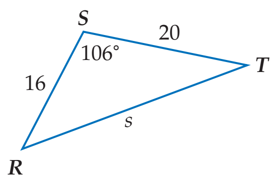
(14 $C = 80°, a = 9, b = 2$

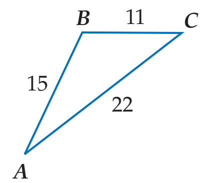
(15 $f = 10, g = 11, h = 4$

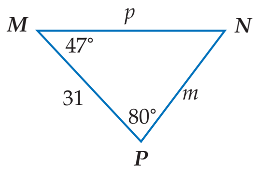
(16 $w = 20, x = 13, y = 12$

مثال 3 حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلِّ كلِّ مثلَّث ممَّا يأتي، ثم حُلَّ المثلَّث مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(17


(18


(19


(20


(21 $\triangle ABC$ الذي فيه: $C = 84°, c = 7, a = 2$.

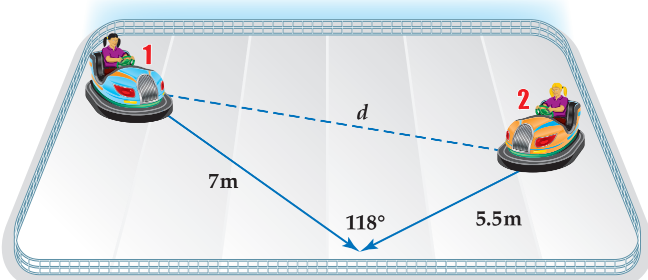
(22 $\triangle HJK$ الذي فيه: $h = 18, j = 10, k = 23$.

(23 **استكشاف:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الأخرى، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

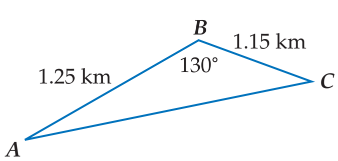
(24 **سباق:** ميدان للسباق على شكل مثلَّث أطوال أضلاعه $1.8\,km, 2\,km, 1.2\,km$. أوجد قياس كلِّ زاوية من زواياه.

(25 **أرض:** قطعة أرض على شكل مثلَّث أطوال أضلاعه $140\,m, 210\,m, 300\,m$. استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مقرّبةً إلى أقرب متر مربع.

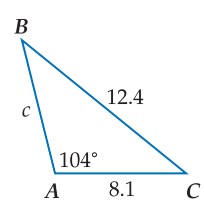
(26 **ألعاب سيارات:** في ساحة سيارات اللعب في مدينة ألعاب، اصطدمت السيارتان 1, 2 كما هو مبيَّن في الشكل أدناه، ما المسافة d التي كانت بين السيارتين قبل تصادمهما؟

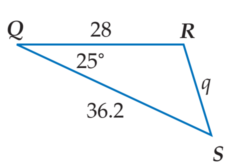


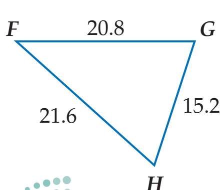
(27 **رياضة مائية:** يركب أحمد دراجته المائية ليقطع المسافة من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C بسرعة 28 كلم/ ساعة. ثم يعود من النقطة C إلى النقطة A مباشرة بسرعة 35 كلم/ ساعة. كم دقيقة تحتاج إليها الرحلة ذهابًا وإيابًا، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

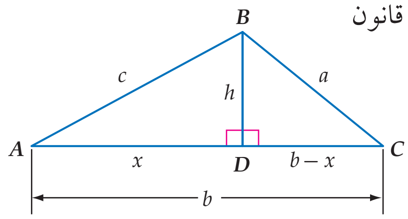
(28


(29


(30


مسائل مهارات التفكير العليا

31) **برهان:** استعمل الشكل المجاور ونظرية فيثاغورس، لاشتقاق قانون جيوب التمام، مستعملًا الإرشادات الآتية:



أولًا: طبّق نظرية فيثاغورس على $\triangle DBC$.

ثانيًا: استعمل المعلومات التالية في $\triangle ADB$.

- $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$

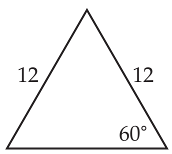
32) **تبرير:** مثلّث أطوال أضلاعه 10.6 cm, 8 cm, 14.5 cm . وضّح كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية الكبرى فيه. ثم أوجدها مقرّبة إلى أقرب درجة.

33) **اكتب:** قارن بين الحالات التي تستطيع فيها استعمال قانون الجيوب لحلِّ مثلّث بتلك التي تستطيع فيها استعمال قانون جيوب التمام.

تدريب على اختبار

34) **إجابة قصيرة:** حُلَّ المعادلة: $\frac{23}{6x} = \frac{5}{8} + \frac{1}{x-1}$

35) **هندسة:** محيط الشكل المجاور يساوي:



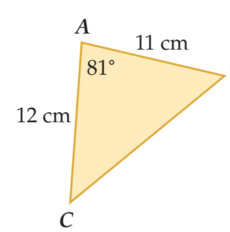
A 24 **C** 36

B 30 **D** 48

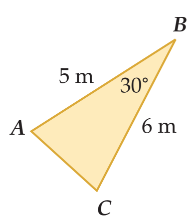
مراجعة تراكمية

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممّا يأتي مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس 4-4)

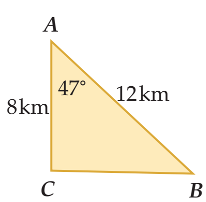
36)



37)



38)



39) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(6, -9)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ. (الدرس 4-3)

ارسم الزوايا الآتية في الوضع القياسيّ، ثم أوجد الزاوية المرجعيّة لكلٍّ منها. (الدرس 4-3)

40) $-15°$

41) $\frac{5}{4}\pi$

42) $245°$

الدوالّ الدائرية
Circular Functions

فيما سبق:

درست إيجاد قيم دوالّ مثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية. الدرس (4-3)

والآن:

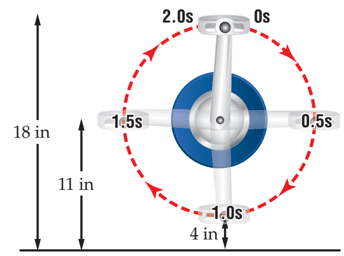
- أجد قيم دوالّ مثلَّثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.
- أستعمل خواصّ الدوالّ الدورية في إيجاد قيم دوالّ مثلَّثية.

المفردات:

دائرة الوحدة
unit circle
الدالّة الدائرية
circular function
الدالّة الدورية
periodic function
الدورة
cycle
طول الدورة
period

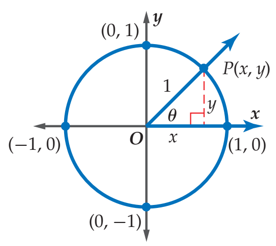
لماذا؟

عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدّال في أثناء دورانه يمثِّل دالّة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.



لاحظ أن البدّال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كلَّ ثانيتين.

الدوالّ الدائرية: **دائرة الوحدة** هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة.
يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالَّتَي: الجيب وجيب التمام.



$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

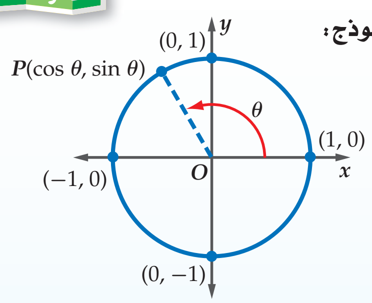
وبذلك فإن قيمة $\cos\theta$ هي الإحداثي x، وقيمة $\sin\theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

مفهوم أساسي — دوالّ في دائرة الوحدة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$، فإن: $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$

النموذج:



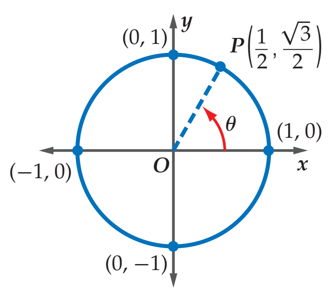
الرموز: $P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن: $P(x,y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

كلٌّ من $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$ دالّة بالنسبة إلى θ. وتُسمّى كلٌّ منهما **دالّة دائرية**؛ لأن تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مثال 1 إيجاد قيمة الجيب وجيب التمام لزاوية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta$, $\sin\theta$.



تحقق من فهمك

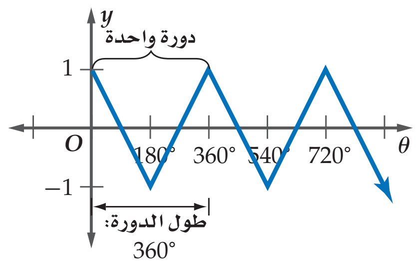
1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta$, $\sin\theta$.

إرشادات للدراسة

الدوالّ الدائرية

بما أن طول القوس المقابل للزاوية التي قياسها θ يساوي $r\theta$، فإنه يمكن التعبير عن مجال الدالّة المثلَّثية بطول القوس المقابل للزاوية بدلًا من قياسها، وعندئذ تسمى دالّة دائرية.

الدوالّ الدورية: في **الدوالّ الدورية** يكون شكل الدالّة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمّى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبيّن في التمثيل البياني للدالّة أدناه.



θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تتكرر الدورة كل 360°

إرشادات للدراسة

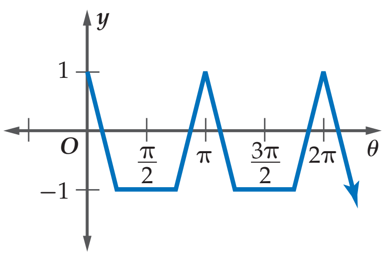
الدورات

يمكن أن تبدأ الدورة عند أيِّ نقطة في منحنى الدالّة الدورية. ففي المثال 2 إذا كانت بداية الدورة عند $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط سيبدأ بالتكرار عند $\frac{3\pi}{2}$، ويكون طول الدورة هو:

$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$

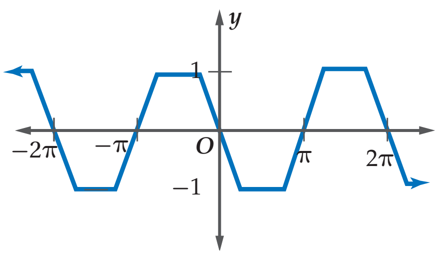
مثال 2 إيجاد طول الدورة

أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

2) أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



دوران العجلة والبدّال في الدراجة الهوائية، ولعبة العجلة الدوّارة، والعديد من الألعاب في مدن الألعاب، ودوران الأشياء المختلفة في الفضاء، كلها تُمثّل دوالّ دورية.

الربط بالحياة

أغلب متسابقي الدرّاجات الهوائية يديرون البدّالات بمعدّلات تزيد على 200 دورة/دقيقة. أما غالبية الناس الذي يركبون دراجات هوائية فيديرونها بمعدّلات تتراوح بين 90-120 دورة/دقيقة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال الدوالّ الدوريّة

درّاجات هوائية: عُدْ إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغيّر ارتفاع البدّال في الدرّاجة الهوائية بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:

a) أنشئ جدولًا يوضّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية:

b) أوجد طول دورة الدالّة.

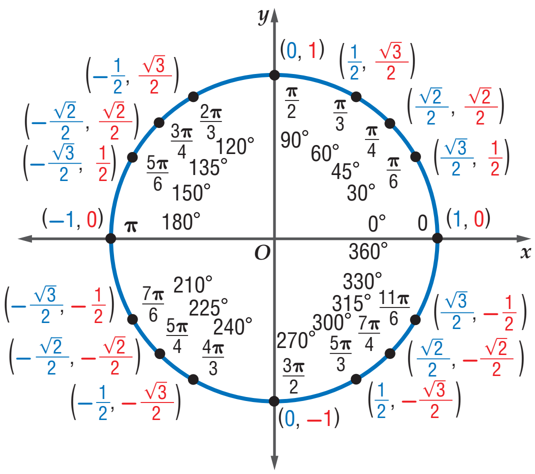
c) مثّل الدالّة بيانيًّا. افترض أن المحور الأفقي يُمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يُمثّل الارتفاع h.

تحقق من فهمك

3) **درَّاجات هوائية** افترض أن البدّال للدرَّاجة الهوائية المحدَّدة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدَّل دورة واحدة لكل ثانية.

A) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

B) أوجد طول دورة الدالّة ومثِّلها بيانيًّا.



يبيِّن الشكل المجاور القيم الدقيقة لكلٍّ من $\cos\theta, \sin\theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثِّل الإحداثي x قيمة $\cos\theta$، ويمثِّل الإحداثي y قيمة $\sin\theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.

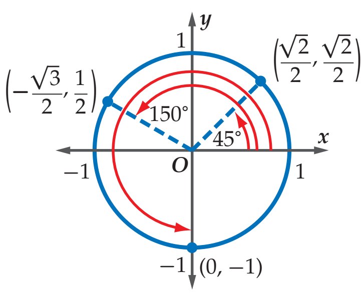
يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالّتين: $\cos\theta, \sin\theta$ بيانيًّا، حيث يمثِّل المحور الأفقي قيم θ. والمحور الرأسي قيم الدالّة المطلوبة.

تتكرَّر دورة كلٍّ من دالَّتَي الجيب وجيب التمام كل $360°$. وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كلٍّ منهما $360°$ أو 2π.

إرشادات للدراسة

الراديان

عند تمثيل دالَّتي الجيب وجيب التمام يمكن تدريج المحور θ بالراديان.



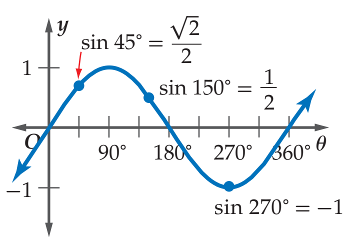
إذا كانت النقاط المبيّنة في الشكل تمثِّل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 45°, \theta = 150°, \theta = 270°$.

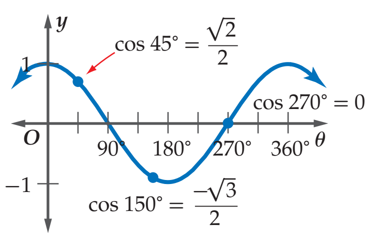
$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

كما يمكنك تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $\sin\theta, \cos\theta$ كما يأتي:





بما أن طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين هو °360، فإن قيم كلٍّ من الدالّتين تتكرّر كلَّ °360.
لذلك فإن $\sin(x + 360°) = \sin x$, $\cos(x + 360°) = \cos x$

مثال 4 حساب قيم الدوالّ المثلَّثية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية ممّا يأتي:

a) $\cos 480°$ b) $\sin \frac{11\pi}{4}$

تحقق من فهمك

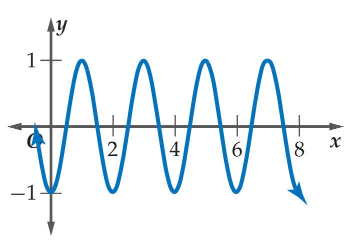
4A) $\sin 420°$ 4B) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

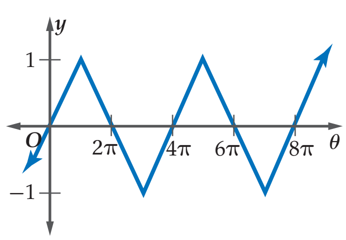
تأكـد

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$ 2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

3) 

4) 

مثال 3 5) **أرجوحة:** إذا مثّل ارتفاع أرجوحة دالّة دوريّة في الزمن، بحيث تصل الأرجوحة إلى أقصى ارتفاع لها وهو $2\,m$، ثم تعود إيابًا لتصل $2\,m$ مرّة أخرى مرورًا بأقلّ ارتفاع لها وهو $\frac{1}{2}m$، مستغرقة زمنًا قدره ثانية واحدة بين أقلّ ارتفاع وأقصى ارتفاع، فأجب عما يأتي:

a) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهابًا وإيابًا بدءًا بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه؟

b) مثّل بيانيًّا ارتفاع الأرجوحة h باعتبارها دالّة في الزمن t.

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية ممّا يأتي:

6) $\sin\frac{13\pi}{6}$ 7) $\sin(-60°)$ 8) $\cos 540°$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

(9 $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

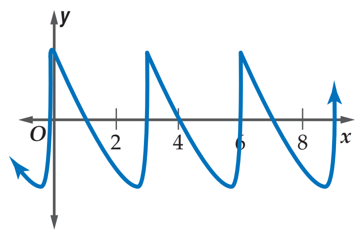
(10 $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

(11 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

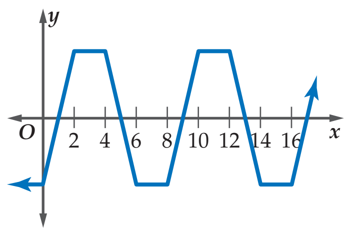
(12 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدوالّ الآتية:

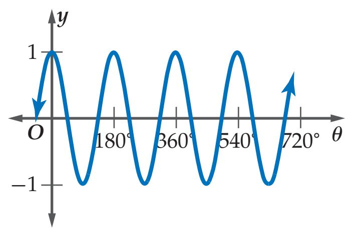
(13



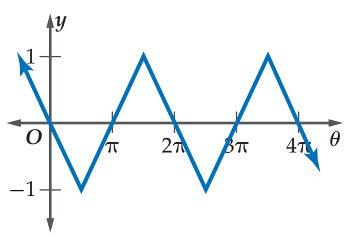
(14



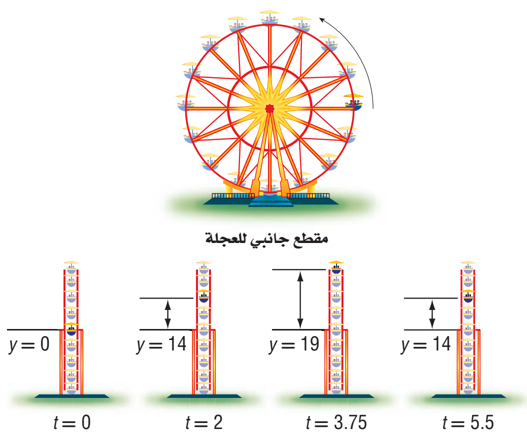
(15



(16



مثال 3 **(17** **العجلة الدّوارة:** يبيِّن الشكل المجاور موقع مقعد راكب y بالأقدام عن مركز العجلة بعد t ثانية. إذا تغيَّر ارتفاع المقعد y في العجلة بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:



a) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع المقعد y عند الثواني الآتية: 0, 2, 3.75, 5.5, 7.5, 9.5, 11.25, 13, 15.5

b) أوجد طول دورة الدالّة.

c) مثِّل الدالّة بيانيًّا. افترض أنَّ المحور الأفقي يمثِّل الزمن t، والمحور الرأسي يمثِّل الارتفاع y.

