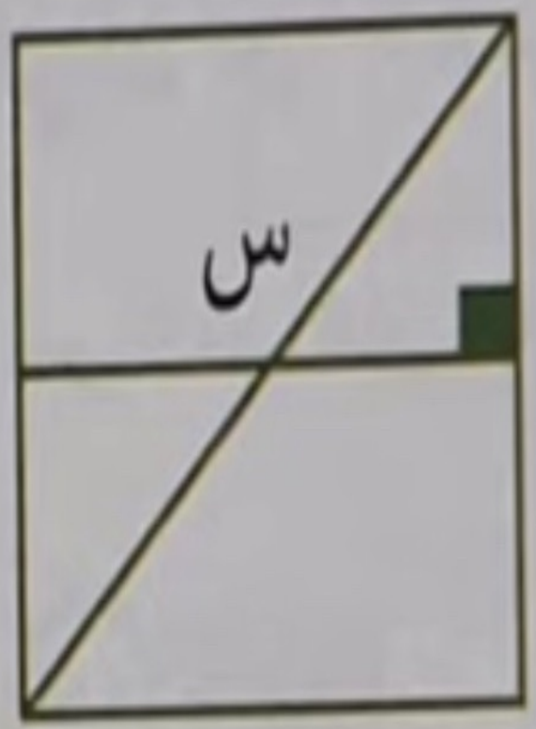
الدوال الدائرية

قدرات

في الشكل المقابل مربع أوجد قياس س



أ. ١٥٠ °

ب. ١٣٠ °

ج. ١٣٥ °

د. ١٠٠ °

فيما سبق:

درست إيجاد قيم دوالّ مثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية. الدرس (3-4)

والآن:

- أجد قيم دوالّ مثلَّثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.
- أستعمل خواصّ الدوالّ الدورية في إيجاد قيم دوالّ مثلَّثية.

المفردات:

دائرة الوحدة
unit circle

الدالّة الدائرية
circular function

الدالّة الدورية
periodic function

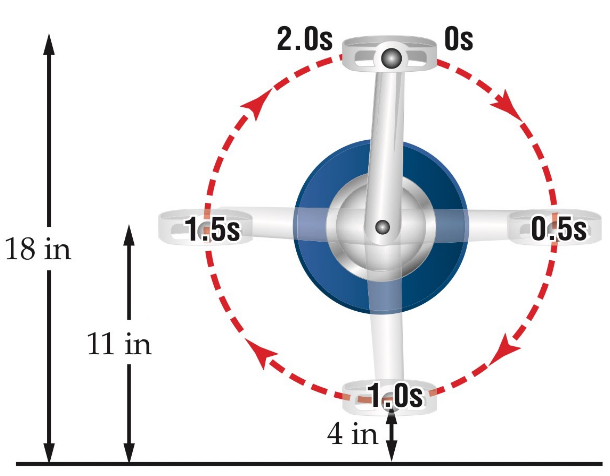
الدورة
cycle

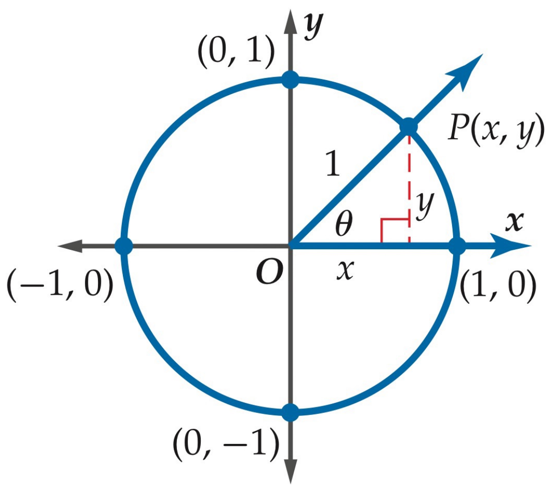
طول الدورة
period

لماذا

عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدّال في أثناء دورانه يمثّل دالّة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.

لاحظ أن البدّال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كلَّ ثانيتين.





