الزوايا وقياساتها

قدرات

عمر محمد من مضاعفات العدد ٦ وقبل ٤ سنوات كان عمره من مضاعفات العدد ٥

أ / ١٢ ب / ١٨ ج / ٢٠ د/ ٢٤

فيما سبق:

درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات. الدرس (1-4)

والآن:

- أرسم زوايا في الوضع القياسي، وأجد قياساتها.
- أحوّل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

المفردات:

الوضع القياسي
standard position

ضلع الابتداء
initial side

ضلع الانتهاء
terminal side

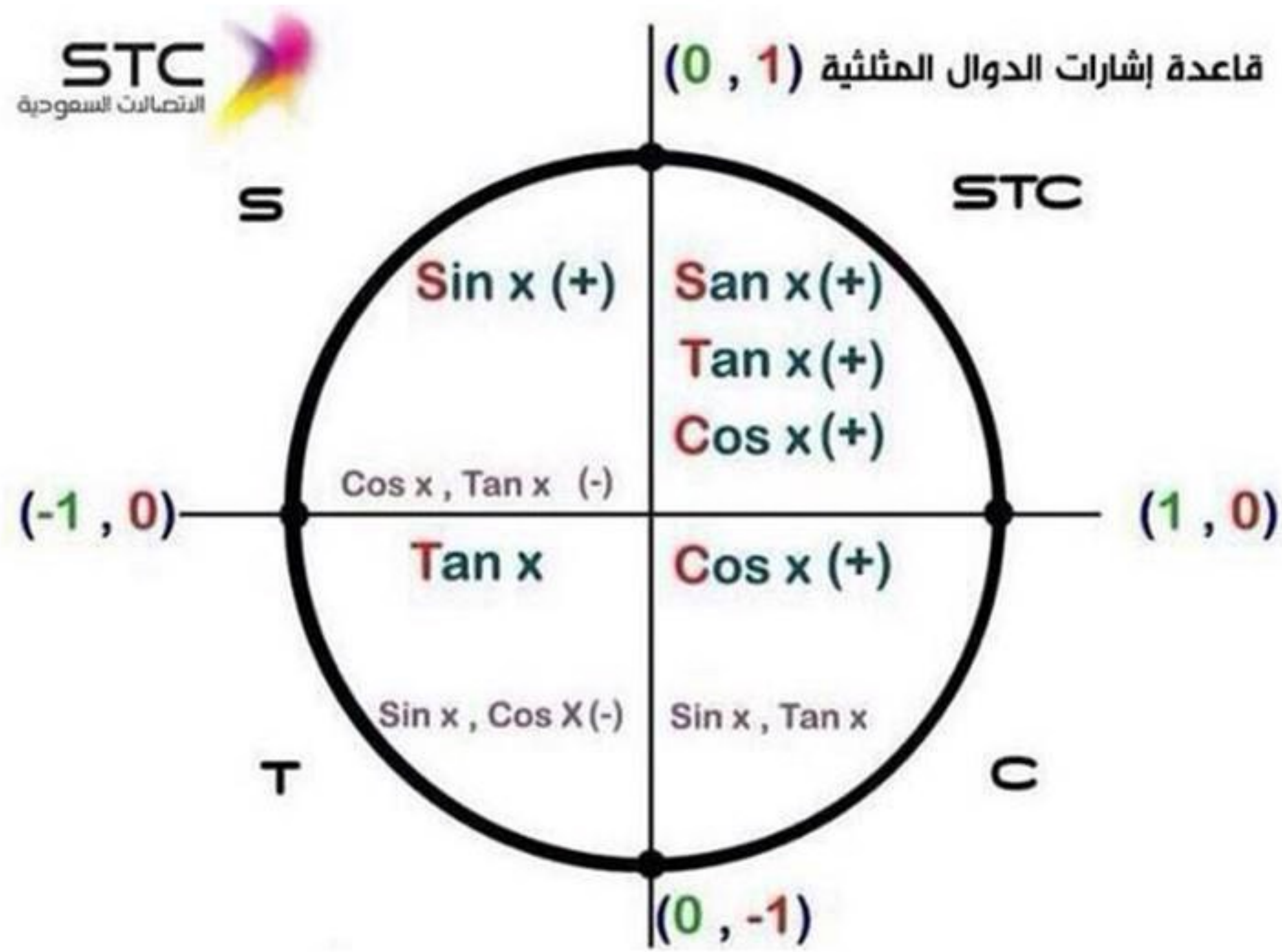
الراديان
radian

الزاوية المركزية
central angle

طول القوس
arc length

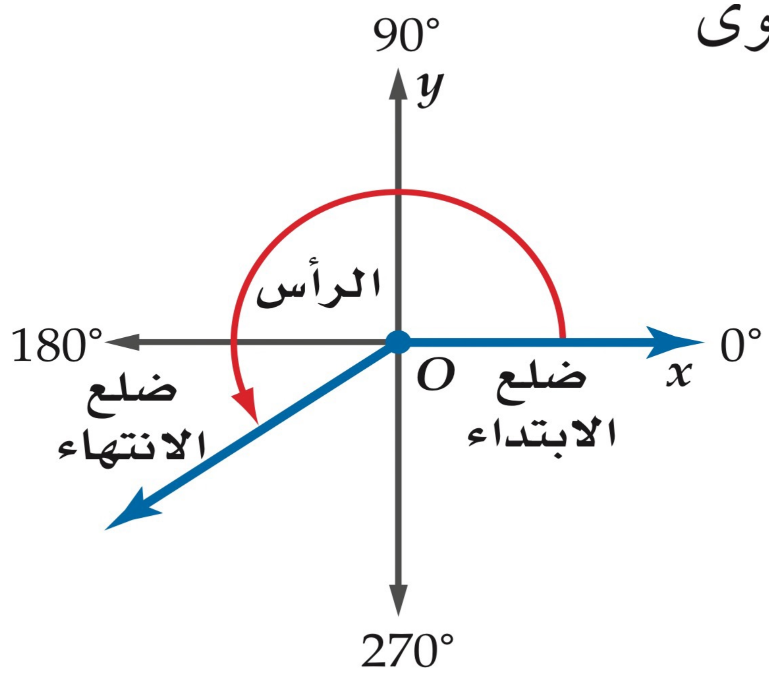
لماذا

المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت نهارًا من خلال الظلّ الذي تسقطه على قرص مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظلّ على القرص $15°$ كلَّ ساعة.


قاعدة إشارات الدوال المثلثية
(0 , 1)
STC
الاتصالات السعودية
S
STC
Sin x (+)
San x (+)
Tan x (+)
Cos x (+)
Cos x , Tan x (-)
(-1 , 0)
(1 , 0)
Tan x
Cos x (+)
Sin x , Cos X (-)
Sin x , Tan x
T
C
(0 , -1)

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل، وأحد ضلعيها منطبقًا على الجزء الموجب من المحور x.

- يُسمّى الضلع المنطبِق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.

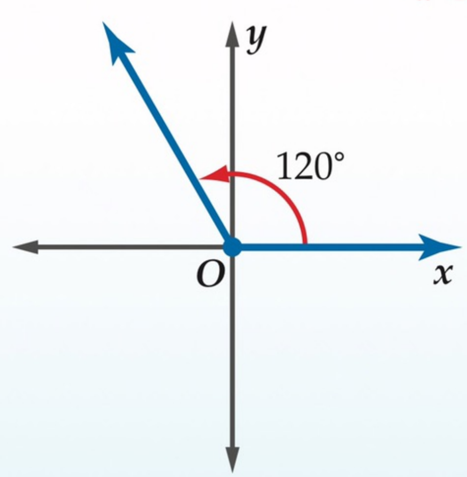


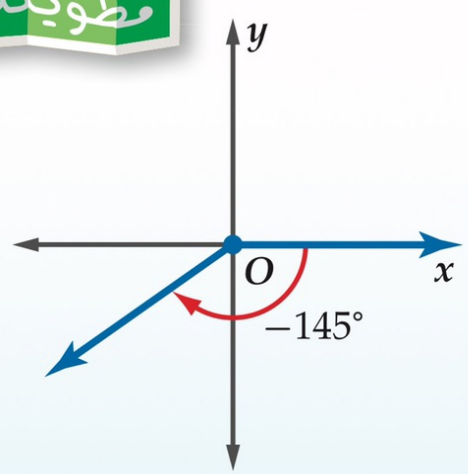
مفهوم أساسي

قياسات الزوايا

أضف إلى مطويتك

يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.