مثال 4 أوجد القيم الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية ممَّا يأتي:

(18 $\sin\frac{7\pi}{3}$

(19 $\cos(-60°)$

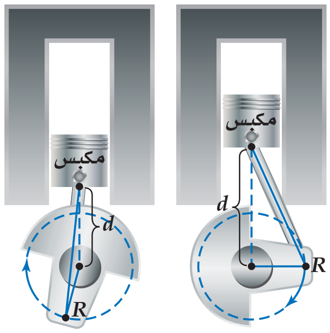
(20 $\cos 450°$

(21 $\sin\frac{11\pi}{4}$

(22 $\sin(-45°)$

(23 $\cos 570°$

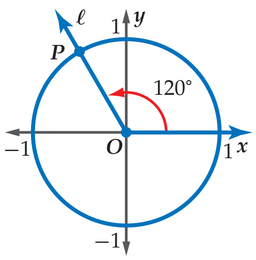
24) **محرِّكات:** في المحرِّك المجاور، تمثِّل (d) المسافةَ من المكبس إلى مركز الدائرة التي تُسمّى ناقل الحركة (الكرنك)، وتشكِّل دالّةً في الزمن. إذا علمت أن النقطة R الواقعة على ذراع المكبس تدور بسرعة 150 دورة/ ثانية، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين:



a) أوجد طول الدورة بالثواني.

b) إذا كانت أقصر قيمة للمسافة d تبلغ 1 cm، وأكبر قيمة 7 cm، فمثّل منحنى الدالّة بيانيًّا، معتبرًا أن المحور الأفقي يمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يمثّل المسافة d .

25) **تمثيلات متعدِّدة:** يقطع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة P كما يبيِّن الشكل المجاور.



a) **هندسيًّا:** انسخ الشكل في دفترك، وارسم ضلع الانتهاء لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها 30°, 60°, 150°, 210° , 315° في الوضع القياسي.

b) **جدوليًّا:** أنشئ جدولًا للقيم يوضِّح ميل كلِّ ضلع انتهاء، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c) **تحليليًّا:** ماذا تستنتج بالنسبة إلى العلاقة بين ظلِّ الزاوية والميل؟ وضِّح إجابتك.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي:

26) $\cos 45° - \cos 30°$

27) $6(\sin 30°)(\sin 60°)$

28) $2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$

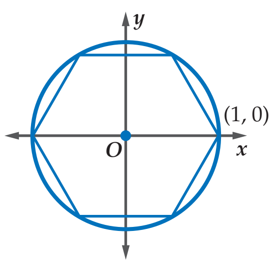
29) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$

30) $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$

31) $\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **هندسة:** رُسِم سداسي منتظم داخل دائرة وحدة مركزها نقطة الأصل، بحيث تقع رؤوسه جميعها على الدائرة كما في الشكل المجاور. إذا كانت إحداثيات أحد رؤوس السداسي (1 , 0)، فما إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى من السداسي؟



33) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من خالد ونواف بحساب قيمة المقدار $\cos \frac{-\pi}{3}$. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

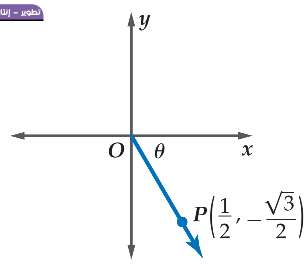
خالد

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$
$$= -0.5$$

نواف

$$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$
$$= \cos \frac{5\pi}{3} = 0.5$$

34) **تحدٍّ:** إذا بدأ نصف المستقيم الموضَّح في الشكل المجاور من نقطة الأصل مارًّا بالنقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المستوى الإحداثي، فاذكر قياسًا للزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x .



35) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.
" طول دورة دالّة الجيب من مضاعفات π"

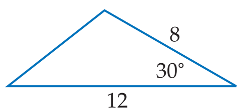
36) **اكتب:** وضِّح كيف يمكنك حساب طول دورة الدالّة الدورية، باستعمال التمثيل البياني للدالّة. ضمّن في توضيحك وصفًا للدورة.

تدريب على اختبار

37) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8$ يساوي:

A 5 **B** 13 **C** 31 **D** 161

38) **هندسة:** مساحة المثلَّث الموضَّح في الشكل المجاور تساوي:

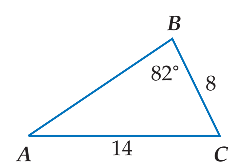


A 48 **B** 96 **C** 41.6 **D** 24

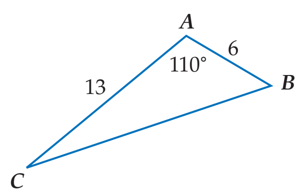
مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المثلَّثات الآتية، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرسان 5-4, 4-4)

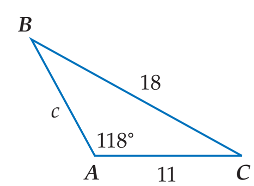
39)



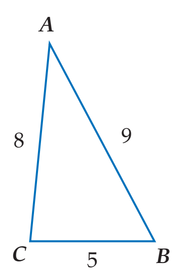
40)



41)



42)



حدّد ما إذا كان للمثلَّث في كلٍّ ممَّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرس 4-4)

43) $A = 72°, a = 6, b = 11$

44) $A = 46°, a = 10, b = 8$

45) $A = 110°, a = 9, b = 5$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

46) $\dfrac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$

47) $\dfrac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$

48) $\dfrac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا
Graphing Trigonometric Functions

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

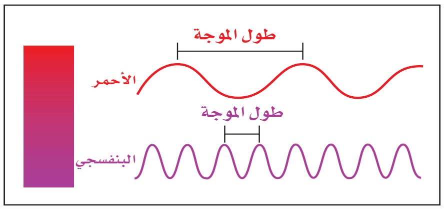
فيما سبق:
درست الدوالّ الدورية. الدرس (4-6)

والآن:
- أصف دوالّ الجيب وجيب التمام والظلّ، وأمثّلها بيانيًّا.
- أصف دوالّ مثلَّثية أخرى، وأمثّلها بيانيًّا.

المفردات:
السعة amplitude
التردد frequency

لماذا؟

لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة. فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.

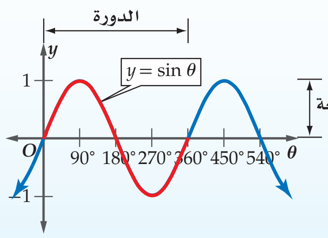
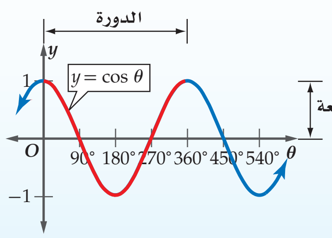


ويمكنك تمثيل الحركة الموجية بالمعادلة: $y = A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$، حيث تمثِّل A سعة الموجة، λ طول الموجة.

دوالُّ الجيب وجيب التمام والظلّ: يمكنك تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا في المستوى الإحداثي. تذكّر أن منحنيات الدوالّ الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكلِّ دورة يُسمّى طول الدورة. **سعة** منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

مفهوم أساسي: دالتا الجيب وجيب التمام

أضف إلى مطويتك

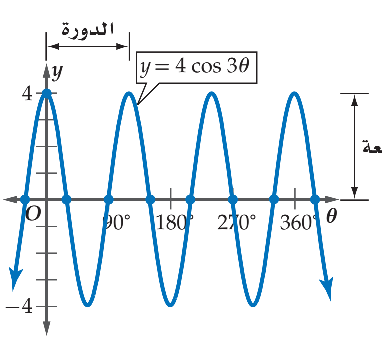
الدالّة المولدة (الأم)	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

قراءة الرياضيات
رمز طول الموجة
يُستعمل الرمز λ للدلالة على طول الموجة، ويُقرأ لمبدا.

يمكنك تطبيق ما تعلمتهُ في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوالّ الأخرى على التمثيل البياني للدوالّ المثلَّثية في صورتها العامة: $y = a\cos b\theta$, $y = a\sin b\theta$، التي سعتها $|a|$، وطول دورتها $\frac{360°}{|b|}$.

مثال 1 إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4\cos 3\theta$.



إرشادات للدراسة
طول الدورة
في الدالّتين: $y = a\sin b\theta$، $y = a\cos b\theta$، b تُمثّل عدد الدورات في 360°. ففي المثال 1 يدلُّ العدد 3 في الدالّة: $y = 4\cos 3\theta$ على وجود 3 دورات في 360°. مما يعني وجود دورة واحدة في 120°.

تحقق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي:

1A) $y = \cos\frac{1}{2}\theta$

1B) $y = 3\sin 5\theta$

استعمل منحنيات الدوالّ المولّدة (الأم) لتمثيل كلٍّ من الدالّتين: $y = a \cos b\theta$, $y = a \sin b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام المناسبة بيانيًّا. ويمكنك أيضًا استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ.

إذا كانت دورة كلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ تبدأ عند $\theta = 0$ ، فإن نقاط تقاطع كلٍّ منهما مع المحور θ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$

إرشادات للدراسة

نقاط التقاطع مع المحور θ

يمكن إيجاد نقاط تقاطع منحنى الدالّة مع المحور θ بوضع $y = \theta$ وحلّ المعادلة أو إيجاد قيم θ التي تحقّقها.

مثال 2 تمثيل دالّتي الجيب وجيب التمام بيانيًّا

مثّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

a) $y = 2 \sin \theta$

إرشادات للدراسة

السعة

في التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$ ، تكون السعة هي $|a|$ ، والقيمة العظمى هي $y = |a|$، والقيمة الصغرى هي $y = -|a|$.

b) $y = \cos 4\theta$

تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

2A) $y = 3 \cos \theta$

2B) $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوالّ المثلّثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتمّ وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد**، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالّة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلًا إذا كان طول الدورة للدالّة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

مثال 3 من واقع الحياة
تمثيل موقف بدالّة دورية

أصوات: تُسمّى الأصوات التي يكون ترددها أقلّ من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات/ ثانية.

a) أوجد طول دورة الدالّة التي تعبر عن موجات الصوت.

b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب تُمثّل موجة الصوت y باعتبارها دالّة في الزمن t، ثم مثِّلها بيانيًّا.

