الدوال المثلثية للزوايا

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة. الدرس (1-4)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيِّ زاوية.
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية.

المفردات:

الزاوية الربعية

quadrantal angle

الزاوية المرجعية

reference angle

قدرات

شخص لديه مبلغ من المال ، أعطى نصفه لأخية وأعطى أخته ثلث الباقي وبقي معه ١٢٠ ريال ، فكم المبلغ الذي كان معه

أ/ ٢٤٠ ب/ ٣٦٠ ج/ ٦٠٠ د/ ١٢٠٠

لماذا

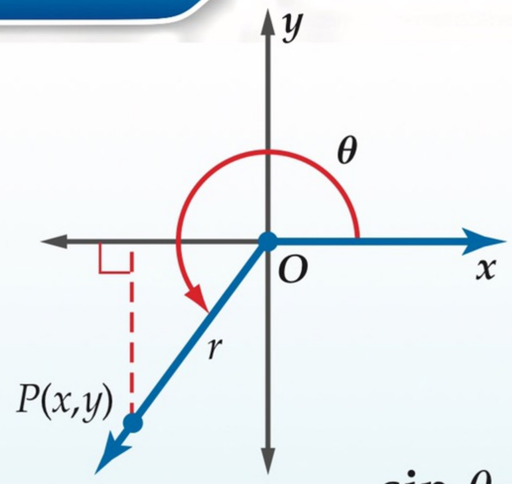
تنتشر العجلة الدوّارة في كُبْريات مدن الألعاب. ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من $90°$.

الدوالّ المثلَّثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا قياساتها تزيد على °90 أو تقلُّ عن °0.

مفهوم أساسي

أضف إلى

الدوالّ المثلَّثية للزوايا



لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثِّل البُعد بين نقطة الأصل والنقطة P.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوالّ المثلَّثية الستُّ للزاوية θ معرَّفة كما يأتي:

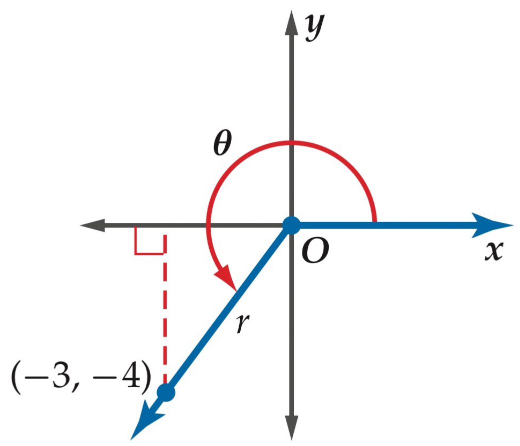
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

مثال

إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية بمعلومية نقطة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-3, -4)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية السِّتّ للزاوية θ.



تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-6, 2)$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ.

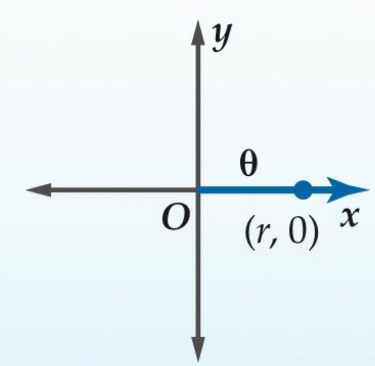
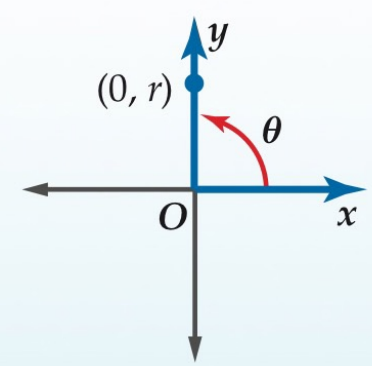
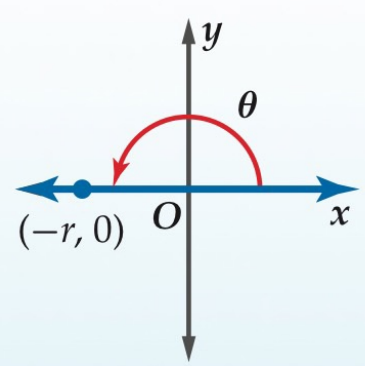
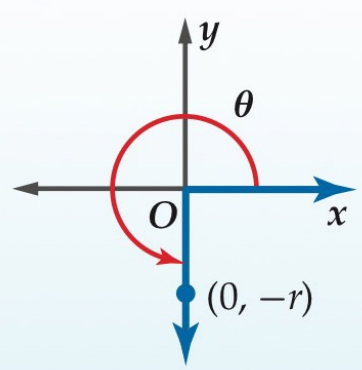
إرشادات للدراسة

