قانون الجيوب

قدرات

اذا كان أ ج قطر في الدائرة ،
وكان أب = ٤سم
، ب ج = ٣ سم
فأوجد محيط الدائرة

أ / ٥ط　　ب / ١٠ط　　ج/ ١٥ط　　د/ ٢٥ط

فيما سبق:

درست إيجاد أطوال أضلاع مثلَّثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها. الدرس (1-4)

والآن:

- أجد مساحة مثلَّث باستعمال طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أستعمل قانون الجيوب في حلِّ المثلَّثات.

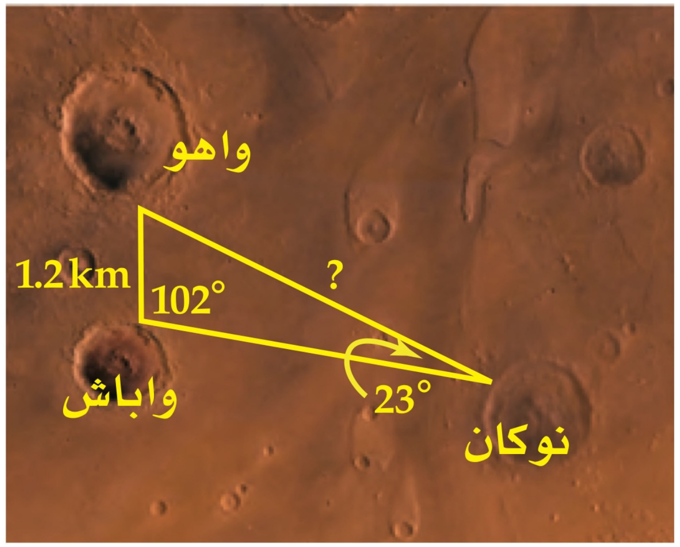
المفردات:

قانون الجيوب
Law of Sines

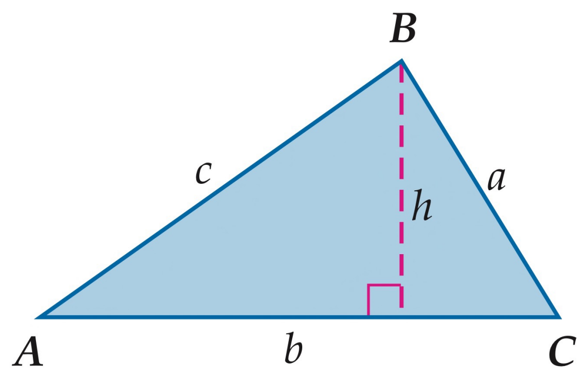
حل المثلَّث
solving a triangle

لماذا

يوجد على سطح كوكب المريخ عشرات الآلاف من الفوَّهات أو الحفر، وقد أطلق عليها العلماء تسميات عديدة لعلماء مشهورين وأسماء مدن ومؤلِّفي قصص علمية خيالية. والشكل المجاور يبيِّن ثلاثًا من هذه الفوَّهات. يمكنك استعمال حساب المثلَّثات في إيجاد المسافة بين الفوهتين واهو ونوكان.



إيجاد مساحة المثلّث: في المثلّث المجاور $\sin A = \frac{h}{c}$ أي أنَّ $h = c \sin A$.



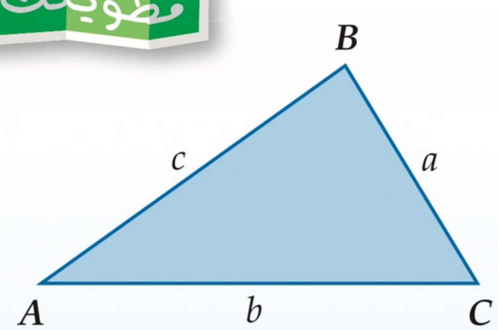
المساحة $= \frac{1}{2} bh$	صيغة مساحة المثلّث
المساحة $= \frac{1}{2} b(c \sin A)$	عوِّض عن h بِـ $c \sin A$
المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A$	بسِّط

مفهوم أساسي

مساحة المثلَّث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مساحة المثلّث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولَي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

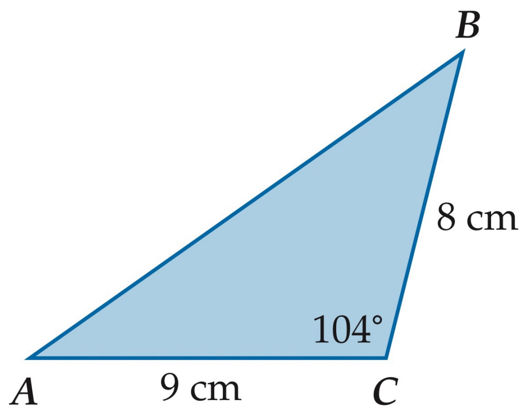


الرموز: $k = \frac{1}{2} bc \sin A$ $\quad k = \frac{1}{2} ac \sin B$ $\quad k = \frac{1}{2} ab \sin C$

إيجاد مساحة مثلّث

مثال

أوجد مساحة $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.