الربط بالحياة

يمكن للفيلة سماع صوت يبعد عنها 5 أميال. ويمكن للإنسان سماع الأصوات التي يتراوح ترددها بين 20 هيرتز إلى 20000 هيرتز.

إرشادات للدراسة

السعة وطول الدورة
لاحظ أن السعة تؤثّر في منحنى الدالّة في اتجاه المحور y، أما طول الدورة فيؤثّر في اتجاه المحور x.

تحقق من فهمك

3) **أصوات:** يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

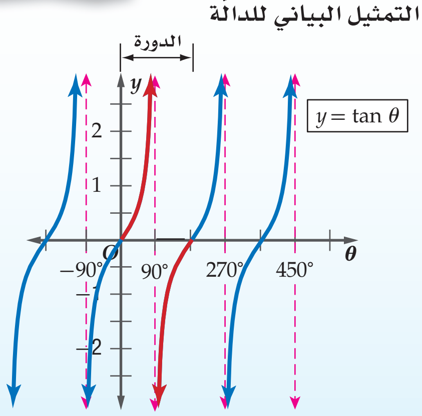
A) أوجد طول دورة الدالّة.

B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب التمام التي تعبِّر عن موجات الصوت، ثم مثِّلها بيانيًّا.

تُعَدّ دالّة الظلّ من الدوالّ المثلَّثية التي لها خطوط تقارب.

مفهوم أساسي: دالّة الظلّ

أضف إلى مطويتك

الدالّة المولِّدة (الأم)	$y = \tan \theta$	التمثيل البياني للدالّة
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180° n,\ n \in Z\}$	
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية	
السعة	غير معرَّفة	
طول الدورة	$180°$	

طول الدورة لمنحنى الدالّة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180°}{|b|}$، ولا يوجد سعة لهذه الدالّة. وخطوط التقارب الرأسية لها تكون عند المضاعفات الفردية للعدد $\left(\frac{180°}{|b|} \cdot \frac{1}{2}\right)$

مثال 4 تمثيل دوالّ الظلّ بيانيًا

أوجد طول دورة الدالّة $y = \tan 2\theta$. ومثّل هذه الدالّة بيانيًا.

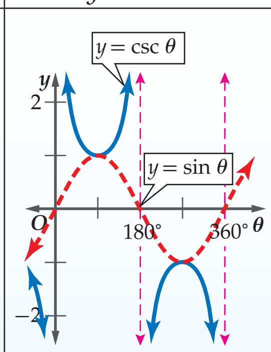
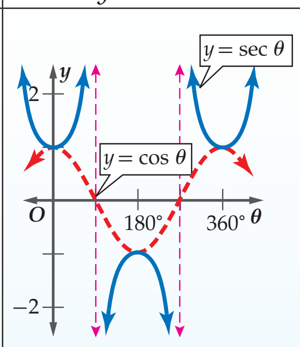
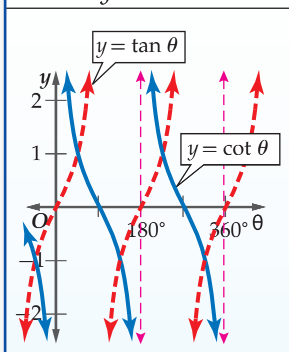
✓ تحقق من فهمك

4) أوجد طول دورة الدالّة $y = \frac{1}{2}\tan\theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًا.

تمثيل الدوالّ المثلّثية الأخرى بيانيًا: ترتبط منحنيات دوالّ قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام بمنحنيات دوالّ الجيب، وجيب التمام، والظلّ.

مفهوم أساسي: دوالّ قاطع التمام والقاطع وظلّ التمام

أضف إلى مطويتك

الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \csc\theta$	$y = \sec\theta$	$y = \cot\theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة
طول الدورة	$360°$	$360°$	$180°$

مثال 5 تمثيل الدوالّ المثلّثية الأخرى بيانيًا

أوجد طول دورة الدالّة $y = 2\sec\theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًا.

إرشادات للدراسة

دالّة الظلّ

لا يوجد سعة لدالّة الظلّ بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها.

قراءة الرياضيات

الرمز ∨

يُقرأ: الرمز ∨ "أو" ويعني هنا اتحاد فترتين.

إرشادات للدراسة

دوالّ المقلوب

يمكنك استعمال منحنيات الدوالّ: $y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$, $y = \tan\theta$ لتمثيل منحنيات دوالّ المقلوب $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$.

تحقق من فهمك

5) أوجد طول دورة الدالّة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالّة بيانيًا.

تأكد

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًا:

المثالان 1, 2

1) $y = 4 \sin \theta$

2) $y = \sin 3\theta$

3) $y = \cos 2\theta$

4) $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5) **عناكب:** عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

a) أوجد طول دورة الدالّة.

b) افرض أن سعة الدالّة وحدة واحدة. واكتب دالّة جيب تُمثّل اهتزازات الشبكة y كدالّة في الزمن t، ومثلها بيانيًا.

المثالان 4, 5 أوجد طول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًا:

6) $y = 3 \tan \theta$

7) $y = 2 \csc \theta$

8) $y = \cot 2\theta$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي، ثم مثّلها بيانيًا:

9) $y = 2 \cos \theta$

10) $y = 3 \sin \theta$

11) $y = \sin 2\theta$

12) $y = \cos 3\theta$

13) $y = \frac{3}{4} \cos \theta$

14) $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

15) $y = 3 \cos 2\theta$

16) $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$

17) $y = \sin \frac{\theta}{2}$

مثال 3

18) **أمواج:** قارب في عرض البحر يرتفع إلى أعلى وينخفض إلى أسفل مع الأمواج. الفرق بين أعلى ارتفاع وأقلّ ارتفاع للقارب 8 بوصات. ويكون القارب مستقرًّا عندما يكون في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة. وتستمر كل دورة في هذه الحركة الدورية لمدة 3 ثوانٍ. اكتب دالّة جيب تُمثّل حركة القارب ومثّلها بيانيًا. افترض أن h: الارتفاع بالبوصات، وt: الزمن بالثواني. وأن القارب يكون في وضع مستقرٍّ عندما $t = 0$.

19) **كهرباء:** يتمثّل فرق الجهد الكهربائي الخارج من أحد الأجهزة الكهربائية بين: $165, -165$ فولت، ويتردد مقداره 50 دورة في الثانية في دالّة دورية. اكتب دالّة جيب تمام تُمثّل فرق الجهد V كدالّة في الزمن t، ومثّلها بيانيًا. افترض أنه عندما $t = 0$ فإن فرق الجهد يساوي 165 فولت.

المثالان 4, 5 أوجد طول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثِّلها بيانيًّا:

20) $y = \tan \frac{1}{2}\theta$

21) $y = 3 \sec \theta$

22) $y = 2 \cot \theta$

23) $y = \csc \frac{1}{2}\theta$

24) **زلازل:** محطة لرصد الزلازل رصدت موجة لزلزال ذات تردد 0.5 هيرتز، وسعتها تساوي مترًا واحدًا.

a) اكتب دالّة جيب تمثِّل ارتفاع الموجة h كدالّة في الزمن t . افترض أن نقطة الاتزان للموجة $h = 0$ تقع في منتصف المسافة بين أخفض نقطة وأعلى نقطة في الموجة.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

25) **اهتزازات:** سلك مشدود بين نقطتين يهتز بتردد 130 هيرتز. اكتب دالّة جيب التمام التي تمثِّل اهتزازات السلك y كدالّة في الزمن t، ومثِّلها بيانيًّا. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. وإذا تضاعف التردد، فماذا يحصل لكلٍّ من طول الدورة والسعة؟

أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة لكلٍّ من الدوالّ الآتية، ثم مثّلها بيانيًّا:

26) $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta$

27) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\theta$

28) $y = 2 \tan \frac{1}{2}\theta$

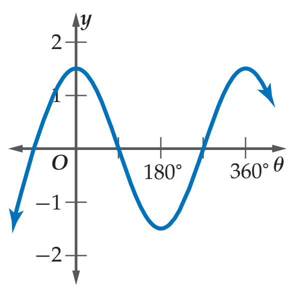
29) $y = 2 \sec \frac{4}{5}\theta$

30) $y = 5 \csc 3\theta$

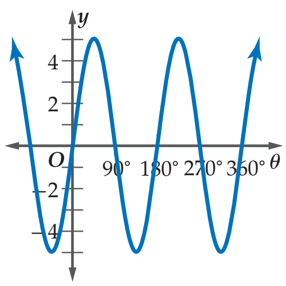
31) $y = 2 \cot 6\theta$

حدّد طول دورة كلٍّ من الدوالّ الممثَّلة بيانيًّا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:

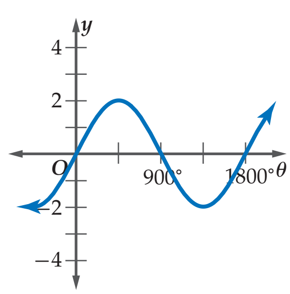
32)



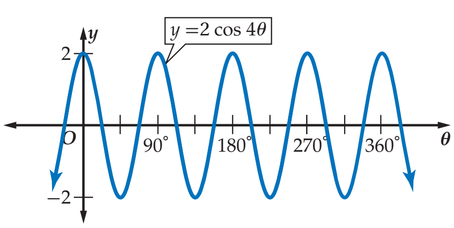
33)

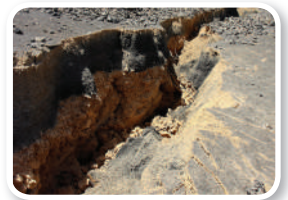


34)



35)





الربط بالحياة

الزلزال هو اهتزاز مفاجئ في القشرة الأرضية ينتج عن تكسُّر الصخور بسبب حركة الصفائح الأرضية، وينتج عن هذا الاهتزاز موجات زلزالية تنطلق من النقطة التي حدث عندها الكسر في باطن الأرض، وتنتشر في جميع الاتجاهات.

