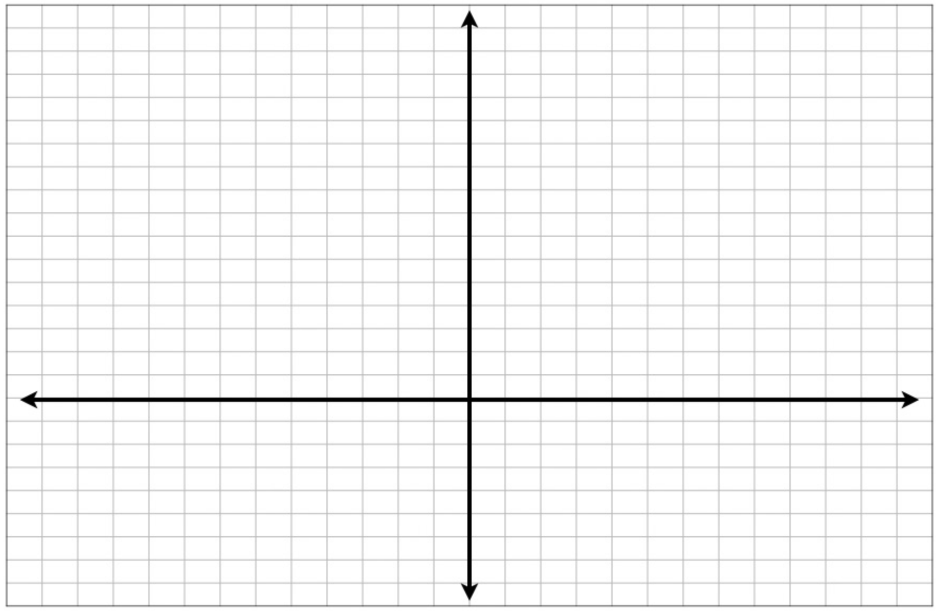
الاحداثيات القطبية والأعداد المركبة

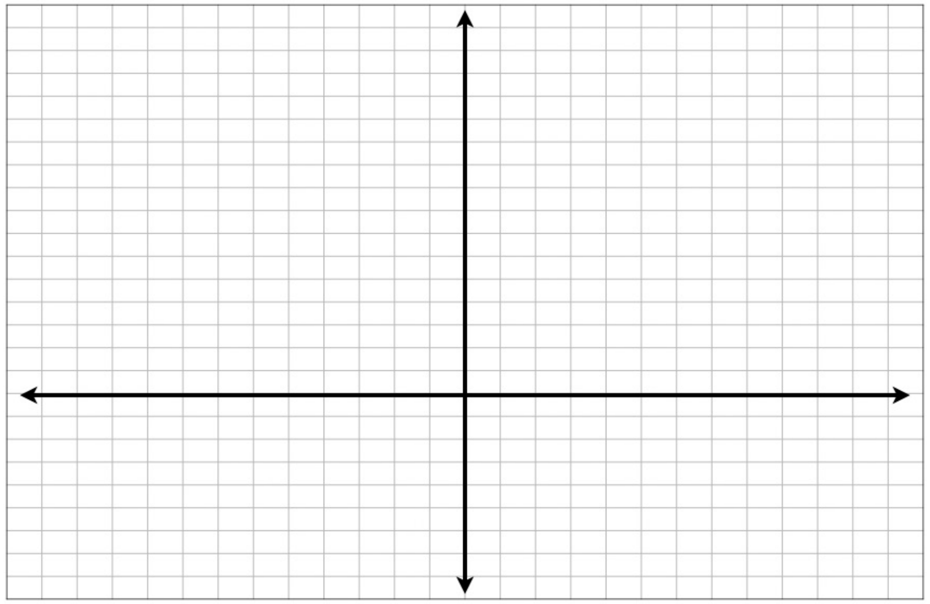
تهيئة

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

1) $200°$

2) $-45°$





تهيئة

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية، ومثِّلهما في الوضع القياسي:

3) $165°$

4) $-10°$

5) $\frac{4\pi}{3}$

6) $-\frac{\pi}{4}$

تهيئة

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

7) -60°

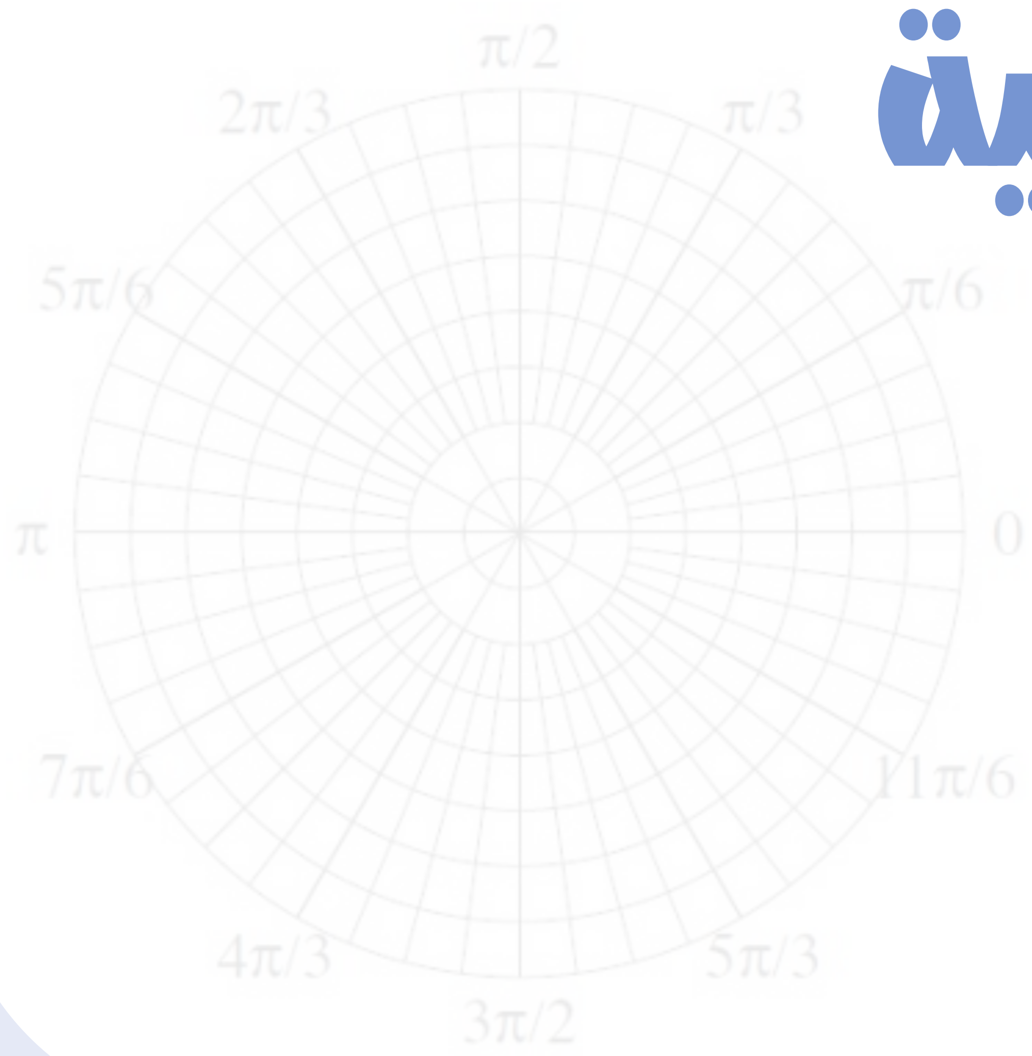
8) $\frac{3\pi}{2}$

متطابقات المجموع والفرق
(Sum and Difference Identities)

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

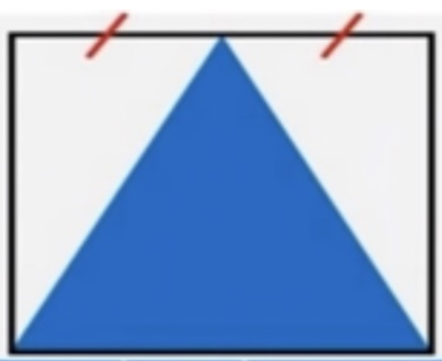
9) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 15$ باستعمال متطابقة الفرق بين زاويتين.

