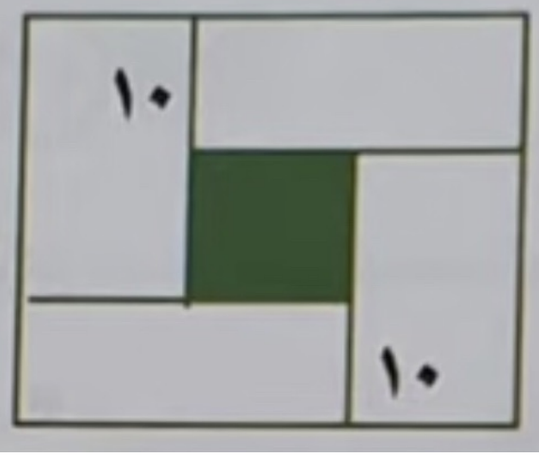
الدوال المثلثية العكسية

قدرات

حسب الأطوال علي الرسم احسب مساحة المربع الصغير



أ ٢٠ ب ١٠

ج ١٦ د ٨

فيما سبق:

درست تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا. الدرس (7-4)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية العكسية.
- أحل معادلات باستعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية.

المفردات:

القيم الأساسية
principal values

دالّة الجيب العكسية
Arcsine function

دالّة جيب التمام العكسية
Arccosine function

دالّة الظل العكسية
Arctangent function

المعادلة المثلَّثية
Trigonometric equation

لماذا

لقد تعلّمت كيف تستعمل الدوالّ المثلّثية العكسية لإيجاد قياسات الزوايا الحادّة. مثال: يتكئ رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in، ويصل ارتفاعه إلى 75 in . ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالّة الظلّ.

$$\tan\theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلّها 0.2 مستعملًا الآلة الحاسبة العلمية.

SHIFT tan .2 = 11.30993247

إذن قياس الزاوية θ حوالي 11° .

١ دالة الجيب العكسية $(\sin\theta)$

$y = \text{Arc}\sin\theta$ ← معكوس

$y = \sin^{-1}\theta$

٢ دالة جيب تمام $\cos\theta$

$y = \text{Arc}\cos\theta$

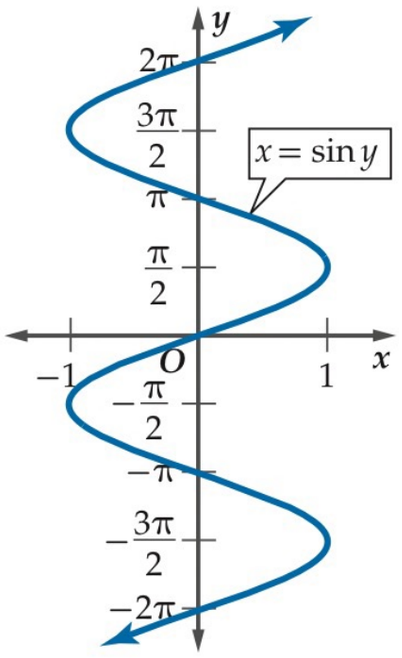
$y = \cos^{-1}\theta$

٣ دالة الظل $\tan\theta$ عكسية

$y = \text{Arc}\tan\theta$

$y = \tan^{-1}\theta$

معكوس الدالّة المثلَّثيّة: إذا علمت قيمة الدالّة المثلَّثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالّة لإيجاد قياس الزاوية. تذكّر أن معكوس الدالّة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: x , y. فمعكوس: $y = \sin x$ ، هو $x = \sin y$ ، الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



لاحظ أن معكوس الدالّة ليس دالّة لوجود عدد من قيم y لكلِّ قيمة من قيم x.

لكن إذا تمَّ تحديد مجال الدالّة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$،

فإن المعكوس يكون دالّة عكسية.

تُسمّى القيم في هذا المجال المحدّد **القيم الأساسية**. فالدوالّ المثلَّثية ذات المجال المحدّد تُمثّل بأحرف كبيرة، هكذا:

- $y = \text{Sin } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \text{Cos } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \pi$
- $y = \text{Tan } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

يمكنك استعمال الدوالّ ذات المجالات المحددة لتعريف دوالّ عكسية: لكلٍّ من دالّة الجيب، ودالّة جيب التمام ودالّة الظلّ وهي **دالّة الجيب العكسية**، و**دالّة جيب التمام العكسية**، و**دالّة الظلّ العكسية** كما يأتي:

إرشادات للدراسة

رموز الدوالّ العكسية

يُرمز للدوالّ العكسية أحيانًا ببعض الرموز الأخرى مثل:

دالّة الجيب العكسية
$y = \text{Arcsin } x$

دالّة جيب التمام العكسية
$y = \text{Arccos } x$

دالّة الظل العكسية
$y = \text{Arctan } x$

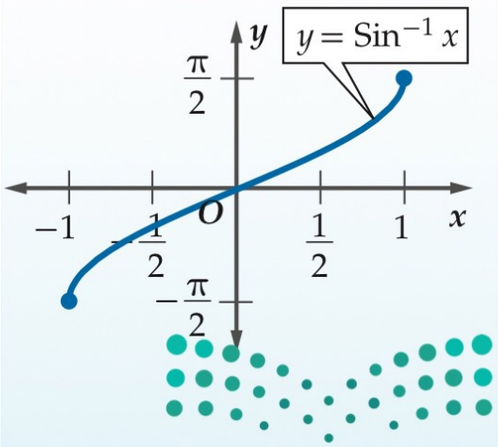
مفهوم أساسي

الدوالّ المثلَّثية العكسية

أضف إلى مطويتك

الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى
دالّة الجيب العكسية	$y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \le y \le 90^\circ$
دالّة جيب التمام العكسية	$y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0^\circ \le y \le 180^\circ$
دالّة الظل العكسية	$y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ < y < 90^\circ$