تحقق من فهمك

1) أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31°\ , b = 18\,\text{m}, c = 22\,\text{m}$ مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة

استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلَّث في اشتقاق **قانون الجيوب**، الذي يبيِّن العلاقات بين أطوال أضلاع مثلَّث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$
اكتب صيغ مساحة المثلَّث الثلاث المتساوية

$$bc\sin A = ac\sin B = ab\sin C$$
اضرب كلَّ عبارة في 2

$$\frac{bc\sin A}{abc} = \frac{ac\sin B}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc}$$
اقسم كلَّ عبارة على abc

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$
بسِّط

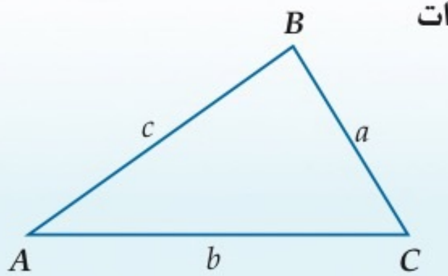
مفهوم أساسي

قانون الجيوب

أضف إلى مطويتك

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

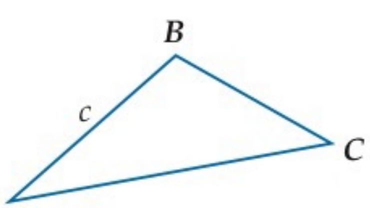
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



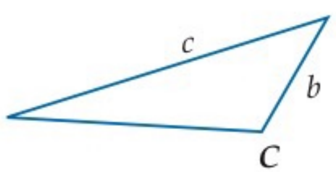
حَلُّ المثلَّث يعني استعمال القياسات المُعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلَّث وقياس زواياه.

ويمكنك استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّث في الحالات الآتية:

- معرَّفة قياسي زاويتين في المثلَّث وطول أي ضلع فيه
  (زاوية – زاوية– ضلع (حالة AAS) ، أو زاوية– ضلع– زاوية (حالة ASA))

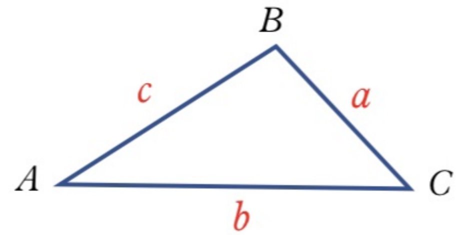


- معرَّفة طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما
  (ضلع– ضلع– زاوية (حالة SSA))



قانون الجيوب

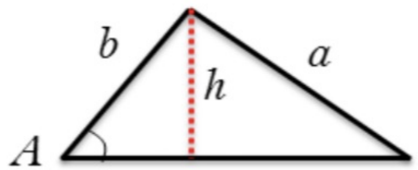
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها a ، b ، c تقابل الزوايا ذات القياسات A ، B ، C على الترتيب ، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ (قانون الجيوب)



الحالات التي يمكن استعمال قانون الجيوب فيها

إذا كان المعطى في المثلث قياس زاويتان وطول أحد أضلاعه ، وتعرَّف اختصارًا : AAS أو ASA

إذا كان المعطى في المثلث طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما ، وتعرَّف اختصارًا : SSA (وهنا يكون لدينا الحالات التالية)



نوجد الارتفاع h بالقاعدة : $h = b \sin A$

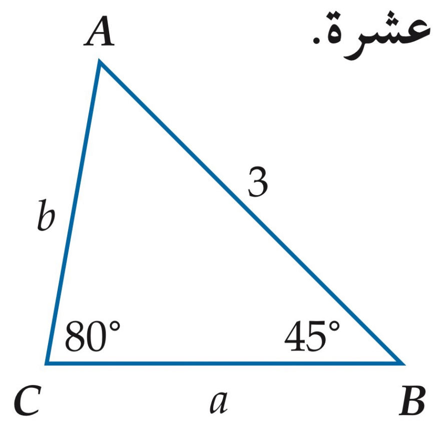
في حالة : SSA

- **A منفرجة أو قائمة**
  - $a > b$: **يوجد حل وحيد**
  - $a \leq b$: **لا يوجد حل للمثلث**
- **A زاوية حادة**
  - $a \geq b$: **يوجد حل وحيد**
  - $a < b$: **نحتاج h لنقرر**
    - $a < h$: **لا يوجد حل**
    - $a = h$: **يوجد حل وحيد**
    - $a > h$: **يوجد حلان**