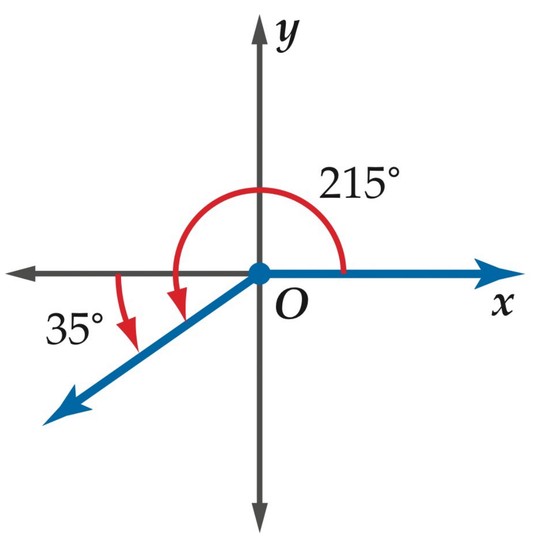


مثال

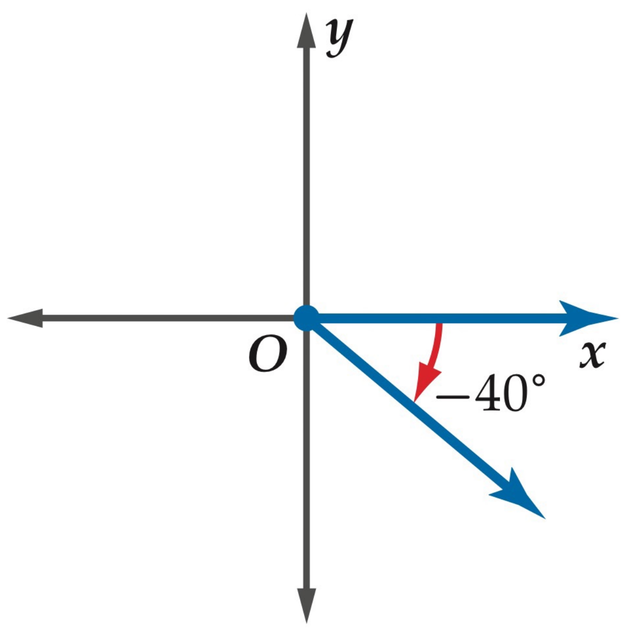
رسم زاوية في الوضع القياسي

ارسم كلًّا من الزاويتين المُعطى قياساهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