الاحداثيات القطبية



قدرات

إذا كانت مساحة المربع تساوي ١٦ فأوجد
مساحة الجزء المظلل؟



أ	٦	ب	٨	ج	١٢	د	١٣

فيما سبق:

درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها في الوضع القياسي. (مهارة سابقة)

والآن:

- أُمثِّل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أُمثِّل بيانيًّا معادلات قطبية بسيطة.

المفردات:

نظام الإحداثيات القطبية
polar coordinate system

القطب
pole

المحور القطبي
polar axis

الإحداثيات القطبية
polar coordinates

المعادلة القطبية
polar equation

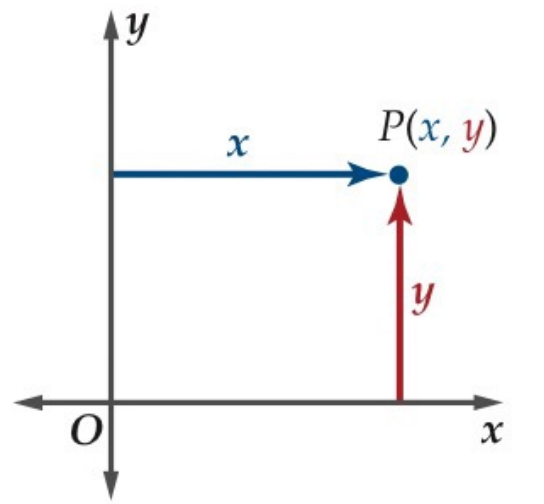
التمثيل القطبي
polar graph

لماذا

يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى، والتضاريس الأرضية. ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.

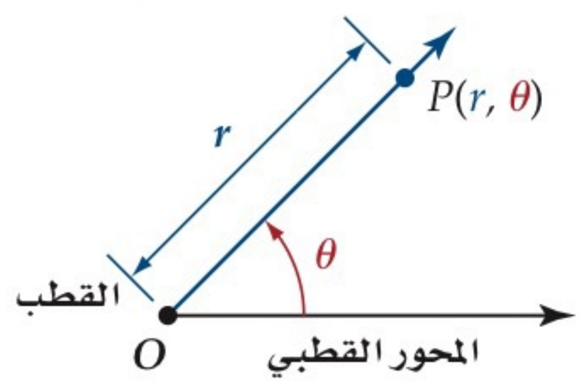
تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). وعندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x , y هما المحوران الأفقي والرأسي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما نقطة الأصل، ويرمز لها بالحرف O. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x , y) ، حيث x , y المسافتان المتّجهتان الأفقية، والرأسية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(1, \sqrt{3})$ على بُعد وحدة وحدة إلى يمين المحور y ، وعلى بُعد $\sqrt{3}$ وحدة إلى أعلى المحور x .

نظام الإحداثيات القطبية



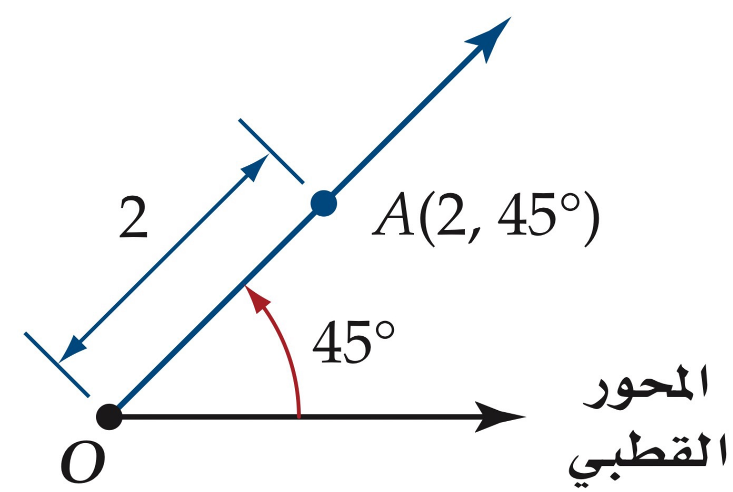
في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**.
و**المحور القطبي** هو نصف مستقيم يمتد أفقيًّا من القطب إلى اليمين.
يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات** (r, θ) ، حيث r المسافة المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا، فمن الممكن أن تكون r سالبة) من القطب إلى النقطة P ، و θ الزاوية المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا) من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، ولتمثيل النقطة P بالإحداثيات القطبيّة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ إذا كانت r موجبة. أما إذا كانت سالبة، فإن P تقع على نصف المستقيم المقابل (الامتداد) لضلع الانتهاء للزاوية θ .

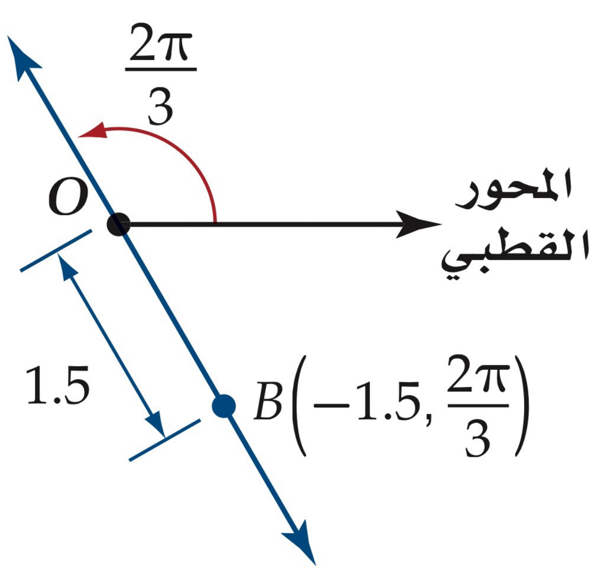
تمثيل الإحداثيات القطبية

مثال مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

(a $A(2, 45°)$

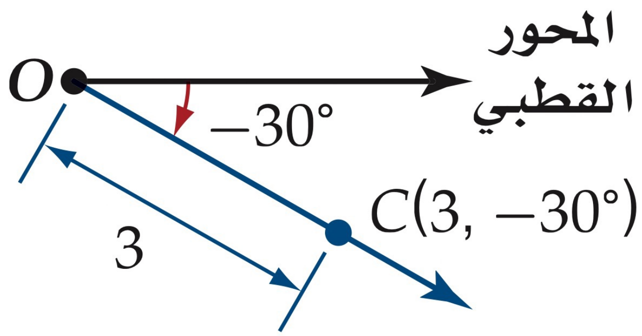


(b $B\left(-1.5, \dfrac{2\pi}{3}\right)$



مثال مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

c) $C(3, -30°)$



تحقق من فهمك

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

1A) $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$

1B) $E(2.5, 240°)$

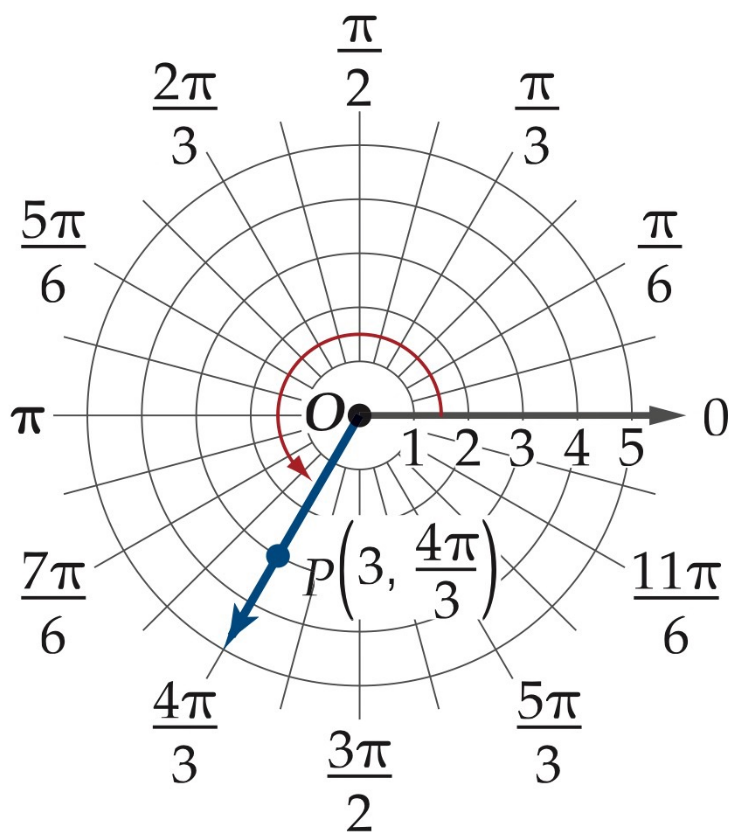
تحقق من فهمك مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