الدوالّ الدائرية : **دائرة الوحدة** هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالّتَي: الجيب وجيب التمام.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

وبذلك فإن قيمة $\cos\theta$ هي الإحداثي x، وقيمة $\sin\theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

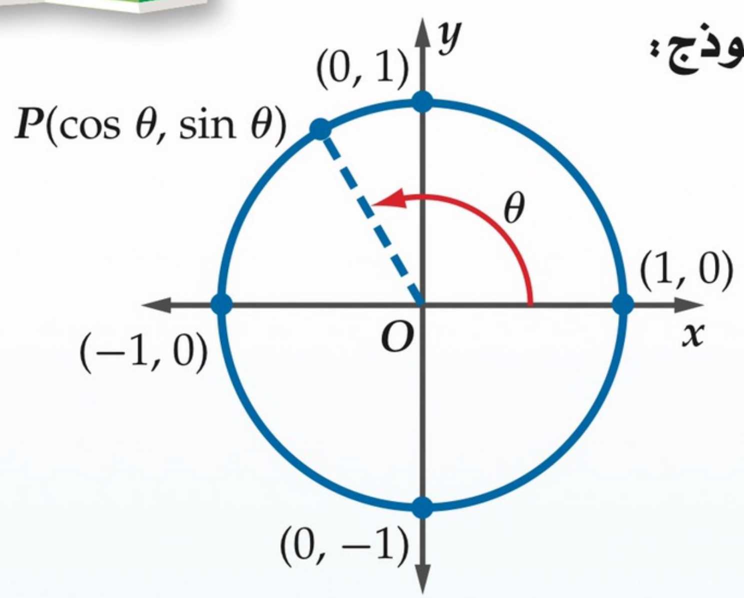
دوالّ في دائرة الوحدة

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن: $\cos\theta = x , \sin\theta = y$

الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن:
$P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

النموذج:

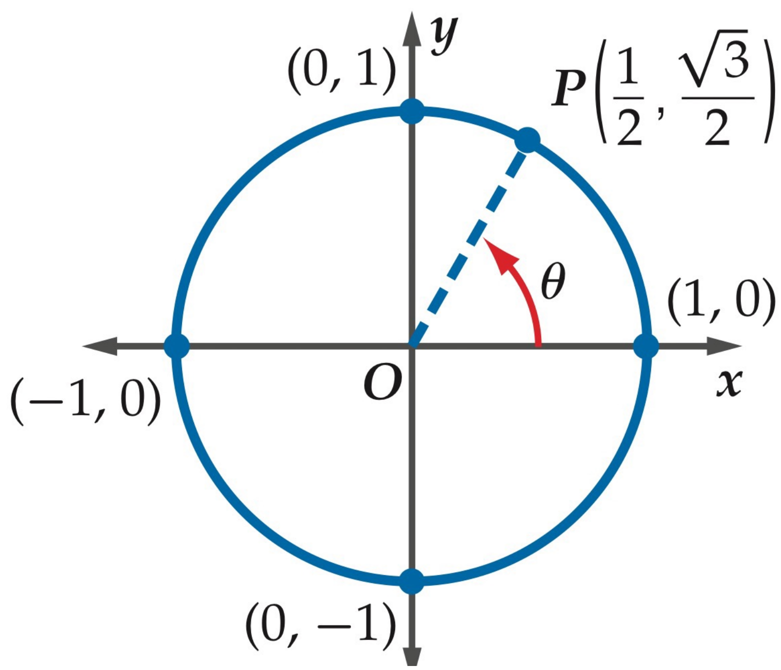


كلّ من $\cos\theta = x , \sin\theta = y$ دالّة بالنسبة إلى θ. وتُسمّى كلّ منهما **دالّة دائرية** ؛ لأن تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مثال

إيجاد قيمة الجيب وجيب التمام لزاوية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة

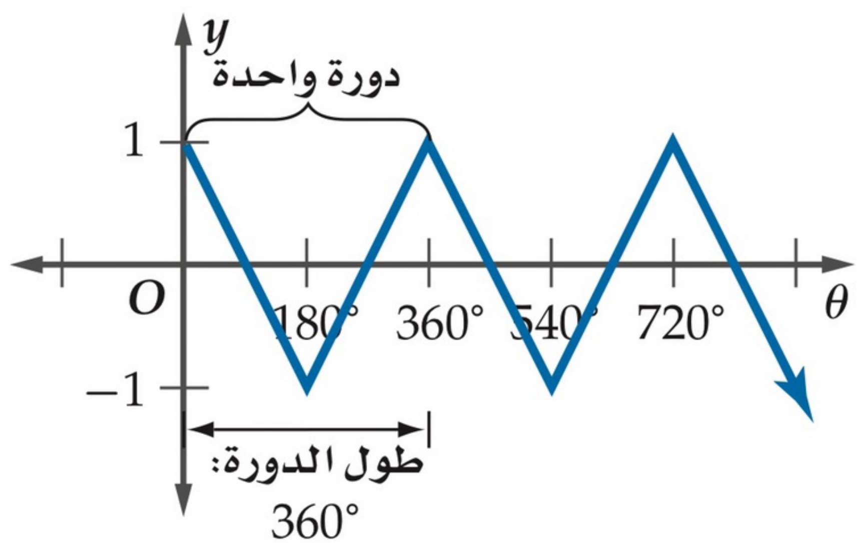
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos \theta, \sin \theta$.



تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$.

الدوالّ الدورية: في **الدوالّ الدورية** يكون شكل الدالّة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمّى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبيّن في التمثيل البياني للدالّة أدناه.



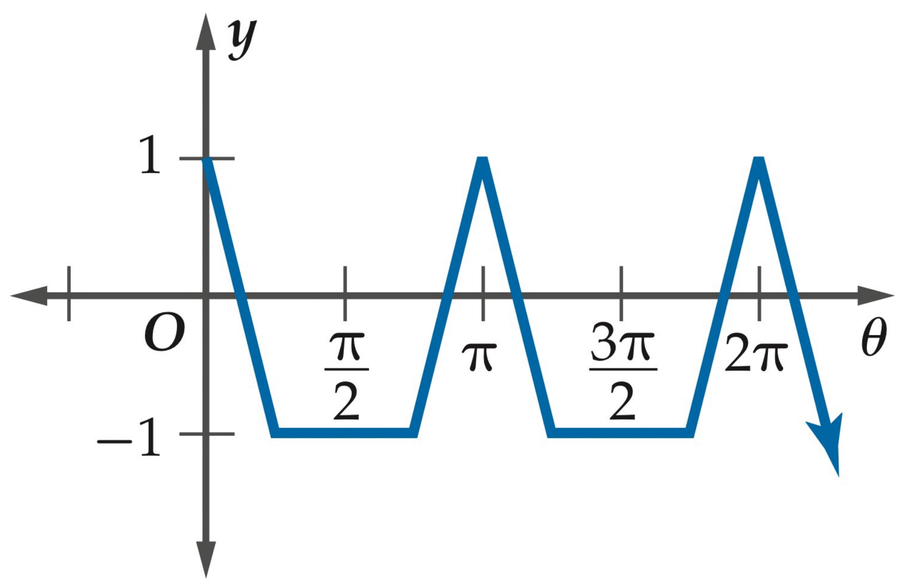
θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تتكرر الدورة كل 360°