نموذج



وزارة التعليم
Ministry of Education

في العلاقة $y = \cos^{-1} x$، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ فإن $y = 60^\circ, 300^\circ$، كما أن كلَّ زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين بضلع الانتهاء تُعدّ قيمة لـ y أيضًا. أما في الدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$، فإذا كانت $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60^\circ$ فقط.

إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية العكسية

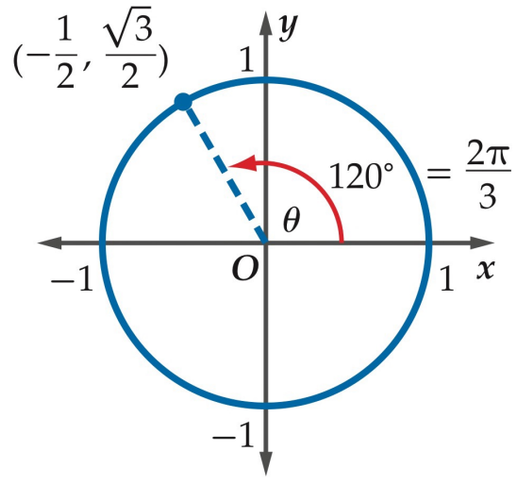
مثال أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \textbf{(a}$$

مراجعة المفردات

الدوالّ العكسية

f, f^{-1} كلٌّ منهما دالّة عكسية للأخرى تعني: $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.



إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية العكسية

مثال أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

Tan $^{-1}$1 (b

مراجعة المفردات

الدوالّ العكسية

كلٌّ منهما دالّة f, f^{-1} عكسية للأخرى تعني: $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

(1A $\cos^{-1} 0$

(1B $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

إيجاد قيمة مثلَّثية

مثال

أوجد قيمة $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$ مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

تحقّق من فهمك

أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة:

(2A $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$

(2B $\cos\left(\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

حَلُّ المعادلات المثلَّثية باستعمال الدوالّ العكسية : **المعادلة المثلَّثية** هي معادلة تحتوي على دوالّ مثلَّثية بزوايا مجهولة القياس. وحَلُّ المعادلة المثلَّثية يعني: إيجاد قياس الزوايا المجهولة، والتي دوالّها المثلَّثية تجعل المعادلة المثلَّثية صحيحة، وذلك بإعادة كتابتها باستعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية.

مثال

إذا كان $\mathbf{Sin\ \theta = -0.35}$، فإن قياس الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

تحقّق من فهمك

3) إذا كان $\text{Tan}\,\theta = 1.8$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

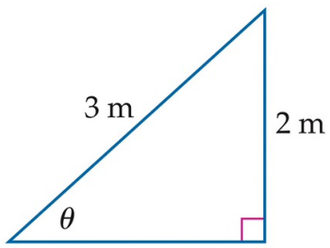
A $0.03°$ **C** $60.9°$

B $29.1°$ **D** لا يوجد حلّ

استعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية

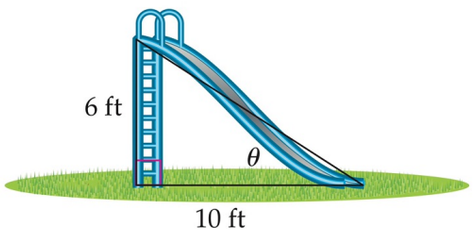
مثال

لعبة التزحلق: لعبة تزحلق للأطفال، ارتفاعها 2 m ، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تصنعها لعبة التزحلق مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.



تحقق من فهمك

4) تزلج: يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



تأكد

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

1) $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$

2) $\mathrm{Tan}^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

3) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(-1\right)$

تأكد

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

4) $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

5) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}1\right)$

6) $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

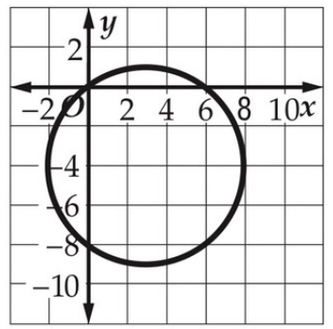
8) $\text{Cos}\ \theta = 0.9$

9) $\text{Sin}\ \theta = -0.46$

تدرب

تدريب على اختبار

40) إجابة قصيرة: أوجد معادلة الدائرة الممثَّلة في الشكل الآتي:



41) إذا كان $g(x) = 4 - 2x$, $f(x) = 2x^2 - 3x$ ، فأوجد $g[f(x)]$.

A $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

B $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

C $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

D $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

تحصيلي

موجبه

قياس الزاوية $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ يساوي ..

A $-45°$

B $45°$

C $90°$

D $180°$

تحصيلي

قيمة $\sin^{-1}(\cos 72°)$ تساوي ..

(A) $72°$

(B) $18°$

(C) $38°$

(D) $108°$