1C) $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثال مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

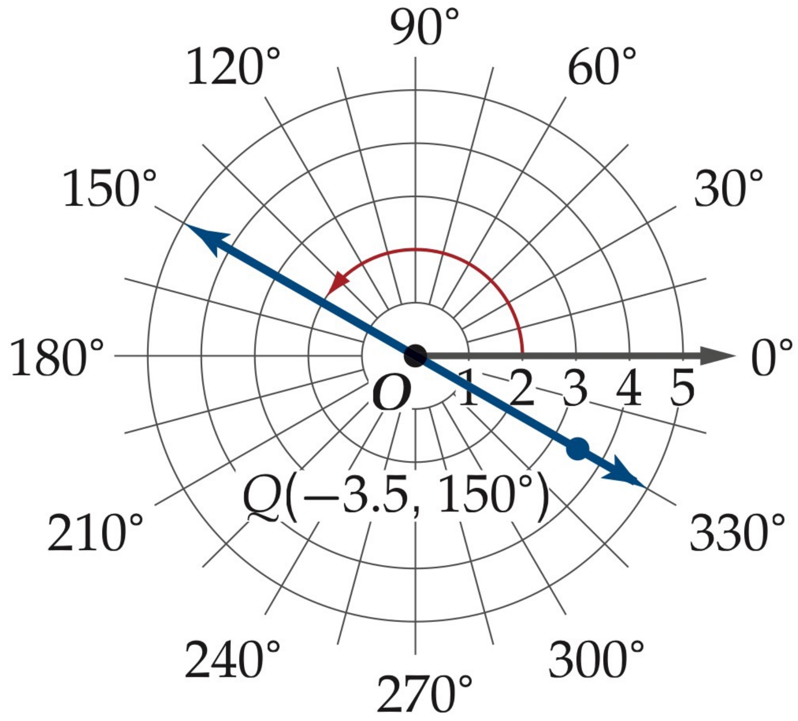
a) $P\left(3, \dfrac{4\pi}{3}\right)$



تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثال مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

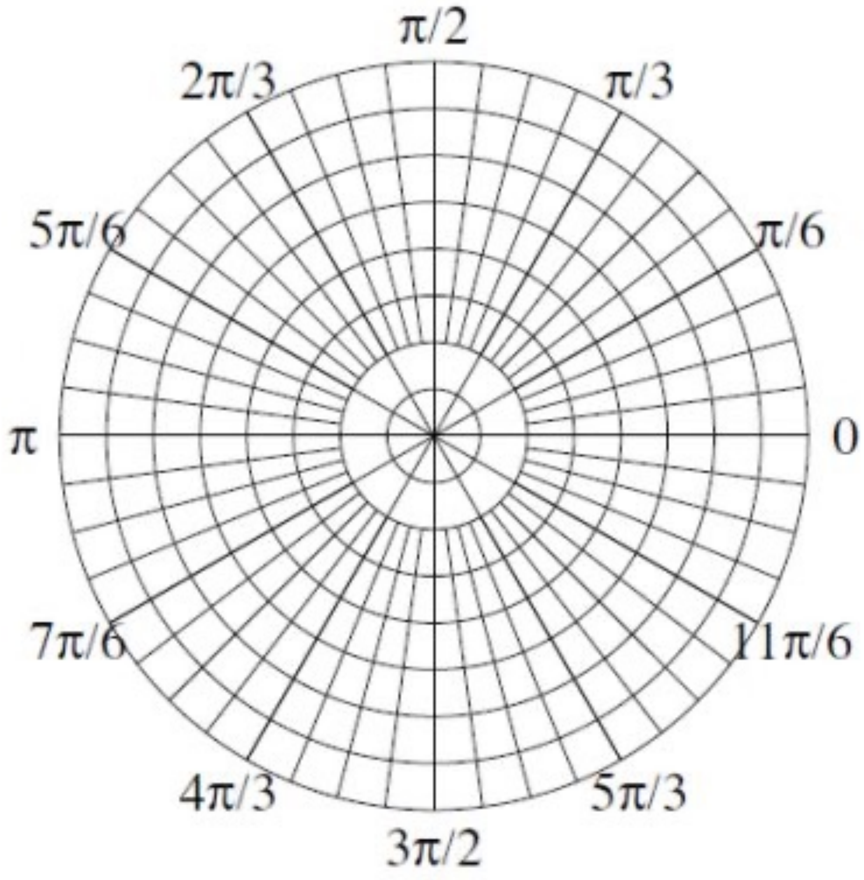
b) $Q(-3.5, 150°)$



تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

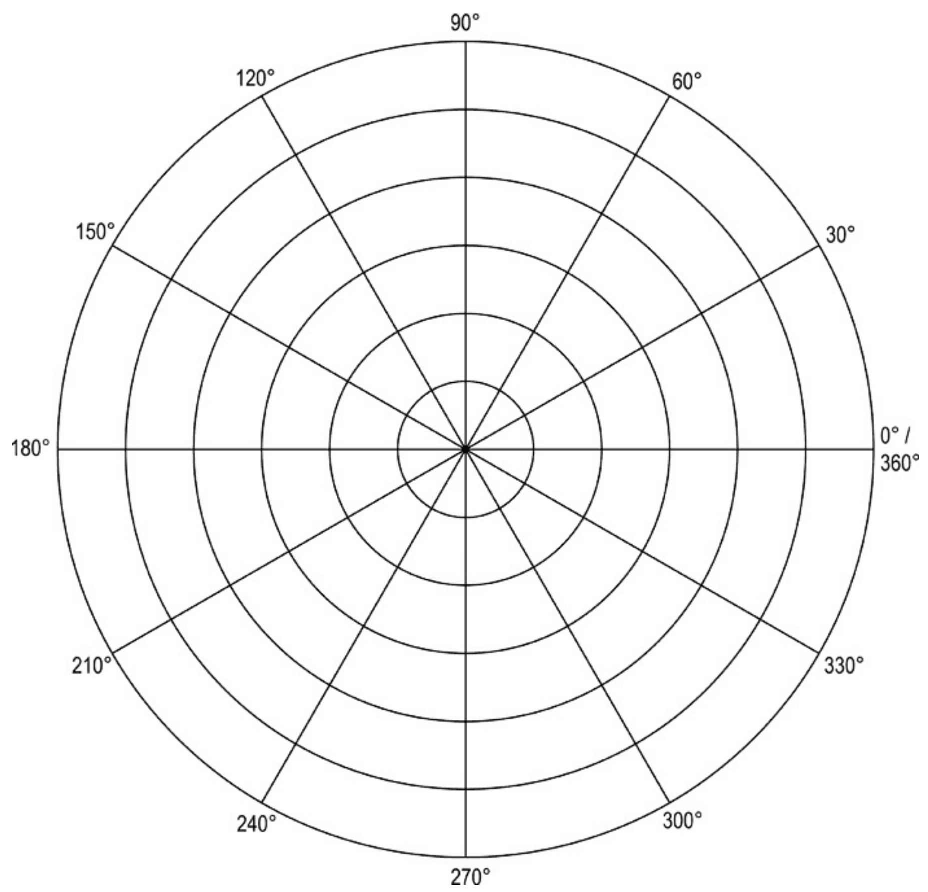
(2A $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$



تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

(2B $S(-2, -135°)$

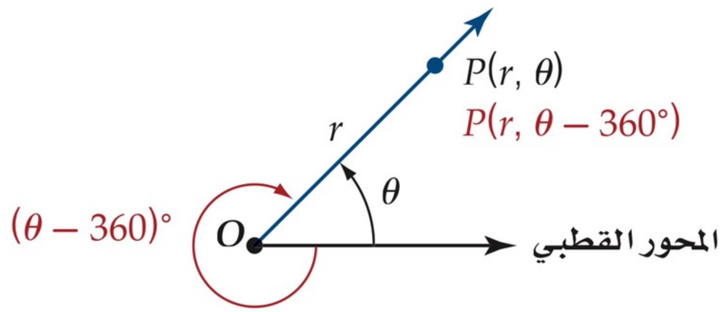


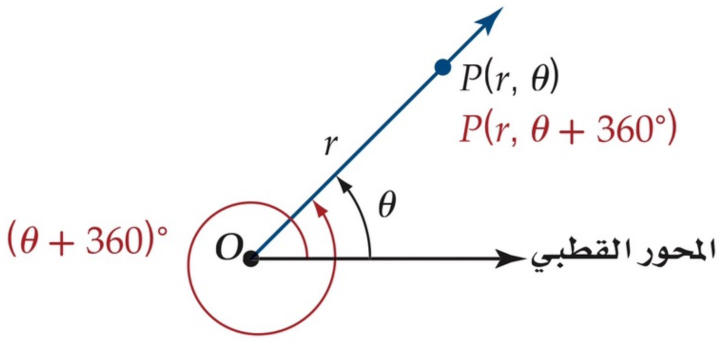
إرشادات للدراسة

القطب

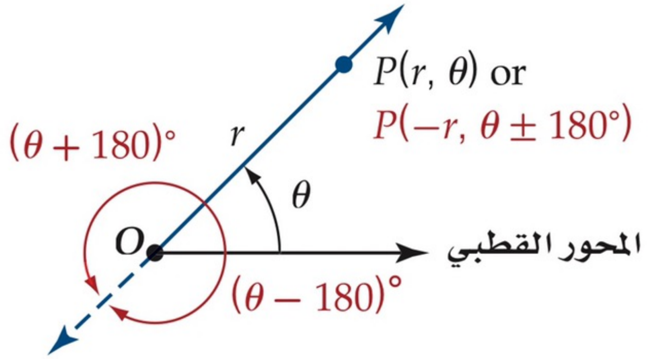
يمكن تمثيل القطب بالنقطة $(0, \theta)$ ، حيث θ أي زاوية.

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.





وكذلك لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ ، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثِّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.

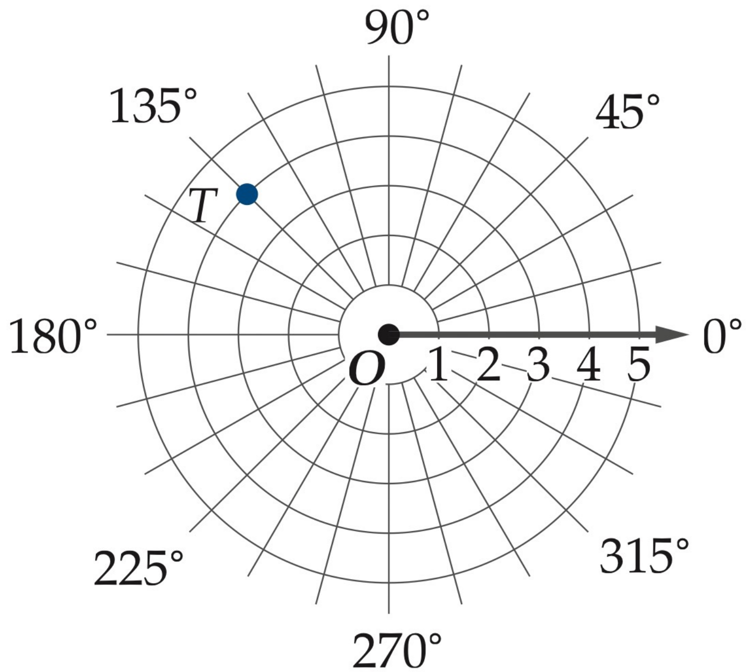


وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

تمثيلات قطبية متعددة

مثال

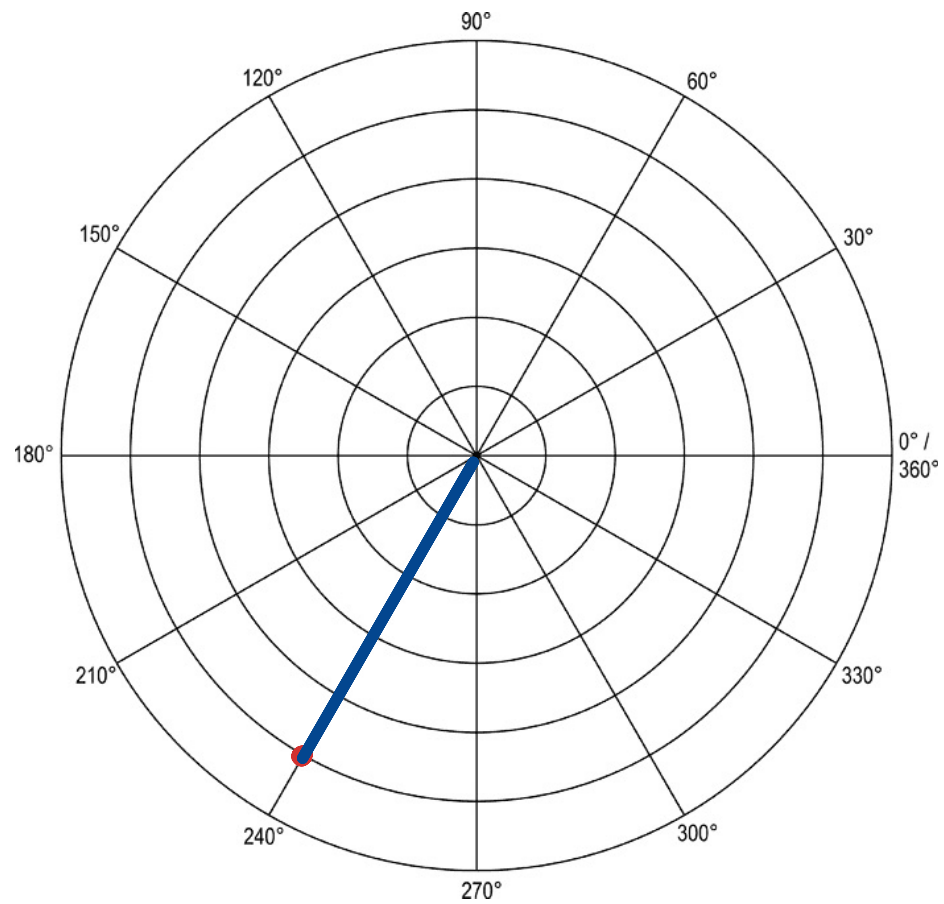
إذا كانت $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، أو $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