مثال

إيجاد طول الدورة

أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



إرشادات للدراسة

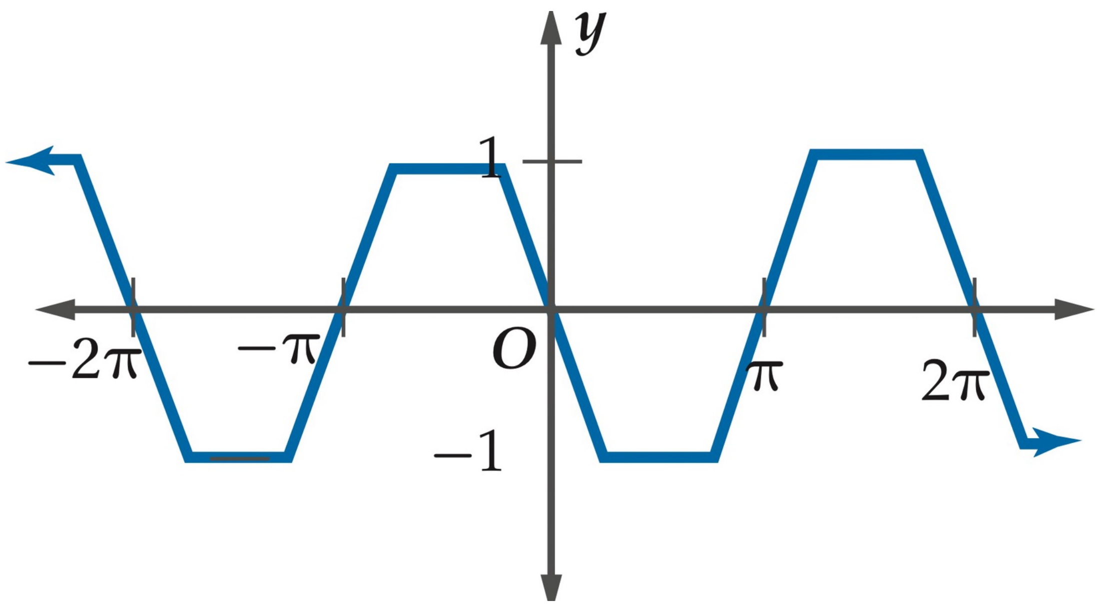
الدورات

يمكن أن تبدأ الدورة عند أيّ نقطة في منحنى الدالّة الدورية. ففي المثال 2 إذا كانت بداية الدورة عند $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط سيبدأ بالتكرار عند $\frac{3\pi}{2}$، ويكون طول الدورة هو:

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

تحقق من فهمك

أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



مثال استعمال الدوالّ الدوريَّة

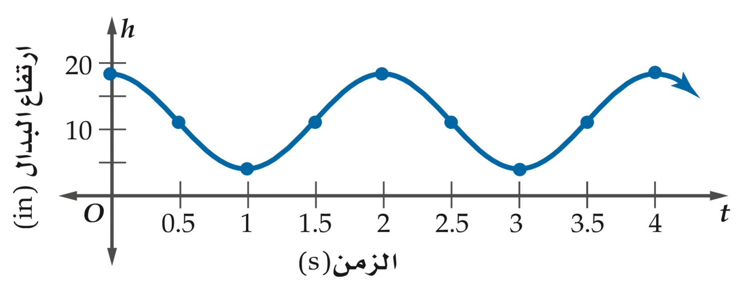
درَّاجات هوائية: عُدْ إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغيّر ارتفاع البدّال في الدرَّاجة الهوائية بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:

a) أنشئ جدولًا يوضَح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية:
0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 , 2.5, 3

الارتفاع (in)	الزمن (s)
18	0
11	0.5
4	1.0
11	1.5
18	2.0
11	2.5
4	3.0

b) أوجد طول دورة الدالّة.

c) مثّل الدالّة بيانيًّا. افترض أن المحور الأفقي يُمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يُمثّل الارتفاع h.