الزوايا الربعية
قياس أيٍّ زاوية ربعية هو من مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن الزاوية θ تُسمّى **زاوية ربعية**.

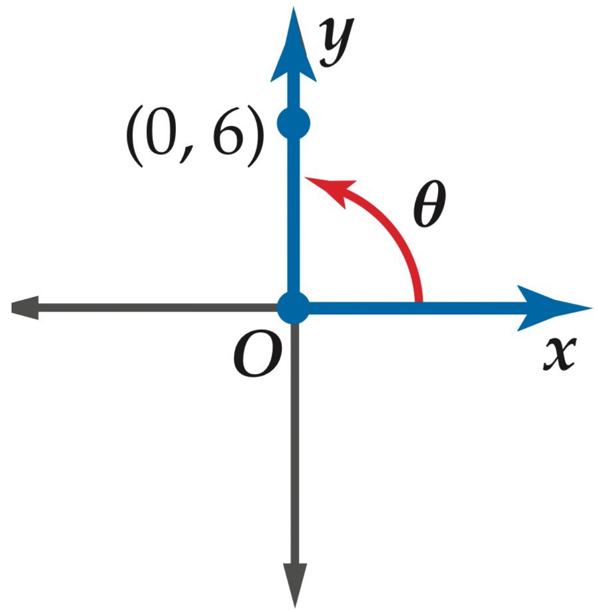
مفهوم أساسي — الزوايا الربعية

أضف إلى مطويتك

$\theta = 0°$ أو $\theta = 0\ rad$	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi$ rad	$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad
			

الزوايا الربعية

مثال

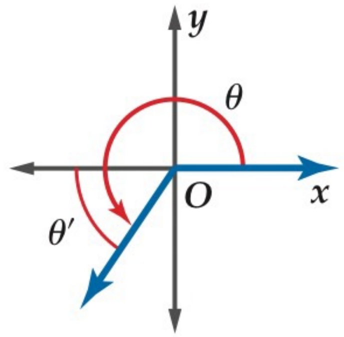


إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(0, 6)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

تحقق من فهمك

2) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(0, -2)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

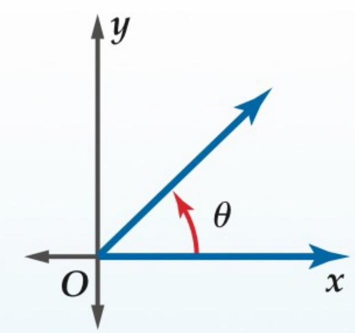
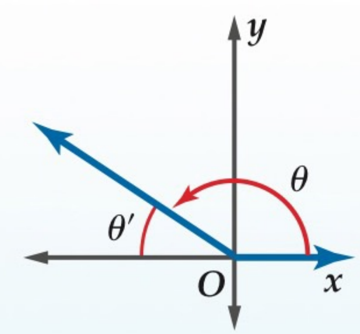
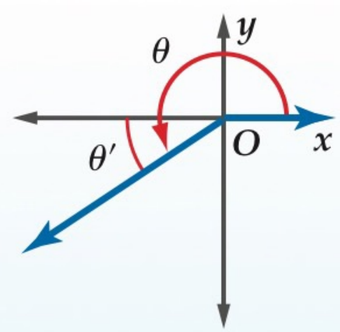
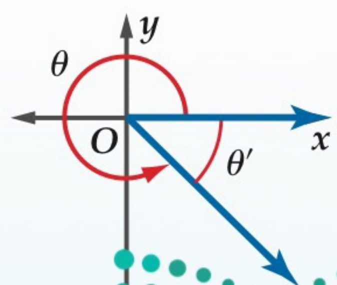
الدوالّ المثلَّثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ هي الزاوية الحادَّة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يبيِّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.