المصدر: كتاب العلوم للصف الثالث المتوسط، الفصل الدراسي الأول. طبعة 1436 هـ.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** حدِّد المجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين $y = a\cos\theta$ ، $y = a\sec\theta$ حيث a عدد حقيقي موجب.

37) **تبرير:** عيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين منحنى الدالّة $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ ، ومنحنى الدالّة $y = \sin\frac{1}{2}\theta$.

38) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالّة مثلَّثية سعتها 3 ، وطول دورتها $180°$. ثم مثّلها بيانيًّا.

39) **اكتب:** وضِّح كيف تُحسب سعة الدالّة $y = -2\sin\theta$. ووضِّح كيف يؤثّر المعامل السالب في التمثيل البيانيّ للدالّة.

تدريب على اختبار

40) **مراجعة:** أيّ من الزوايا الآتية تحقِّق $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ؟

A $990°$ B $1080°$ C $1830°$ D $1215°$

41) **إجابة قصيرة:** أوجد الحدّ رقم 100001 في المتتابعة:

$13, 20, 27, 34, 41, \ldots$

42) إذا كان عدد سكان إحدى المدن قبل عشر سنوات يساوي 312430 نسمة، وعدد السكان الحالي يساوي 418270 نسمة، فما النسبة المئوية للزيادة في عدد السكان خلال السنوات العشر الماضية؟

A 25% B 34% C 66% D 75%

مراجعة تراكمية

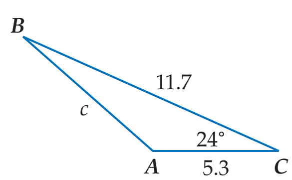
أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-4)

43) $\cos 120° - \sin 30°$

44) $3(\sin 45°)(\sin 60°)$

45) $4\sin\frac{4\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6}$

46) حُلَّ المثلَّث المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، والزاويتين إلى أقرب درجة. (الدرس 5-4)



47) مثِّل الدالّة $y = x^2 + 1$ بيانيًّا. (مهارة سابقة)

4-8

الدوالّ المثلَّثية العكسية
Inverse Trigonometric Functions

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست تمثيل الدوالّ المثلّثية بيانيًّا. الدرس (4-7)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلّثية العكسية.
- أحل معادلات باستعمال الدوالّ المثلّثية العكسية.

المفردات:

القيم الأساسية principal values

دالّة الجيب العكسية Arcsine function

دالّة جيب التمام العكسية Arccosine function

دالّة الظل العكسية Arctangent function

المعادلة المثلّثية Trigonometric equation

لماذا؟

لقد تعلّمت كيف تستعمل الدوالّ المثلَّثية العكسية لإيجاد قياسات الزوايا الحادّة. مثال: يتكئ رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in، ويصل ارتفاعه إلى 75 in . ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالّة الظلّ.

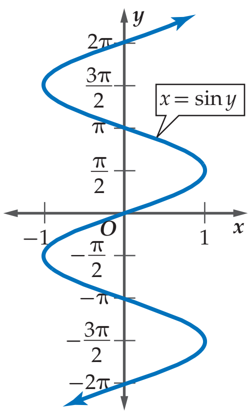
$$\tan\theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلّها 0.2 مستعملًا الآلة الحاسبة العلمية.

SHIFT tan .2 = 11.30993247

إذن قياس الزاوية θ حوالي 11° .

معكوس الدالّة المثلّثيّة: إذا علمت قيمة الدالّة المثلّثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالّة لإيجاد قياس الزاوية. تذكّر أن معكوس الدالّة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: x, y. فمعكوس: $y = \sin x$، هو $x = \sin y$، الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



لاحظ أن معكوس الدالّة ليس دالّة لوجود عدد من قيم y لكلِّ قيمة من قيم x.

لكن إذا تمَّ تحديد مجال الدالّة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$،

فإن المعكوس يكون دالّة عكسية.

تُسمّى القيم في هذا المجال المحدّد **القيم الأساسية**. فالدوالّ المثلّثية ذات المجال المحدّد تُمثّل بأحرف كبيرة، هكذا:

- $y = \operatorname{Sin} x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \operatorname{Cos} x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \pi$
- $y = \operatorname{Tan} x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

يمكنك استعمال الدوالّ ذات المجالات المحددة لتعريف دوالّ عكسية: لكلٍّ من دالّة الجيب، ودالّة جيب التمام ودالّة الظلّ وهي **دالّة الجيب العكسية**، و**دالّة جيب التمام العكسية**، و**دالّة الظلّ العكسية** كما يأتي:

إرشادات للدراسة

رموز الدوالّ العكسية

يُرمز للدوالّ العكسية أحيانًا ببعض الرموز الأخرى مثل:

دالّة الجيب العكسية $y = \operatorname{Arcsin} x$

دالّة جيب التمام العكسية $y = \operatorname{Arccos} x$

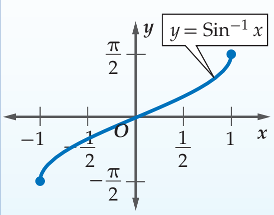
دالّة الظل العكسية $y = \operatorname{Arctan} x$

مفهوم أساسي — الدوالّ المثلَّثية العكسية

أضف إلى مطويتك

الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى
دالّة الجيب العكسية	$y = \operatorname{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$
دالّة جيب التمام العكسية	$y = \operatorname{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$
دالّة الظل العكسية	$y = \operatorname{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$

نموذج



في العلاقة $y = \cos^{-1} x$، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ فإن $y = 60°, 300°$، كما أن كلَّ زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين بضلع الانتهاء تُعدّ قيمة لـ y أيضًا. أما في الدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$، فإذا كانت $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ فقط.

مثال 1 إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية العكسية

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

(a $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(b $\text{Tan}^{-1} 1$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

(1A $\text{Cos}^{-1} 0$

(1B $\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مراجعة المفردات

الدوالّ العكسية

f, f^{-1} كلٌّ منهما دالّة عكسية للأخرى تعني: $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية

تذكّر أنه عند حسابك قيمة معكوس الدالّة المثلَّثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

عند حساب قيمة معينة بوجود عدد من الدوالّ المثلَّثية، استعمل ترتيب العمليات الحسابية للحلِّ.

مثال 2 إيجاد قيمة مثلَّثية

أوجد قيمة $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$ مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة:

(2A $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$ **(2B** $\cos\left(\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

حَلُّ المعادلات المثلَّثية باستعمال الدوالّ العكسية : **المعادلة المثلَّثية** هي معادلة تحتوي على دوالّ مثلَّثية بزوايا مجهولة القياس. وحَلُّ المعادلة المثلَّثية يعني: إيجاد قياس الزوايا المجهولة، والتي دوالّها المثلَّثية تجعل المعادلة المثلَّثية صحيحة، وذلك بإعادة كتابتها باستعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية.

مثال 3 على اختبار

إذا كان $\text{Sin}\ \theta = -0.35$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

إرشادات للاختبار

حذف البدائل
إشارة $\text{Sin}\ \theta$ تُحدِّد قياس الزاوية في الربع الأول أو الربع الرابع، وبما أن -0.35 قيمة سالبة، فابحث عن زاوية في الربع الرابع.

✓ تحقق من فهمك

(3 إذا كان $\text{Tan}\ \theta = 1.8$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

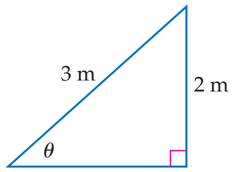
A $0.03°$ **C** $60.9°$

B $29.1°$ **D** لا يوجد حلّ

يمكنك استعمال الدوالّ المثلَّثية العكسيّة؛ لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في مثلَّث قائم الزاوية بمعرَّفة طولي ضلعين فيه.

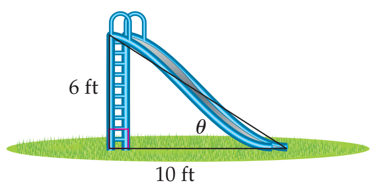
مثال 4 من واقع الحياة — استعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية

لعبة التزحلق: لعبة تزحلق للأطفال، ارتفاعها 2 m ، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تصنعها لعبة التزحلق مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.



تحقق من فهمك

4) **تزلج:** يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



تأكد

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

1) $\text{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$

2) $\text{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$

3) $\text{Cos}^{-1}(-1)$

مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

4) $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

5) $\tan(\text{Cos}^{-1} 1)$

6) $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

مثال 3

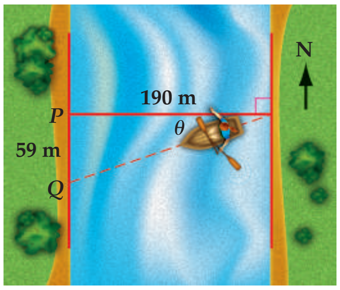
7) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\text{Sin}\,\theta = 0.422$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $25°$ B $42°$ C $48°$ D $65°$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

8) $\text{Cos}\,\theta = 0.9$ 9) $\text{Sin}\,\theta = -0.46$ 10) $\text{Tan}\,\theta = 2.1$

مثال 4 11) **قوارب:** يسير قارب في اتجاه الغرب؛ ليقطع نهرًا عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي أزاح التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.



تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

12) $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 13) $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

14) $\text{Sin}^{-1}(-1)$ 15) $\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$

16) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 17) $\text{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

18) $\tan\left[\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

19) $\cos\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{5}\right)$ 20) $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}\right)$

21) $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{9}\right)$ 22) $\sin\left[\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

مثال 3 حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

23) $\text{Tan}\,\theta = 3.8$ 24) $\text{Sin}\,\theta = 0.9$

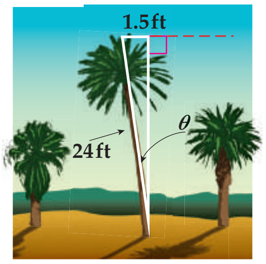
25) $\text{Sin}\,\theta = -2.5$ 26) $\text{Cos}\,\theta = -0.25$

27) $\text{Cos}\,\theta = 0.56$ 28) $\text{Tan}\,\theta = -0.2$

مثال 4

الربط بالحياة

فوائد شجرة نخلة التمر لا تُعدّ ولا تُحصى، منها قيمتها الغذائية العالية، وتُعدّ مصدرًا ممتازًا للطاقة الحرارية لجسم الإنسان، إذ تحوي ما يقارب 80% من السكريات، وتحتوي الثمار على الأملاح المعدنية والعناصر النادرة المفيدة لجسم الإنسان كالبوتاسيوم والماغنسيوم والحديد وفيتامينات أ، ب، $ب_2$، $ب_6$، ويستفيد الناس من أجزاء النخيل كلها.



29) **نخيل:** شجرة نخيل طولها 24 ft، تميل عن الاتجاه الرأسي بمقدار 1.5 ft كما في الشكل المجاور، اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تميل بها الشجرة، ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

30) $\csc \theta = 1$　　31) $\sec \theta = -1$　　32) $\sec \theta = 1$

33) $\csc \theta = \frac{1}{2}$　　34) $\cot \theta = 1$　　35) $\sec \theta = 2$

36) **تمثيلات متعدِّدة:** أجب عما يأتي، معتبرًا $y = \text{Cos}^{-1} x$.

a) **بيانيًّا:** مثّل الدالّة بيانيًّا. وأوجد المجال والمدى.

b) **عدديًّا:** اختر قيمة للمتغيّر x بين $-1, 0$. ثم أوجد قيمة الدالّة عندها إلى أقرب جزء من عشرة.

c) **تحليليًّا:** قارن بين التمثيل البياني للدالّة $y = \cos x$، والتمثيل البياني للدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من خليل وعبدالرحمن بحلِّ المعادلة $\cos \theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$.
أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

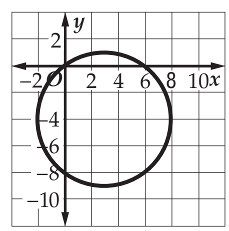
خليل	عبدالرحمن
$\cos \theta = 0.3$	$\cos \theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 72.5°$	$\cos^{-1} 0.3 = 162.5°$

38) **تبرير:** وضِّح كيف يرتبط مجال الدالّة $y = \text{Sin}^{-1} x$ مع مدى الدالّة $y = \text{Sin}\ x$.

39) **اكتب:** فسّر لماذا تكون كلٌّ من $\text{Cos}^{-1} 8 , \text{Sin}^{-1} 8$ غير معرَّفة، بينما $\text{Tan}^{-1} 8$ معرَّفة.

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** أوجد معادلة الدائرة الممثَّلة في الشكل الآتي:



41) إذا كان $g(x) = 4 - 2x$, $f(x) = 2x^2 - 3x$ ، فأوجد $g[f(x)]$.

A $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

B $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

C $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

D $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

مراجعة تراكمية

42) أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4 \cos 2\theta$ ، ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا. (الدرس 7-4)

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-4)

43) $\cos 3\pi$　　44) $\tan 120°$　　45) $\sin 300°$　　46) $\sec \frac{7\pi}{6}$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوالّ المثلّثية في المثلّثات القائمة الزاوية (الدرس 4-1)

- $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}, \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}, \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
- $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}, \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}, \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

الزوايا وقياسها والدوالّ المثلّثية للزوايا (الدرسان 4-2, 4-3)

- يُحدّد قياس الزاوية المرسومة في الوضع القياسي بمقدار الدوران واتجاهه من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ، بمعلومية إحداثيي النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الجيوب وقانون جيوب التمام (الدرسان 4-4, 4-5)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

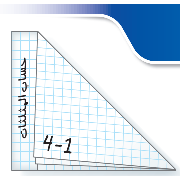
الدوالّ الدائرية والدوالّ المثلّثية العكسية (الدرسان 4-6, 4-8)

- إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x, \sin\theta = y$.
- $y = \operatorname{Sin} x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \operatorname{Cos} x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$
- $y = \operatorname{Tan} x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x, \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوالّ المثلّثية بيانيًّا (الدرس 4-7)

- للدوالّ المثلّثية التي في إحدى الصورتين $y = a\sin b\theta, y = a\cos b\theta$، سعة تساوي $|a|$، وطول دورة يساوي $\frac{360°}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{|b|}$.
- أما الدالّة المثلّثية $y = a\tan b\theta$ فطول دورتها يساوي $\frac{180°}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$، ولا يوجد لها سعة.

المطويات منظم أفكار



تأكّد من أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية

حساب المثلّثات ص 159
النسبة المثلّثية ص 159
الدالّة المثلّثية ص 159
الجيب ص 159
جيب التمام ص 159
الظل ص 159
قاطع التمام ص 159
القاطع ص 159
ظلّ التمام ص 159
دوالّ المقلوب ص 160
معكوس الجيب ص 162
معكوس جيب التمام ص 162
معكوس الظلّ ص 162
زاوية الارتفاع ص 163
زاوية الانخفاض ص 163
الوضع القياسي ص 168
ضلع الابتداء ص 168
ضلع الانتهاء ص 168
الراديان ص 170
الزاوية المركزية ص 171
طول القوس ص 171
الزاوية الربعية ص 175
الزاوية المرجعية ص 175
قانون الجيوب ص 181
حل المثلّث ص 181
قانون جيوب التمام ص 189
دائرة الوحدة ص 195
الدالّة الدائرية ص 195
الدالّة الدورية ص 196
الدورة ص 196
طول الدورة ص 196
السعة ص 202
التردد ص 203
القيم الأساسية ص 209
دالّة الجيب العكسية ص 209
دالّة جيب التمام العكسية ص 209
دالّة الظلّ العكسية ص 209
المعادلة المثلّثية ص 211

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كلِّ جملة فيما يأتي:

1) ________ يُستعمل لحلِّ مثلَّث بمعلومية قياسي زاويتين وطول ضلع فيه.

2) الدوالّ $\cot\theta, \csc\theta, \sec\theta$ تسمى ________

3) تُسمى المسافة الأفقية في الدورة ________ .

4) إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن هذه الزاوية تُسمى ________ .

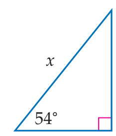
5) ________ هي الزاوية المحصورة بين خطِّ النظر والخطِّ الأفقي عندما ينظر الشخص إلى أعلى.

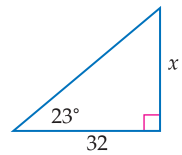
6) ________ منحنى دالّة الجيب أو منحنى دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

مراجعة الدروس

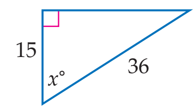
4-1 الدوالّ المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية
ص 159–167

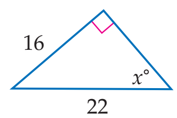
استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

7)


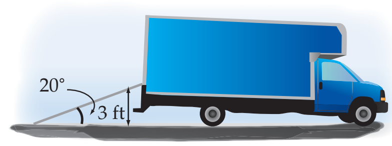
8)


أوجد قيمة x مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

9)


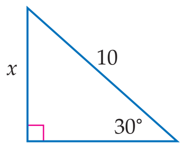
10)


11) **شاحنة:** ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3 ft عن سطح الأرض. ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة، بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض °20، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



مثال 1

استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x.



$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ دالّة الجيب

$\sin 30° = \frac{x}{10}$ عوِّض

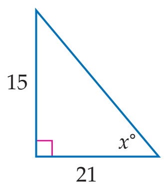
$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\frac{10}{2} = x$ اضرب الطرفين في 10

$5 = x$ بسِّط

مثال 2

أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



$\tan x° = \frac{15}{21}$ $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan^{-1}\frac{15}{21} = x$ معكوس الظل

$35.5° \approx x°$ استعمل الآلة الحاسبة

4-2 الزوايا وقياساتها
ص 168–173

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

12) $215°$

13) $\frac{5\pi}{2}$

14) -3π

15) $-315°$

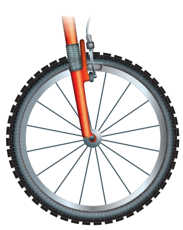
في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كلِّ زاوية من الزوايا المُعطاة:

16) $265°$

17) $-65°$

18) $\frac{7\pi}{2}$

19) **درَّاجة هوائية:** إطار درَّاجة هوائية يدور 8 دورات في الدقيقة. إذا كان طول نصف قطر الإطار 15 in، فأوجد قياس الزاوية θ التي يدورها الإطار في ثانية واحدة بالراديان.



مثال 3

حوِّل القياس °160 إلى قياس بالرديان.

$160° = 160°\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$

$\frac{160\pi}{180} \text{ rad} = \frac{8\pi}{9}$

مثال 4

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية °150.

زاوية بقياس موجب:

$150° + 360° = 510°$ أضف °360

زاوية بقياس سالب:

$150° - 360° = -210°$ اطرح °360

4-3 الدوالّ المثلَّثية للزوايا ص 179–174

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

20) $\cos 135°$ 21) $\tan 150°$

22) $\sin 2\pi$ 23) $\cos \frac{3\pi}{2}$

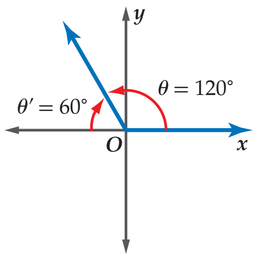
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بنقطة من النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ .

24) $(-4, 3)$ 25) $(5, 12)$ 26) $(16, -12)$

27) **كرة:** قذفت كرة من حافة سطح بناية بزاوية قياسها $70°$، وبسرعة ابتدائية مقدارها 5m. المعادلة التي تُمثّل المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة هي: $x = v_0 (\cos \theta)\, t$، حيث: v_0 هي السرعة الابتدائية، وθ هي قياس الزاوية التي قذفت فيها الكرة، وt هو الزمن (بالثواني). ما المسافة الأفقية التقريبية التي تقطعها الكرة بعد مرور 10 ثوانٍ.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 120°$.



بما أن ضلع الانتهاء للزاوية $120°$ يقع في الربع الثاني، فإن قياس الزاوية المرجعية θ هو $180° - 120° = 60°$.
دالّة الجيب موجبة في الربع الثاني، إذن:
$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

مثال 6

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(6, 5)$. فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

$r = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{6}$ $\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{61}}{5}$

$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{61}}{6}$ $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{6}{5}$

4-4 قانون الجيوب ص 186–180

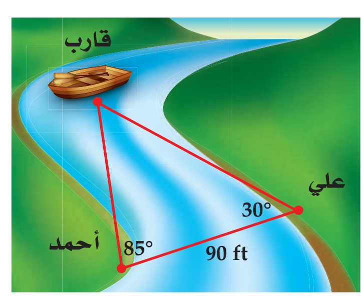
حدّد ما إذا كان للمثلَّث في كلٍّ ممّا يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

28) $C = 118°, c = 10, a = 4$

29) $A = 25°, a = 15, c = 18$

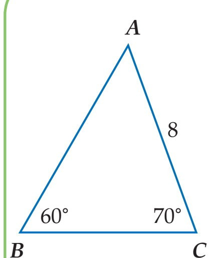
30) $A = 70°, a = 5, c = 16$

31) **قوارب:** يقف علي وأحمد على جانبَي نهر. كم يبعد علي عن القارب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



مثال 7

حُلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



أولًا أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$60° + 70° + A = 180°,\ A = 50°$

استعمل الآن قانون الجيوب لإيجاد قيمتَي a, c.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c}$ $\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a}$

$c = \frac{8 \sin 70°}{\sin 60°} \approx 8.7$ $a = \frac{8 \sin 50°}{\sin 60°} \approx 7.1$

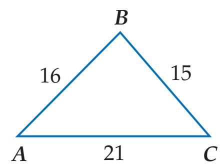
إذن $A = 50°, c \approx 8.7, a \approx 7.1$.

دليل الدراسة والمراجعة

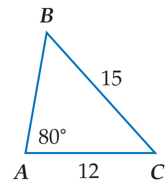
4-5 قانون جيوب التمام ص 189–194

حدِّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم قانون جيوب التمام) في حلِّ كلٍّ من المثلَّثات الآتية، ثم حُلّ كلَّ مثلَّث منها مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(32



(33



(34 $C = 75°, a = 5, b = 7$

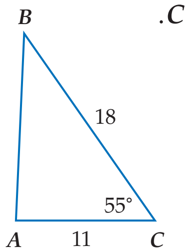
(35 $A = 42°, a = 9, b = 13$

(36 $b = 8.2, c = 15.4, A = 35°$

(37 **زراعة:** يريد مزارع وضع سياج لقطعة أرض مثلَّثة الشكل. طولا ضلعيها 120 ft, 325 ft، وقياس الزاوية المحصورة بينهما °70. فما طول السياج الذي يحتاج إليه؟

مثال 8

حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه $C = 55°, b = 11, a = 18$.



أُعطي في السؤال طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. ابدأ برسم المثلَّث واستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قيمة c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 18^2 + 11^2 - 2(18)(11)\cos 55°$$
$$c^2 \approx 217.9$$
$$c \approx 14.8$$

ثم استعمل قانون جيوب التمام مرّة أخرى لإيجاد قياس الزاوية B.

$$11^2 = 18^2 + (14.8)^2 - 2(18)(14.8)\cos B$$
$$\frac{11^2 - 18^2 - (14.8)^2}{-2(18)(14.8)} = \cos B$$
$$0.7921 \approx \cos B$$
$$38° \approx B$$

قياس الزاوية الثالثة A

$$m\angle A \approx 180° - (55° + 38°) \approx 87°$$

إذن $A \approx 87°, B \approx 38°, c \approx 14.8$

4-6 الدوالّ الدائرية ص 195–201

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

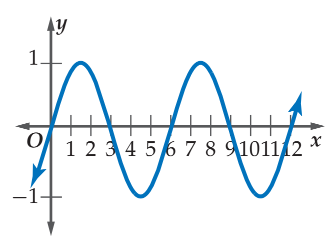
(38 $\cos(-210°)$

(39 $(\cos 45°)(\cos 210°)$

(40 $\sin -\frac{7\pi}{4}$

(41 $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(42 أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



(43 **إطارات:** طول قطر إطار دائري 18 in، ويدور 4 دورات في الدقيقة الواحدة. ما طول دورة الدالّة التي تُمثّل ارتفاع نقطة تقع على الحافة الخارجية للإطار كدالّة في الزمن؟

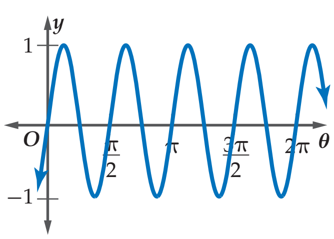
مثال 9

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510°$.

$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$
$$= \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال 10

أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



يبدأ النمط بالتكرار عند $\frac{\pi}{2}$، π، وهكذا... ولذلك طول الدورة هو $\frac{\pi}{2}$.

4-7 تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًا ص 202–208

أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة للدوالّ الآتية، ثم مثّل كلًّا منها بيانيًا:

44) $y = 4 \sin 2\theta$

45) $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

46) $y = 3 \csc \theta$

47) $y = 3 \sec \theta$

48) $y = \tan 2\theta$

49) $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

50) **رياضة:** قفز لاعب على جهاز الاهتزاز، فاهتز الجهاز بتردد قدره 10 هيرتز. إذا كانت السعة تساوي 5 ft، فاكتب دالّة جيب تُمثّل الارتفاع y في اهتزاز الجهاز كدالّة في الزمن t.

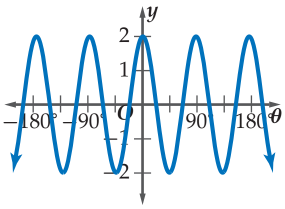
مثال 11

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًا.

السعة: $|a| = |2| = 2$. لذلك فالتمثيل البياني للدالّة تكون له قيمة عظمى هي 2، وقيمة صغرى هي -2.

وطول الدورة:

$$\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$$



4-8 الدوالّ المثلَّثية العكسية ص 209–214

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

51) $\text{Sin}^{-1}(1)$

52) $\text{Tan}^{-1}(0)$

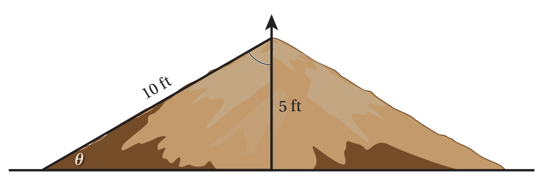
53) $\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

54) $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

55) $\text{Tan}^{-1} 1$

56) $\text{Cos}^{-1} 0$

57) **منحدرات:** منحدر ارتفاعه 5 أقدام، وطوله 10 أقدام كما يظهر في الشكل أدناه. اكتب دالّة مثلّثية عكسية، يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية θ التي يصنعها المنحدر مع الأرض الأفقية، ثم أوجد قياس هذه الزاوية.



أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

58) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

59) $\sin\left(\text{Tan}^{-1} 0\right)$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

60) $\text{Tan}\,\theta = -1.43$

61) $\text{Sin}\,\theta = 0.8$

62) $\text{Cos}\,\theta = 0.41$

مثال 12

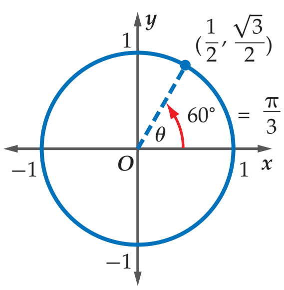
أوجد قيمة $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. واكتبه بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ حيث $0° \le \theta \le 180°$، بحيث يكون جيب تمامها $\frac{1}{2}$.

استعمل دائرة الوحدة.

أوجد نقطة على دائرة الوحدة، بحيث يكون الإحداثي x لها $\frac{1}{2}$ بما أن: $\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 60°$

إذن $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60° = \frac{\pi}{3}$.



مثال 13

أوجد قيمة $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

sin SHIFT TAN 1 ÷ 2 = 0.4472135955

إذن $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 14

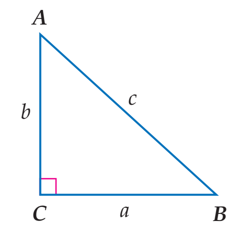
إذا كان $\text{Cos}\,\theta = 0.72$، فأوجد θ.

استعمل الآلة الحاسبة.

SHIFT COS 0.72 = 43.9455195623

إذن $\theta \approx 43.9°$.

حُلّ $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي باستعمال القياسات الواردة، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



1) $A = 36°, c = 9$

2) $a = 12, A = 58°$

3) $a = 9, c = 12$

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

4) $325°$

5) $-175°$

6) $\frac{9\pi}{4}$

7) $-\frac{5\pi}{6}$

8) حدّد ما إذا كان للمثلَّث ABC الذي فيه $A = 110°, a = 16, b = 21$ حل واحد أم حلان أم ليس له حل. ثم أوجد الحلول (إن أمكن)، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممَّا يأتي (في السؤال 14، اكتب الزاوية بالدرجات):

9) $\cos(-90°)$

10) $\sin 585°$

11) $\cot \frac{4\pi}{3}$

12) $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

13) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

14) $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$

15) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ فأوجد كلًّا من: $\cos\theta, \sin\theta$.