a) $215°$



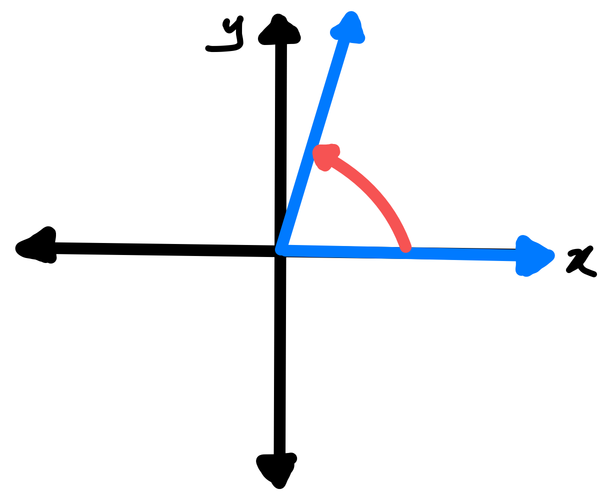
b) $-40°$



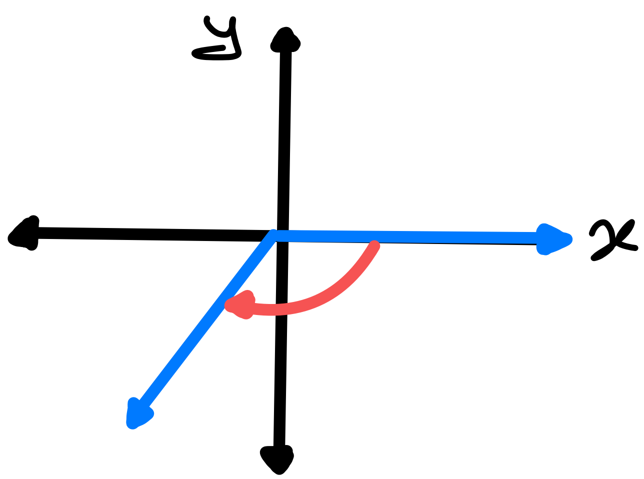
تحقق من فهمك

ارسم كلًّا من الزاويتين المُعطى قياساهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

(1A $80°$



(1B $-105°$

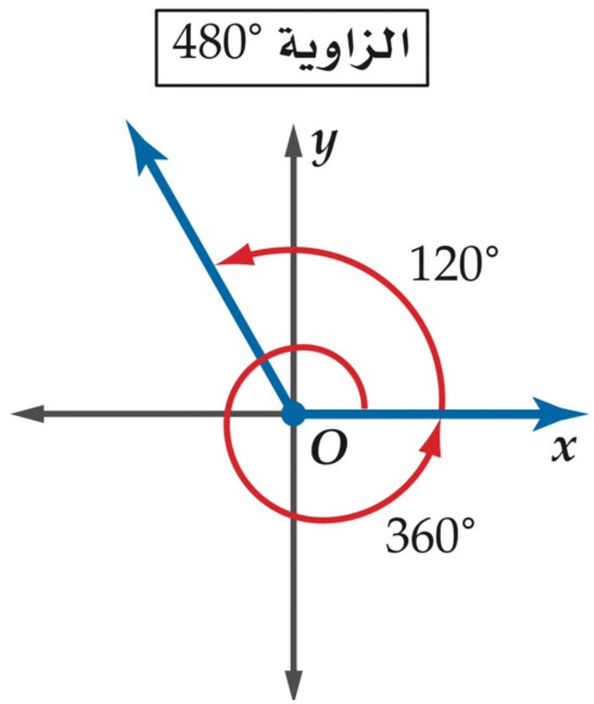


يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة.

فعلى سبيل المثال:

دورة كاملة مقدارها °360 إضافة إلى دورة بمقدار °120 تشكّلان

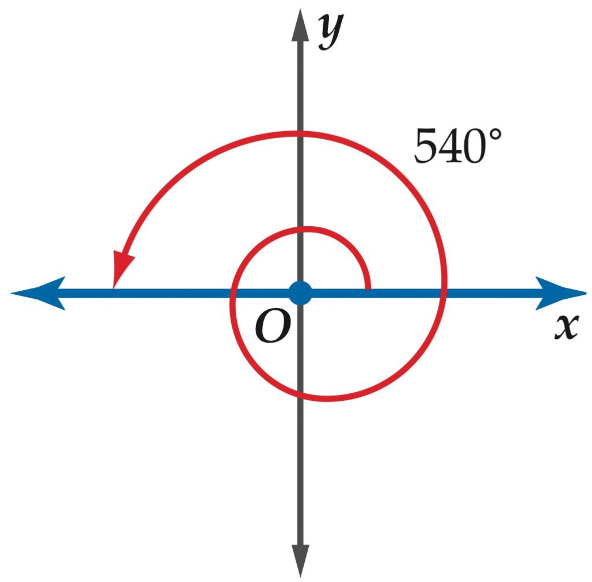
زاوية قياسها $360° + 120° = 480°$



مثال

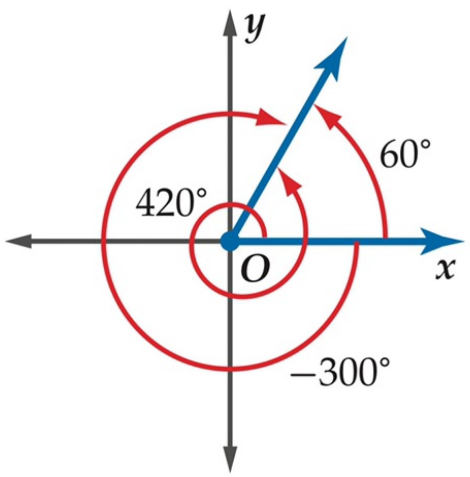
رسم زاوية في الوضع القياسي

التزلُّج المائي: يتضمّن التزلُّج المائي أن يقوم المتزلِّج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء في أثناء تنفيذه هذه الرياضة. إذا تضمّنت إحدى المناورات الدوران بمقدار $540°$ في الهواء، فارسم زاوية قياسها $540°$ في الوضع القياسي.



تحقق من فهمك

2) **عجلات:** أوقف سعيد درّاجته، فتحرَّكت عجلتاها بزاوية قياسها $600°$، ارسم زاوية قياسها $600°$ في الوضع القياسي.



عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: $-300°$, $420°$, $60°$ كما هو موضَّح في الشكل المجاور.

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات $360°$.

- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$

إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

مثال

في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

a) $130°$

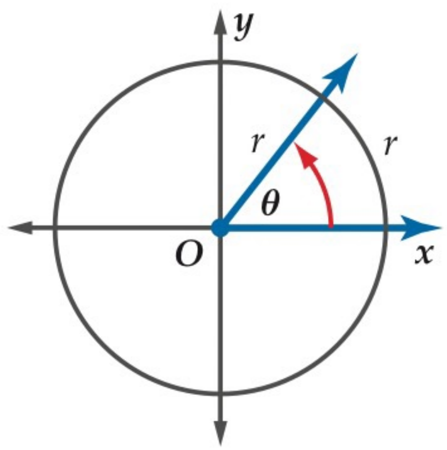
b) $-200°$

تحقق من فهمك

3A) $15°$

3B) $-45°$

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس: يمكن أن تقاس الزوايا أيضًا بوحدات تستند إلى طول قوس من دائرة. فقياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدّد على الدائرة قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة هو 1 **راديان** (rad)



$\theta = 1$ راديان

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $2\pi \,\text{rad} = 360°$ ، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$2\pi \,\text{rad} = 360° \text{ أي أن } \pi \,\text{rad} = 180°$$

مفهوم أساسي: التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

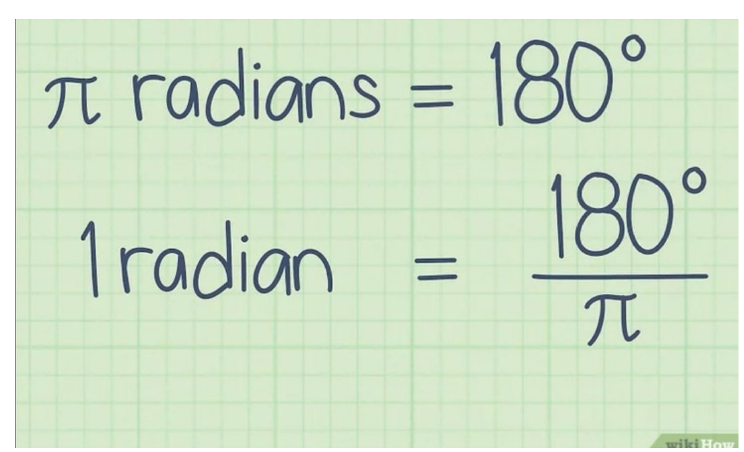
من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\dfrac{\pi \,\text{rad}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\dfrac{180°}{\pi \,\text{rad}}$

إرشادات للدراسة

القياس بالراديان

كما في القياس بالدرجات، فإن القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.

- قياس زاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان الدوران عكس حركة عقارب الساعة.
- قياس زاوية بالراديان يكون سالبًا إذا كان الدوران مع حركة عقارب الساعة.