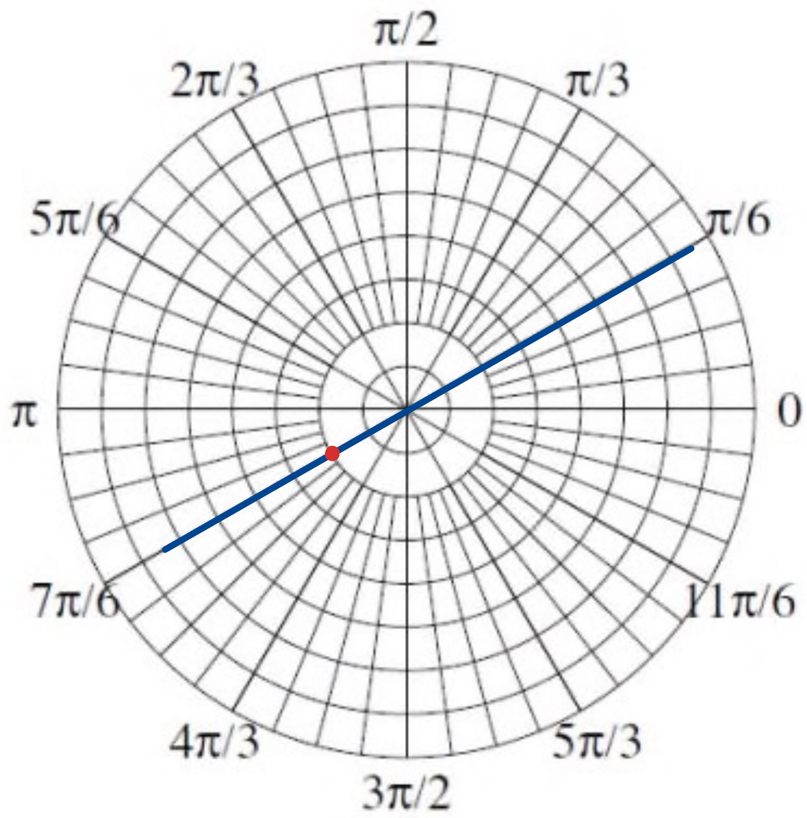
3A) $(5, 240°)$



تحقق من فهمك

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، أو $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

3B) $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$



التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلةً قطبيةً**. فمثلًا : $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

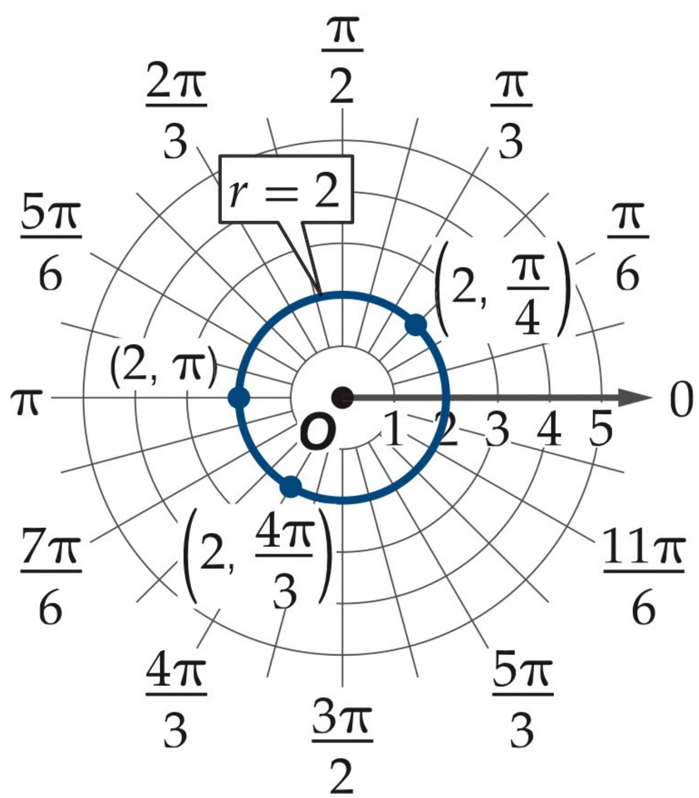
لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = a$ ، و $y = b$ أساسيًّا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$ ، و $\theta = h$ ، حيث k, h عددان حقيقيان، يُعَدُّ أساسيًّا فى نظام الإحداثيات القطبية.

التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مثال

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

$r = 2$ (a

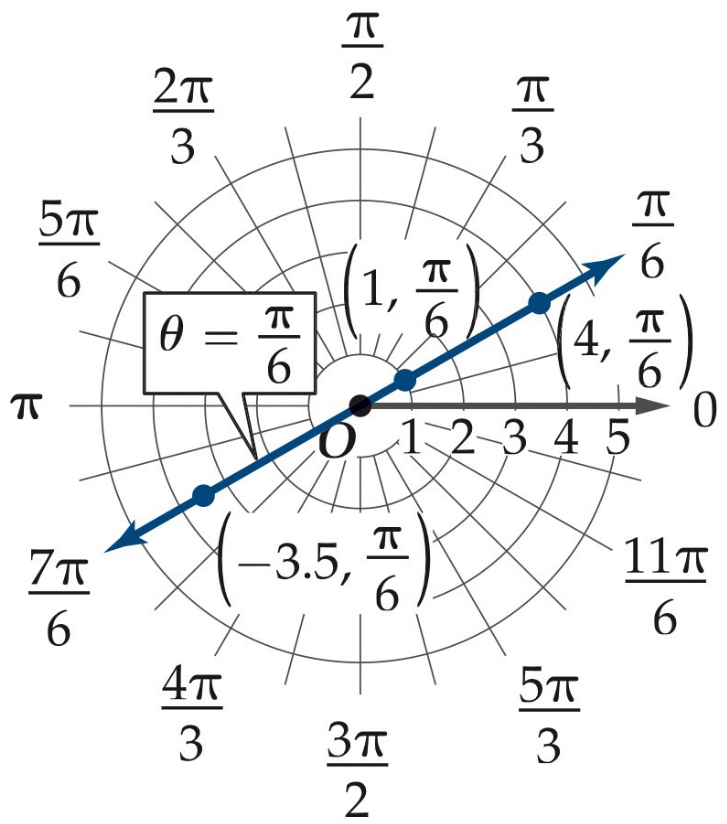


التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مثال

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

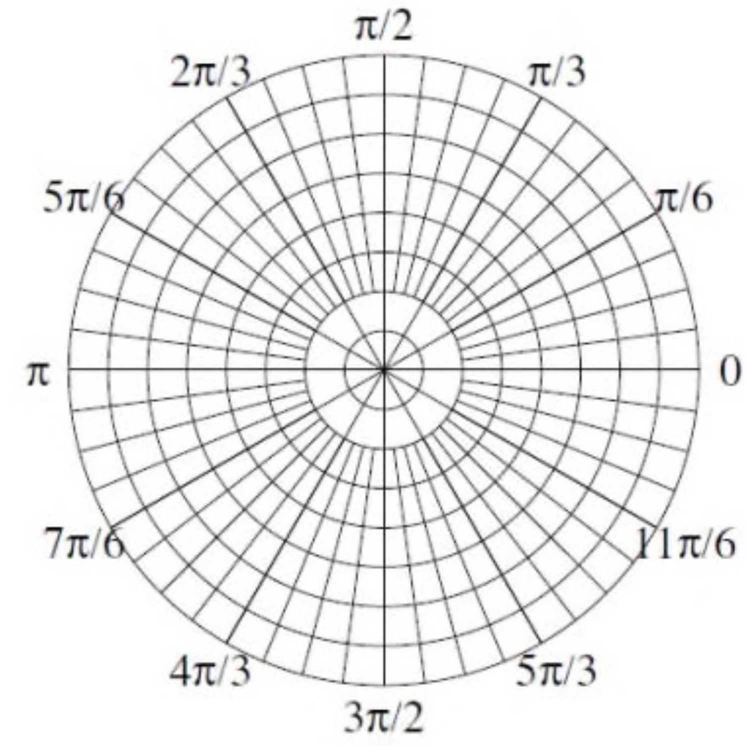
$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad (b$$