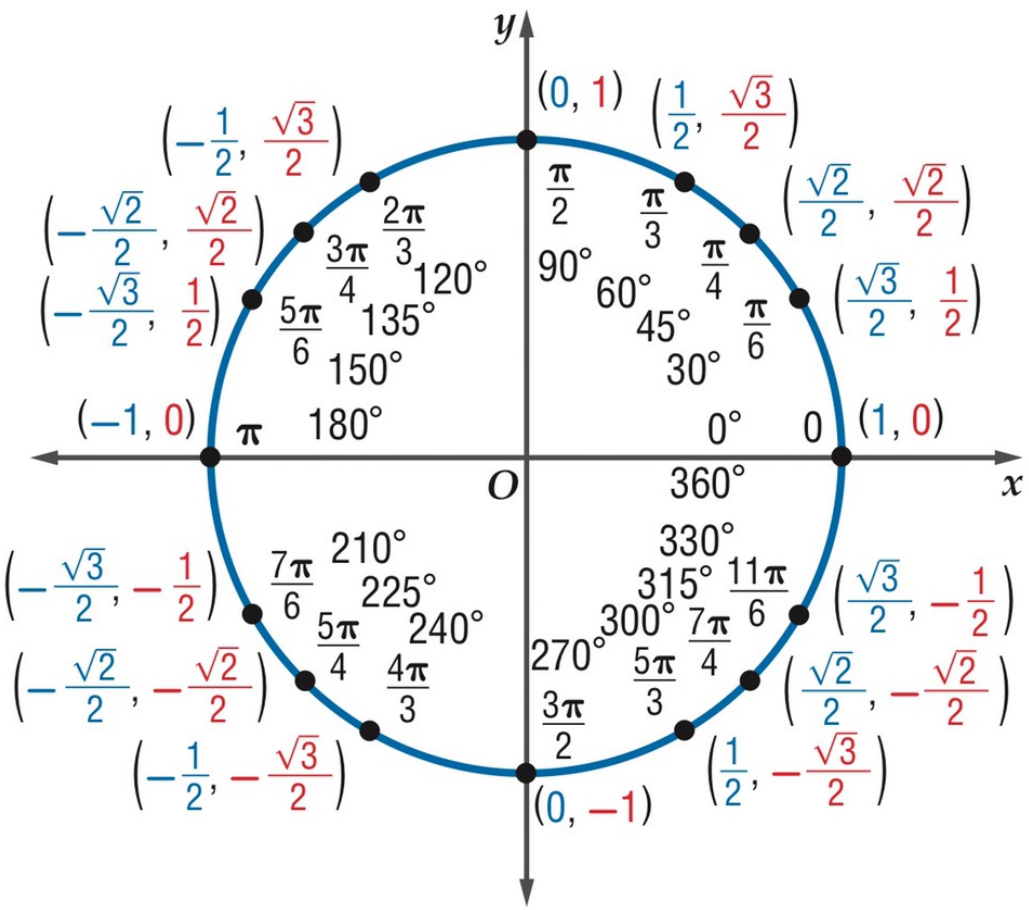


تحقق من فهمك

3) **دراجات هوائية** افترض أن البدّال للدرّاجة الهوائية المحدَّدة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدَّل دورة واحدة لكل ثانية.

A) أنشئ جدولًا يوضّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

B) أوجد طول دورة الدالّة ومثّلها بيانيًّا.

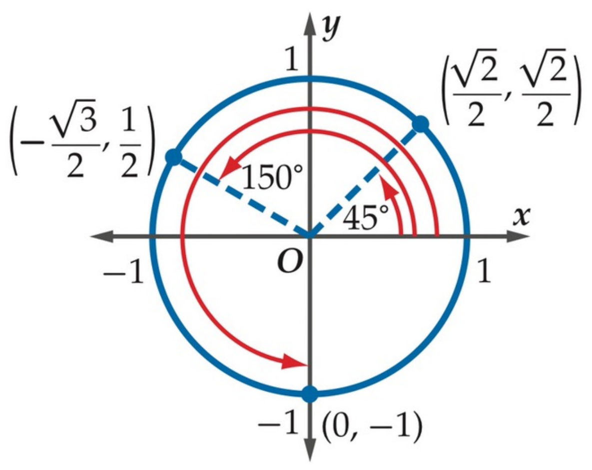


يبيِّن الشكل المجاور القيم الدقيقة لكلٍّ من $\cos\theta, \sin\theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثِّل الإحداثي x قيمة $\cos\theta$ ، ويمثِّل الإحداثي y قيمة $\sin\theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.

يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالّتين: $\cos\theta, \sin\theta$ بيانيًّا، حيث يمثِّل المحور الأفقي قيم θ، والمحور الرأسي قيم الدالّة المطلوبة.

تتكرَّر دورة كلٍّ من دالَّتَي الجيب وجيب التمام كل °360. وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كلٍّ منهما °360 أو 2π.

إذا كانت النقاط المبيّنة في الشكل تمثّل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 45°, \theta = 150°, \theta = 270°$.