π radians $= 180°$

1 radian $= \frac{180°}{\pi}$

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

مثال

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

a) $-30°$

b) $\frac{5\pi}{2}$

$$\pi \text{ radians} = 180^\circ$$

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

تحقق من فهمك

4A) 120°

4B) $-\frac{3\pi}{8}$

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

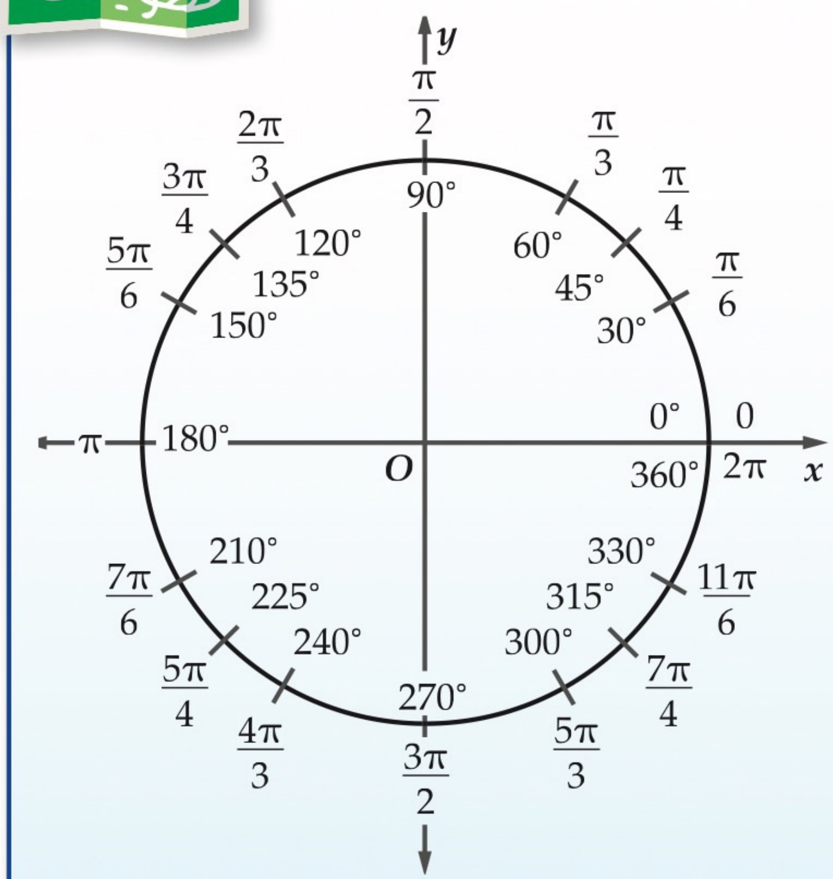
القياس بالدرجات وبالراديان

يُظهِر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

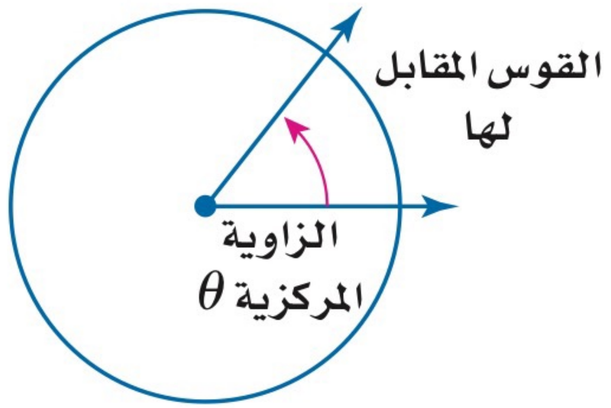
من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \qquad 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \qquad 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$



الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.