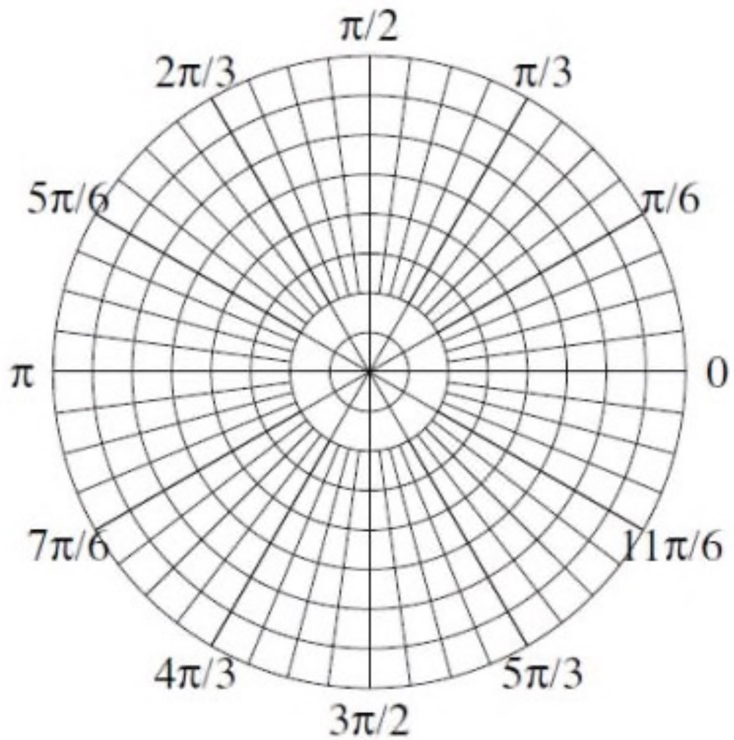
تحقق من فهمك

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

4A) $r = 3$



4B) $\theta = \frac{2\pi}{3}$



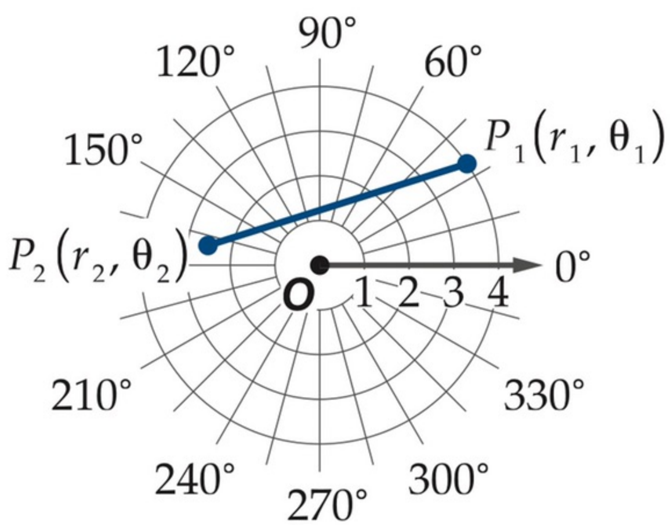
يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

مفهوم أساسي

المسافة بالصيغة القطبية

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 ، بالصيغة:

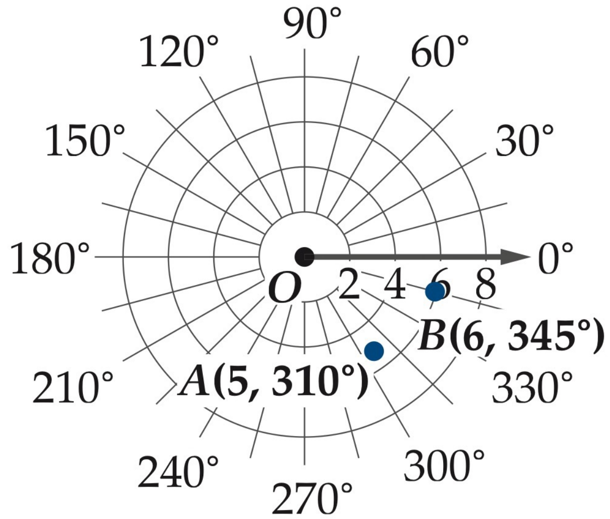
$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



إيجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

مثال **حركة جوية :** يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°)$, $B(6, 345°)$ ، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

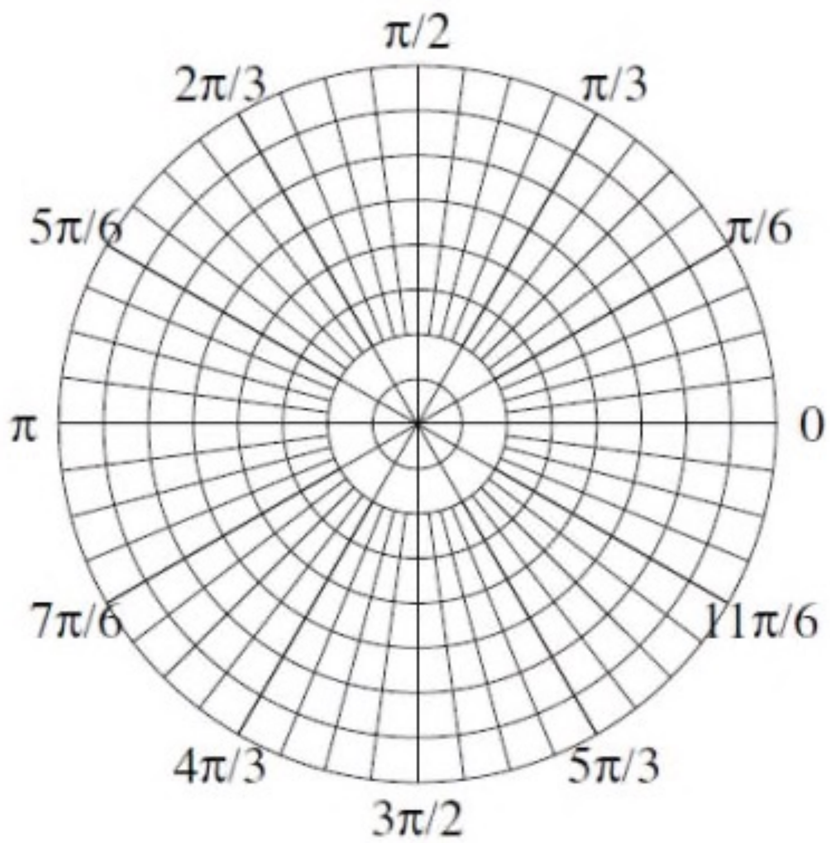


b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi ، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

تحقق من فهمك

5) **قوارب:** يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°)$, $(8, 150°)$ ، حيث r بالأميال.