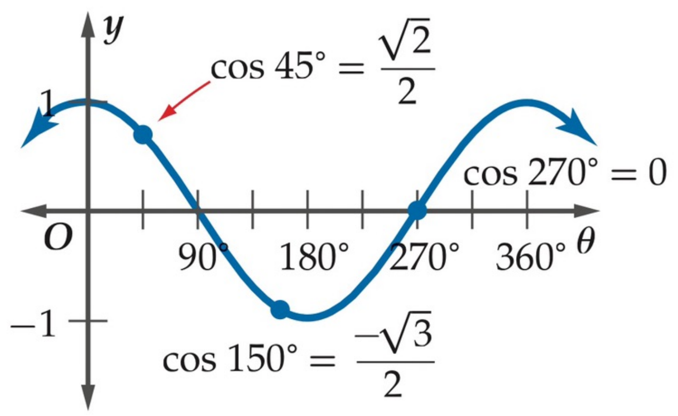


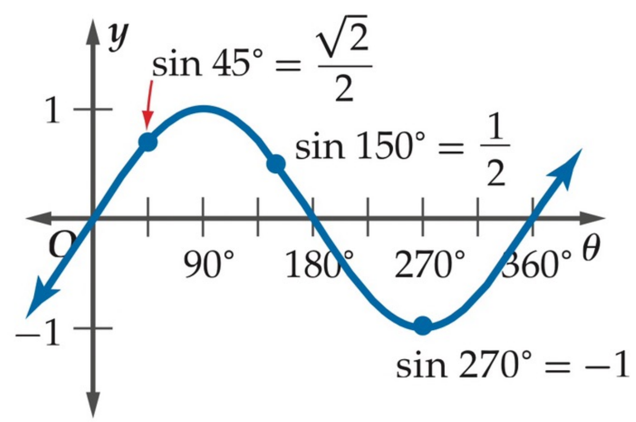
$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

كما يمكنك تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين $\sin \theta, \cos \theta$ كما يأتي:





بما أن طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين هو 360°، فإن قيم كلٍّ من الدالّتين تتكرّر كلَّ 360°.
لذلك فإن $\cos (x + 360°) = \cos x$, $\sin (x + 360°) = \sin x$

① الزاويه موجبه

اذا سالبه $+360$

② نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية

③ الزاوية المرجعية

④ اشارة الدالة

⑤ نوجد قياس الدالة

sin csc	الكل
tan cot	sec cos

$\bar{\theta} = 180 - \theta$ $\bar{\theta} = \pi - \theta$	$\bar{\theta} = \theta$
$\bar{\theta} = \theta - 180$ $= \theta - \pi$	$\bar{\theta} = 360 - \theta$ $= 2\pi - \theta$

مثال

حساب قيم الدوالّ المثلَّثية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية ممّا يأتي:

$\cos 480^\circ$ (a

$\sin \frac{11\pi}{4}$ (b

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية ممّا يأتي:

4A) $\sin 420°$

4B) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

تأكد

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

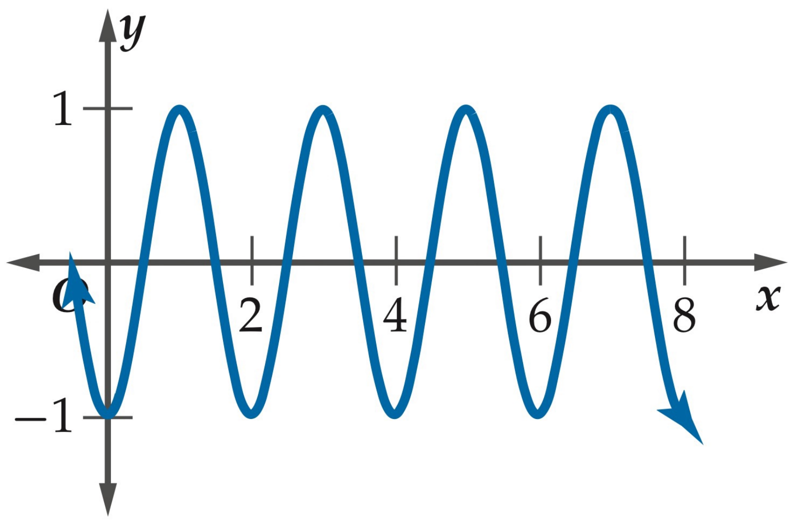
1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

تأكد

أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.

3)



تأكد

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية ممّا يأتي:

6) $\sin\frac{13\pi}{6}$

7) $\sin(-60^\circ)$

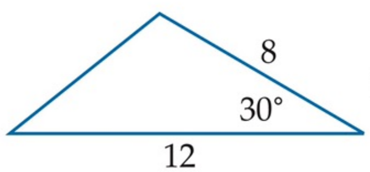
تدرب

تدريب على اختبار

37) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8$ يساوي:

A 5   **B** 13   **C** 31   **D** 161

38) **هندسة :** مساحة المثلَّث الموضَّح في الشكل المجاور تساوي:



A 48   **B** 96   **C** 41.6   **D** 24

تحصيلي

طول الدورة للدالة المجاورة ..

Ⓐ π

Ⓑ 2π

Ⓒ 3π

Ⓓ 4π