مفهوم أساسي

الزوايا المرجعية

أضف إلى مطويتك

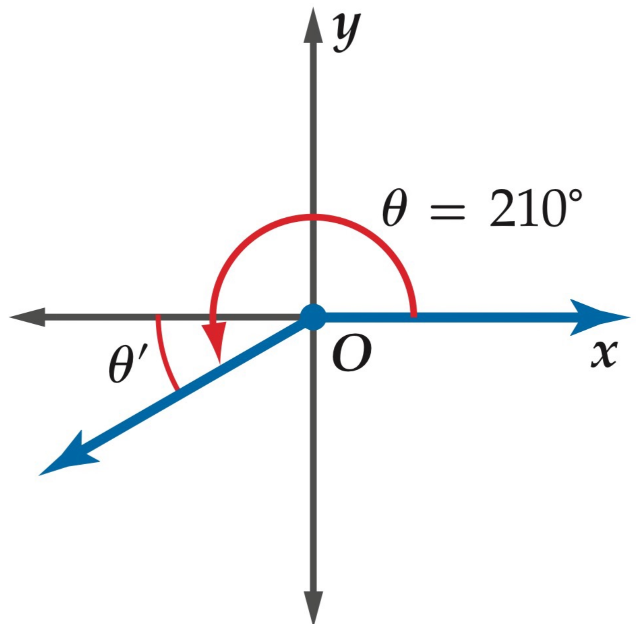
الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$
	$\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 2\pi - \theta$

لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$، استعمل زاوية بقياس موجب محصور بين $0°, 360°$ ومشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ.

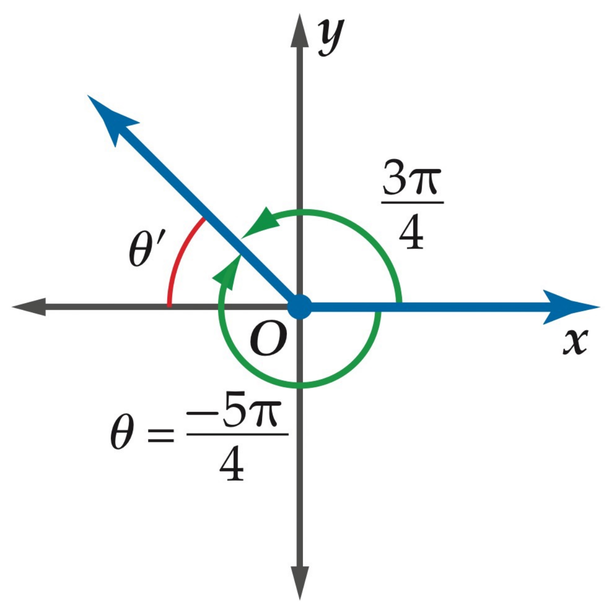
مثال

ارسم كلًّا من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(a $210°$



(b $-\frac{5\pi}{4}$



إرشادات للدراسة

الدورة الكاملة
$[0°, 360°]$
لإيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ، وقياسها موجب محصور بين $0°, 360°$:
- إذا كانت θ أكبر من $360°$، فاطرح منها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.
- إذا كانت θ أصغر من $0°$، فأضف إليها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.

تحقق من فهمك

3A) $-110°$

3B) $\frac{9\pi}{3}$

لإيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيِّ زاوية θ، يمكنك استعمال الزوايا المرجعية وتُحدّد إشارة كلِّ دالّة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

مفهوم أساسي: إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ'.

الخطوة 3: حدِّد إشارة قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ.

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta: +$	$\sin\theta, \csc\theta: +$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: -$	$\tan\theta, \cot\theta: +$
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta: -$	$\sin\theta, \csc\theta: -$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: +$	$\tan\theta, \cot\theta: -$

يمكنك استعمال قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ التي تعلّمتها في الدرس 1-4.

قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الخاصّة

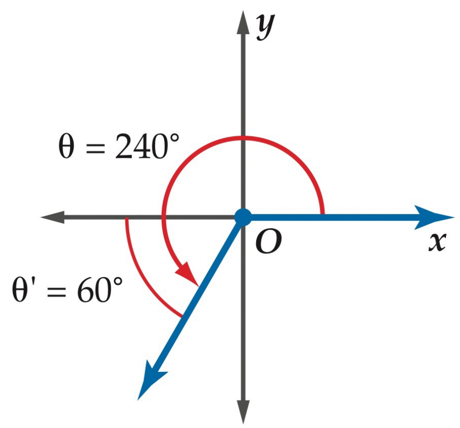
الجيب	جيب التمام	الظلّ	قاطع التمام	القاطع	ظلّ التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالة مثلثية

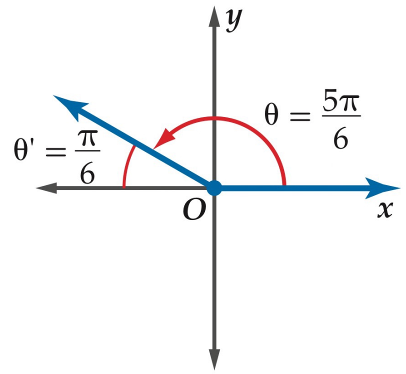
مثال

أوجد القيمة الدقيقة للدالّة المثلَّثية في كلٍّ ممَّا يأتي:

$\cos 240°$ (a



$\csc \frac{5\pi}{6}$ (b



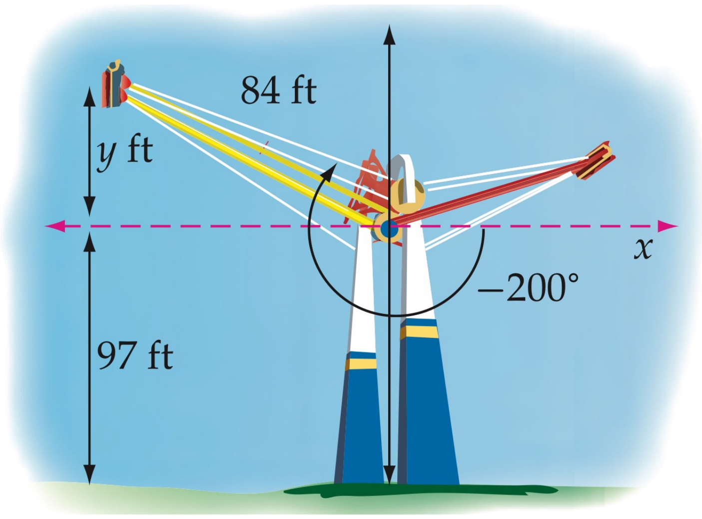
تحقق من فهمك

4A) $\cos 135°$

4B) $\tan \frac{5\pi}{6}$

مثال

أراجيح: إذا كان طول كلِّ ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور **84 ft**، وارتفاع محور الدوران **97 ft**، فأوجد الارتفاع الكليَّ لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضَّح في الشكل.



تحقق من فهمك

5) **أراجيح:** أوجد الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذا الذراع 72 ft ، وارتفاع محور الدوران 88 ft وقياس زاوية الدوران $-195°$

تأكد

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ :

1) $(1, 2)$

2) $(-8, -15)$

تأكد

ارسم كلّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

5) $115°$

6) $-\frac{3\pi}{4}$

تأكد

أوجد القيمة الدقيقة لكلَ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

7) $\sin \frac{3\pi}{4}$

9) $\sec 120^\circ$

تدرب

افترض أن $\boldsymbol{\theta}$ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وقد أُعطي فيما يأتي قيمة إحدى الدوالّ المثلَّثية للزاوية $\boldsymbol{\theta}$ والربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها. أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الخمس الأخرى للزاوية $\boldsymbol{\theta}$.

(34 $\sin\theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

(35 $\tan\theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

تحصيلي

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-3,4)$؛ فإن $\cos\theta$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{-4}{5}$

Ⓑ $\frac{-3}{5}$

Ⓒ $\frac{3}{5}$

Ⓓ $\frac{4}{5}$

تحصيلي

إذا كان $\tan\theta = -2$ و $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ فإن الضلع النهائي للزاوية θ يقع في الربع ..

Ⓐ الأول

Ⓑ الثاني

Ⓒ الثالث

Ⓓ الرابع