5A) فمثّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

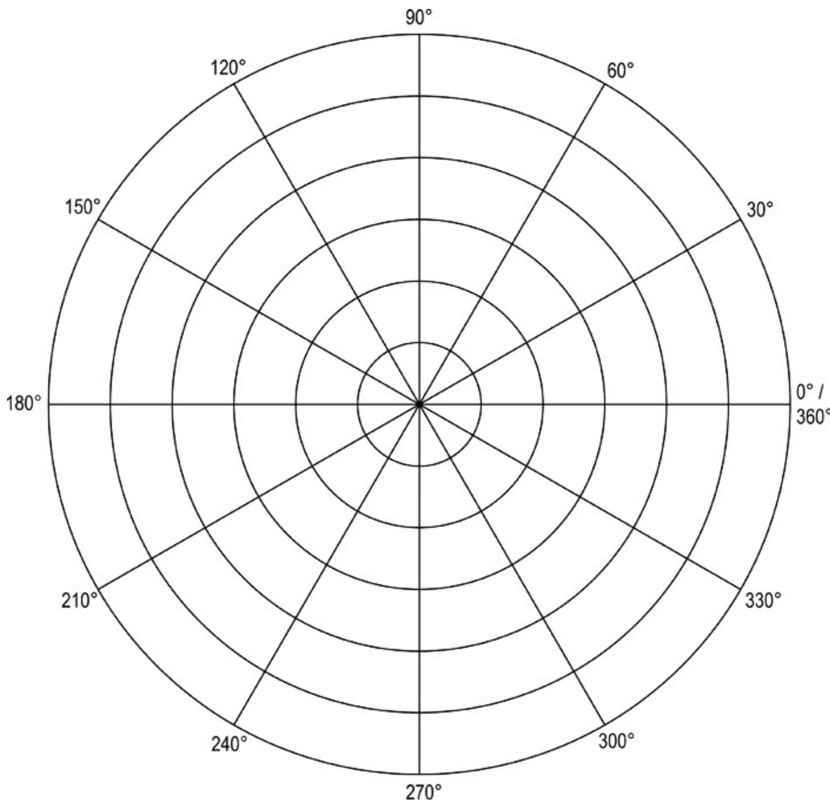


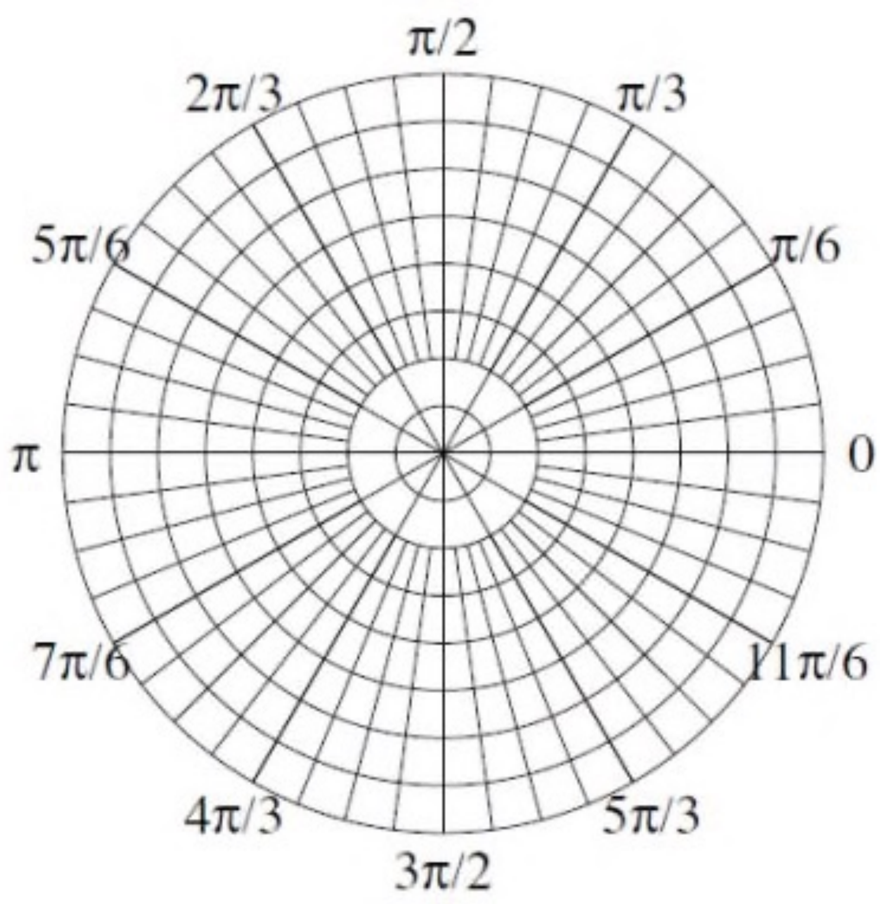
5B) ما المسافة بين القاربين؟

تأكد مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي.

1) $R(1\,,\,120°)$

3) $F\left(-2\,,\,\frac{2\pi}{3}\right)$





تأكد

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

12) $(1, 150°)$

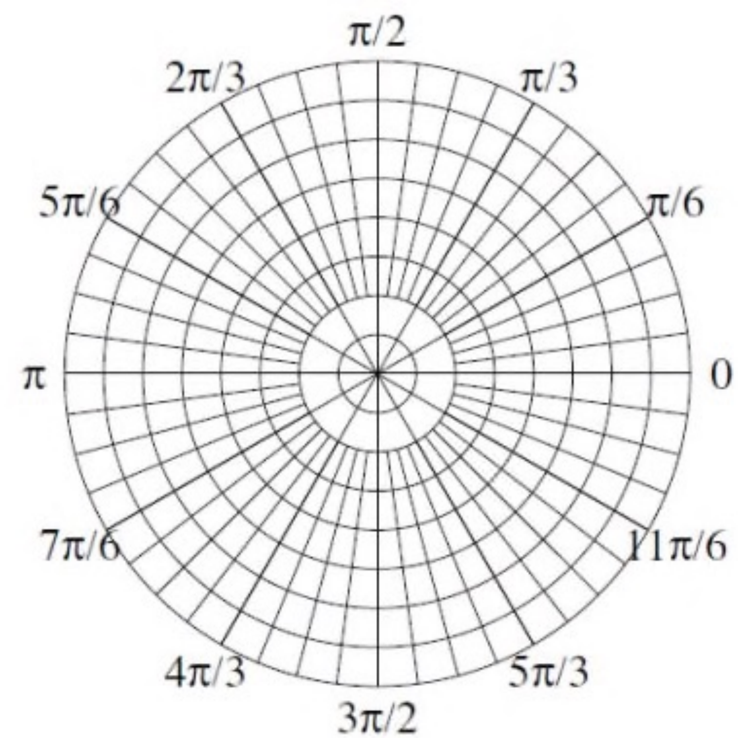
15) $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$