16) **اختيار من متعدد:** أيٌّ من الزوايا الآتية يكون الجيب والظلّ لها سالبين؟

A $65°$

B $310°$

C $120°$

D $265°$

أوجد السعة وطول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين. ثم مثِّل الدالّتين بيانيًّا:

17) $y = 2\sin 3\theta$

18) $y = \frac{1}{2}\cos 2\theta$

19) **اختيار من متعدد:** طول دورة الدالّة $y = 3\cot\theta$ يساوي:

A $120°$

B $180°$

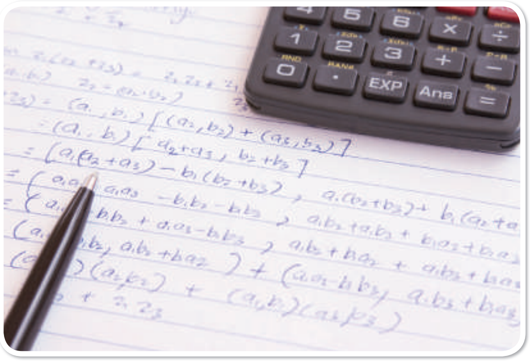
C $360°$

D $1080°$

20) حدّد أنسب طريقة نبدأ بها لحلّ $\triangle XYZ$ (قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام)، الذي فيه: $y = 15, z = 9, X = 105°$، ثم حُلّ المثلَّث مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

21) **سواقٍ:** عجلة ساقية طول قطرها 20 ft، تكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن ارتفاع أعلى العجلة يُمثِّل الارتفاع عند الزمن 0. اكتب دالّة مثلَّثية تُمثِّل ارتفاع النقطة h في الشكل أدناه كدالّة في الزمن t. ثم مثِّل الدالّة بيانيًّا.

استعمال الآلة الحاسبة العلمية



تُعدّ الآلات الحاسبة العلمية والآلات الحاسبة البيانية من الأدوات المهمة والفاعلة في حلِّ المسائل. كما لاحظت سابقًا فإن بعض أسئلة الاختبارات تتضمن خطوات أو حسابات تحتاج فيها إلى استعمال الآلة الحاسبة العلمية.

استراتيجية استعمال الآلة الحاسبة العلمية

الخطوة 1

تَعرّف الدوالّ المختلفة في الآلة الحاسبة العلمية جيدًا، ومتى تَستعمل كلًّا منها.

- **الصيغة العلمية:** للحسابات المتعلّقة بالأعداد الكبيرة.
- **الدوالّ الأُسِّية:** مسائل النموّ والاضمحلال والربح المركب.
- **الدوالّ المثلَّثية:** مسائل تتضمن زوايا، ومسائل ترتبط بحلِّ المثلَّث، ومسائل في القياس غير المباشر.
- **الجذور التربيعية والنونية:** مسائل ترتبط بالبُعد في المستوى الإحداثي، ومسائل ترتبط بنظرية فيثاغورس.

الخطوة 2

استعمل الآلة الحاسبة العلمية لحلِّ المسائل.

- تذكّر أن تعمل بالصورة الأكثر فاعلية، فبعض الخطوات يمكن القيام بها ذهنيًّا أو يدويًّا، وفي بعضها الآخر يلزم استعمال الآلة الحاسبة العلمية.
- تحقّق من إجابتك إذا كان الوقت يسمح بذلك.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المُعطيات لحلِّها:

عندما وقف محمد على بُعد 18 ft من قاعدة شجرة، شكّل زاوية قياسها °57 مع قمة الشجرة. ما ارتفاع الشجرة مقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة؟

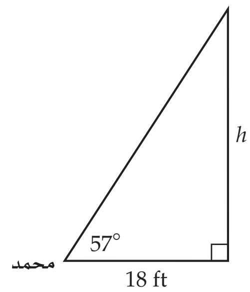
A 27.7 ft

B 28.5 ft

C 29.2 ft

D 30.1 ft

اقرأ المسألة بعناية. أُعطيت بعض القياسات، وطلب إليك إيجاد ارتفاع الشجرة. إذن من المفيد في البداية أن ترسم مخطّطًا يُمثّل المسألة.



استعمل دالّة مثلَّثية لكتابة علاقة تربط الطولين بقياس الزاوية في المثلَّث القائم الزاوية.

$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ دالّة الظل

$\tan 57° = \frac{h}{18}$ عوّض

لإيجاد ارتفاع الشجرة h تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57°$. استعمل الآلة الحاسبة العلمية.

$1.53986 \approx \frac{h}{18}$ استعمل الآلة الحاسبة

$27.71748 \approx h$ اضرب الطرفين في 18

يبلغ ارتفاع الشجرة 27.7 ft تقريبًا؛ إذن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ كلَّ مسألة وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل مُعطيات المسألة لحلها:

1) تقلع طائرة من المطار بسرعة ثابتة. بعد أن قطعت الطائرة مسافة أفقية مقدارها 800 m كانت على ارتفاع 285 m رأسيًّا. ما زاوية ارتفاع الطائرة خلال الإقلاع؟

A 15.6° **B** 18.4°

C 19.6° **D** 22.3°

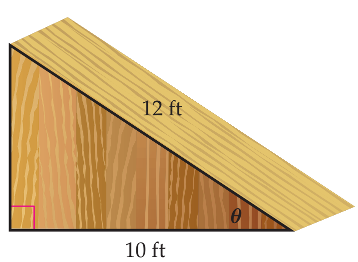
2) ما زاوية ارتفاع المنحدر الذي يُمثّله الشكل أدناه؟

F 26.3°

G 28.5°

H 30.4°

J 33.6°

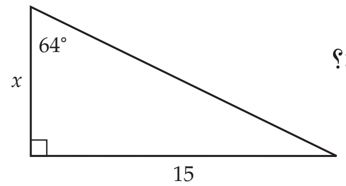


اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) ما قيمة x في الشكل المجاور، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2) ما طول الدورة في التمثيل البياني للدالّة: $y = 3\cos 4\theta$ ؟

A $90°$

B $180°$

C $270°$

D $360°$

3) تتكون مجموعة حلِّ المعادلة $\sqrt{8x+1} - 4 = 1 - 2x$ من:

A عددين صحيحين موجبين.

B عدد صحيح موجب واحد فقط.

C عددين صحيحين أحدهما موجب والآخر سالب.

D ليس لها حلول حقيقية.

4) ما القيمة الدقيقة لِـ $\sin 240°$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) المقدار $i^{53} + i^{51} + i^{50}$ يساوي :

A i

B $-i$

C -1

D 0

6) ما قيمة m في المثلَّث MNO الذي فيه: $n = 12.4\text{ cm}, M = 35°, N = 74°$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm

B 8.5 cm

C 14.6 cm

D 35.9 cm

7) أوجد قيمة المحددة : $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

A -144

B -72

C 72

D 144

8) إذا كان $(x+1)$ عاملًا لكثيرة الحدود $P(x) = x^3 + Kx^2 + 2Kx - 2$، فإن قيمة K تساوي:

A 6

B $\frac{1}{3}$

C -3

D 3

9) ما باقي قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

A -11

B 1

C -1

D 11

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ ممّا يأتي:

10) تعتمد سرعة موجة المدِّ (تسونامي) v على معدّل عمق مياه البحر. إذا علمت أن الصيغة الآتية تُمثّل سرعة المد عندما يكون معدّل عمق الماء d كيلومترًا، $v = 356\sqrt{d}$، وإذا علمت أن موجة المدّ (تسونامي) تسير بسرعة $145\,\mathrm{km/h}$، فما معدَّل عمق الماء، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة؟

11) أوجد معكوس $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$.

12) يحتاج الحصان إلى 10 أرطال من العشب كلَّ يوم كي يكون في صحة جيدة.

a) اكتب صيغة تمثّل الكمية اللازمة من العشب لإطعام x حصانًا مدة d يومًا.

b) هل الصيغة التي وضعتها تُمثّل تغيّرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًّا؟ فسّر إجابتك.

c) ما الكمية التي تحتاج إليها ثلاثة أحصنة خلال أسبوع؟

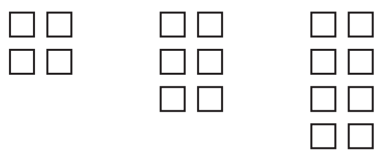
13) إذا كان $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$، $g(x) = \sqrt{x-1}$، فأوجد قيمة $(f \circ g)\left(\dfrac{11}{2}\right)$.

14) إذا كان $\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}$، حيث

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة العنصر C_{32} (العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني من $\underline{C}$).

15) يتكرّر نمط المربعات أدناه إلى ما لانهاية من خلال إضافة مربعات جديدة. ما عدد المربعات في الخطوة رقم 10؟



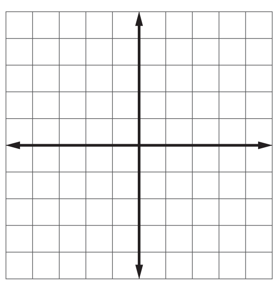
الخطوة 3 الخطوة 2 الخطوة 1

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ ممّا يأتي موضِّحًا خطوات الحلِّ:

16) إذا كان $f(x) = -|x+4| + 3$، فأجب عمّا يأتي

a) مثّل الدالّة $f(x)$ بيانيًّا.



b) حدِّد مجال الدالّة ومداها.

c) أوجد المقاطع للمحاور x، y.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
فعد إلى الدرس ...	4-1	4-7	مهارة سابقة	4-3	مهارة سابقة	4-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	1-5	مهارة سابقة	مهارة سابقة	2-2	مهارة سابقة