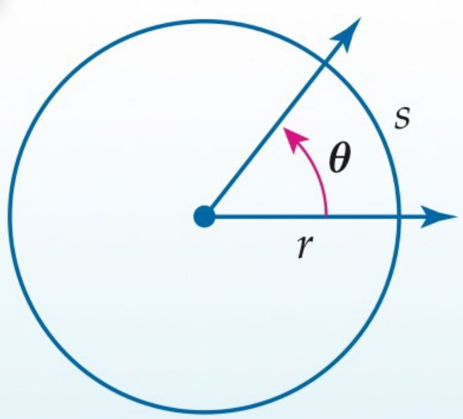
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

طول القوس

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$



2π = دورة

π = $\frac{1}{2}$ دورة

إيجاد طول القوس

مثال

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in، ما المسافة بالقدم التي يقطعها الإطار بعد أن تدور إطارات الشاحنة ثلاثة أرباع دورة؟

تنبيـه

طول القوس

تذكَّر أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجات عندما تحسب طول القوس. وتذكَّر أيضًا أن الدورة الكاملة تساوي 2π راديان.

تحقق من فهمك

5) **مطاعم:** يقع في أعلى برج الخرج مطعم دوّار، نصف قطره 90 ft، حيث يدور الجناح المخصّص لتقديم الطعام والقريب من النوافذ الخارجية دورة كاملة كل 90 دقيقة. إذا ذهب شخص للمطعم لتناول العشاء وجلس على طاولة بجانب النافذة عند الساعة 6:42 مساءً وانتهى عند الساعة 8:00 مساءً، فما المسافة التي دارها؟

تأكد

ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

1) 140°

2) -60°

تأكد

في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

4) 25°

6) -100°

تأكد

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

(7 $\frac{\pi}{4}$

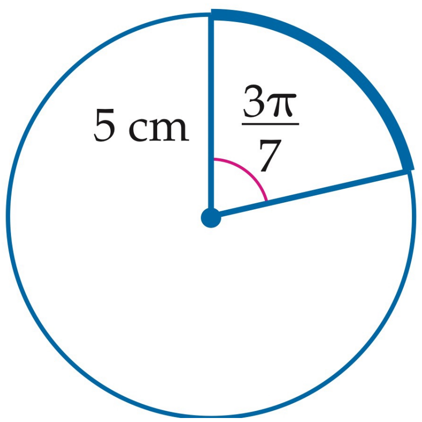
(8 225°

(9 -40°

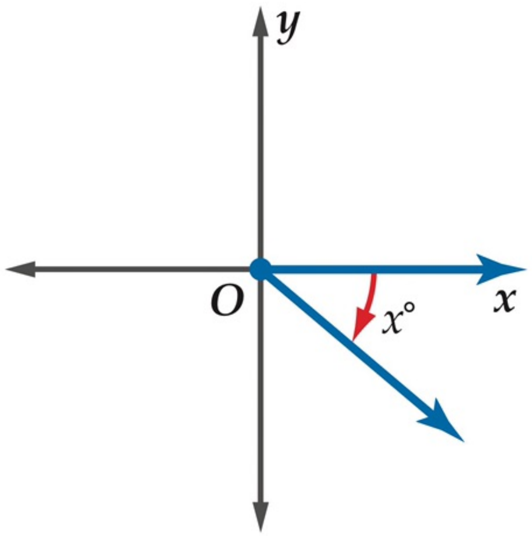
تدرب

أوجد طول القوس المحدد

31)



تدرب



45) **اكتشف الخطأ:** كتب كلٌّ من عليٍّ وأحمد عبارة تُمثّل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور.

من منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

أحمد	عليّ
$(360 - x)^{\circ}$	$(x - 360)^{\circ}$

الزاوية .... تشترك مع الزاوية °420 في ضلع الانتهاء.

Ⓐ 30°

Ⓑ 45°

Ⓒ 60°

Ⓓ 120°

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-3,4)$؛ فإن $\cos\theta$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{-4}{5}$

Ⓑ $\frac{-3}{5}$

Ⓒ $\frac{3}{5}$

Ⓓ $\frac{4}{5}$

تحصيلي

إذا كان $m\angle\theta = 300°$ فإن قياس زاويتها المرجعية θ` ..

Ⓐ $15°$

Ⓑ $30°$

Ⓒ $45°$

Ⓓ $60°$

أي من الزوايا التالية يكون الجيب والظل لها سالبين؟

A) $65°$

B) $310°$

C) $120°$

D) $256°$