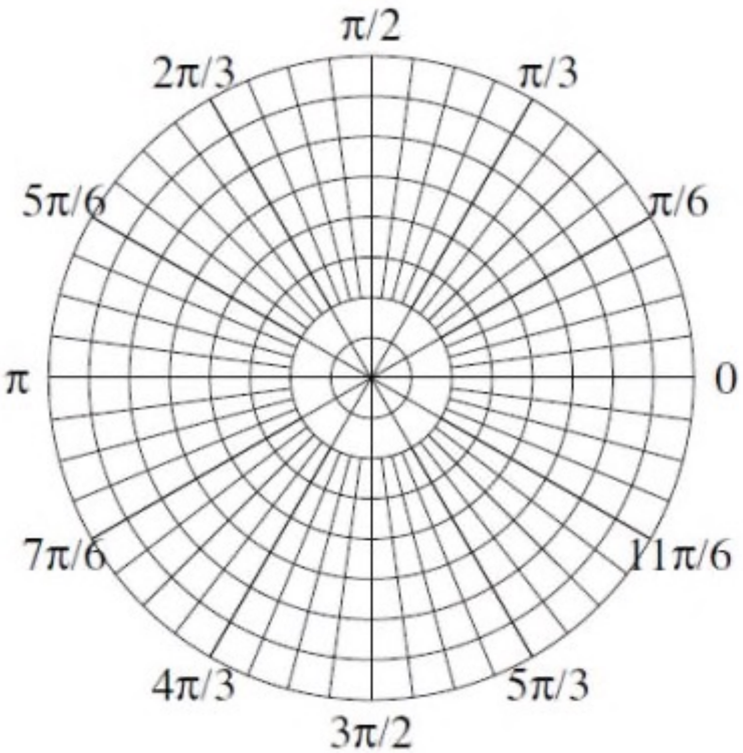
تأكد

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

20) $r = 1.5$

21) $\theta = 225°$





تأكد

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي

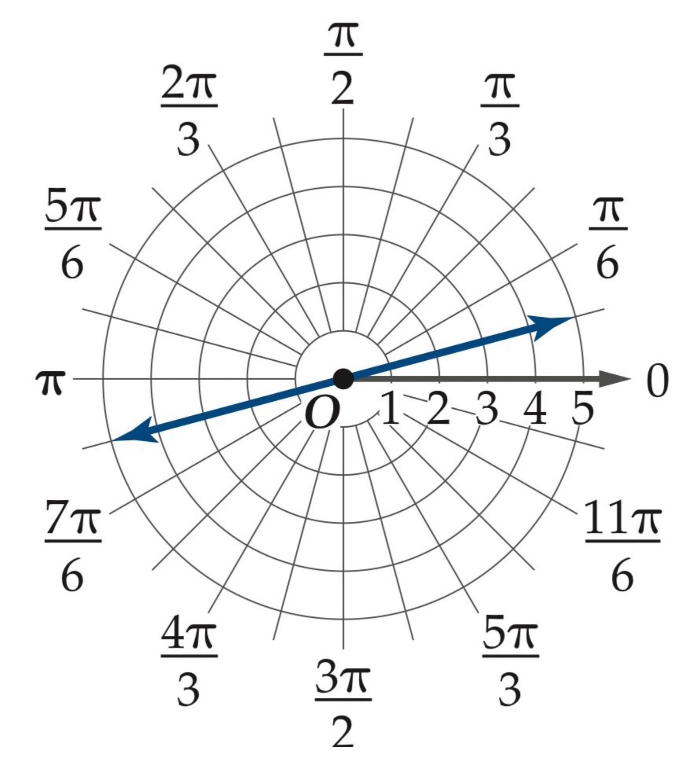
25) $(2, 30^\circ), (5, 120^\circ)$

29) $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

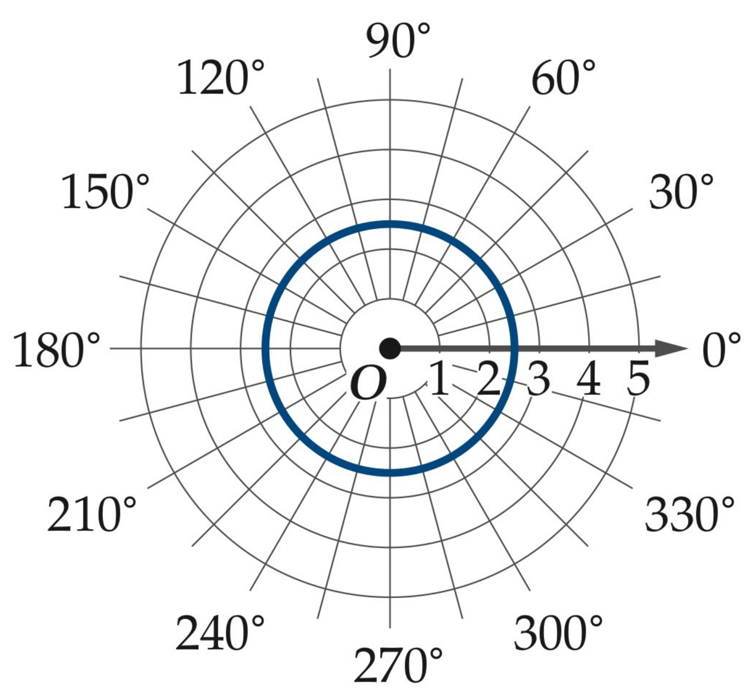
تدرب

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

52)

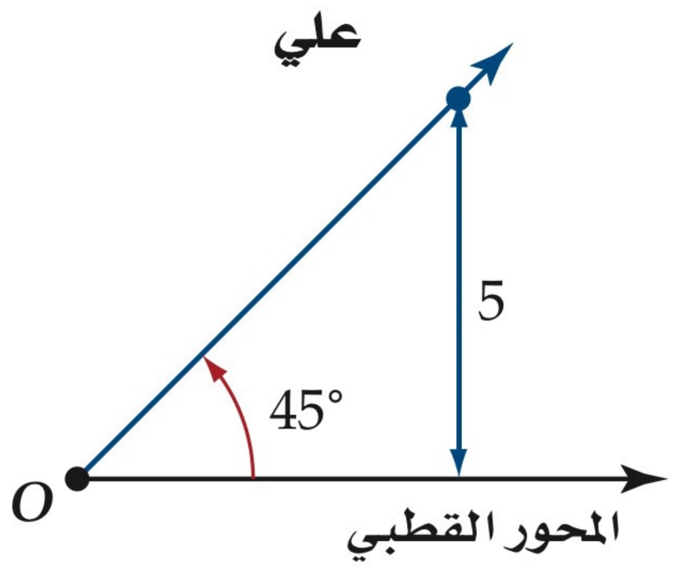


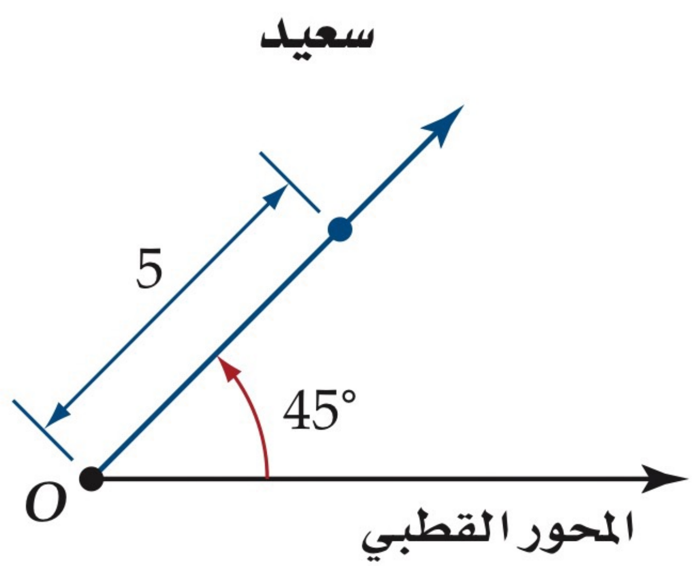
53)



تدرب

58) **اكتشف الخطأ:** قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك.





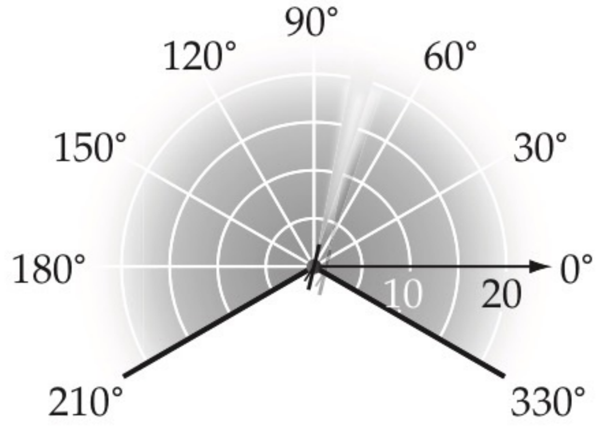
تدرب

71) أيُّ المتجهات الآتية يمثِّل $\overrightarrow{RS}$، حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$ ، ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟

A $\langle 7, -10 \rangle$ **C** $\langle -7, 10 \rangle$

B $\langle -3, 10 \rangle$ **D** $\langle -3, -10 \rangle$

72) يستطيع رشاش ماء رشّ منطقة على شكل قطاع دائري يمكن تحديدها بالمتباينتين $0 \le r \le 20$ ، $-30° \le \theta \le 210°$ ، حيث r بالأقدام. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟



A 821 ft^2 **C** 852 ft^2

B 838 ft^2 **D** 866 ft^2

تحصيلي

أي من النقاط التالية يُعد تمثيلاً آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟

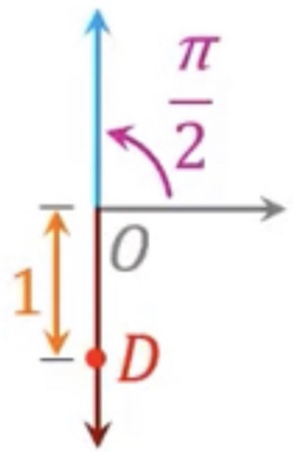
Ⓐ $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

Ⓑ $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

Ⓒ $\left(2, \frac{-11\pi}{6}\right)$

Ⓓ $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

تمثيل النقطة D في الشكل المجاور هو ..



Ⓐ $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$

Ⓑ $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

Ⓒ $(-1, \pi)$

Ⓓ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$