حَلّ مثلّث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

مثال

حُلّ $\triangle ABC$، الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



إرشادات للدراسة

علاقات بديلة

يمكن كتابة قانون الجيوب كما يأتي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبذلك يمكنك استعمال العلاقتين الآتيتين لحلّ المثلَّث في المثال 2

$$\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

$$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

تحقق من فهمك

2) حُل $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 42°, Q = 65°, n = 5$، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشر

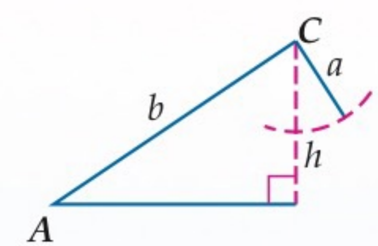
إذا عُلِمَ لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع، فإنه يوجد مثلَّث وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولَي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلَّثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلَّث حلّ، أو له حلٌّ واحد، أو له حلان.

مفهوم أساسي — المثلَّثات الممكنة في حالة (SSA)

أضف إلى مطويتك

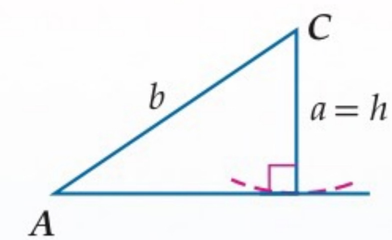
افترض مثلَّثا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

$\angle A$ حادّة



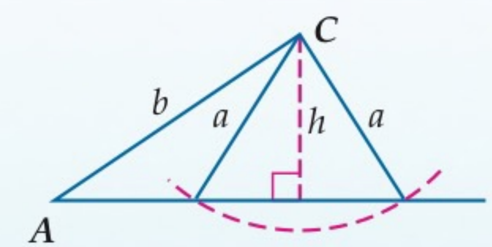
$a < h$

لا يوجد حلٌّ



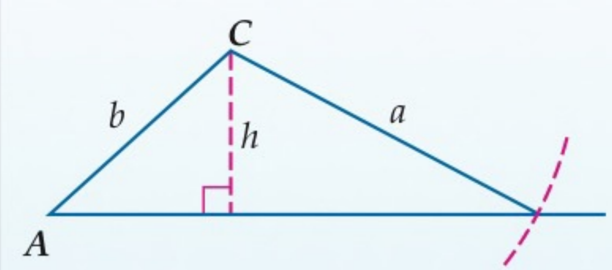
$a = h$

حلٌّ واحد



$h < a < b$

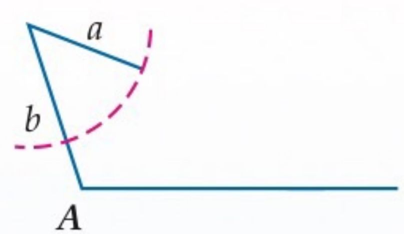
حلَّان



$a \geq b$

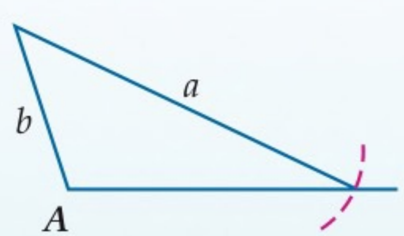
حلٌّ واحد

$\angle A$ قائمة أو منفرجة



$a \leq b$

لا يوجد حلٌّ



$a > b$

حلٌّ واحد

بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$، فيمكنك استعمال الصيغة $h = b \sin A$ لإيجاد قيمة h في المثلَّثات الحادّة الزوايا.

إرشادات للدراسة

الحالة المبهمة

الحالة التي يكون للمثلَّث فيها حلان تُسمّى الحالة المبهمة.

إرشادات للدراسة

الزاوية A حادّة

في الجهة اليمنى من الأشكال المجاورة.

الارتفاع h يقارن مع a لأن h هو أقصر بعد من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادّة.

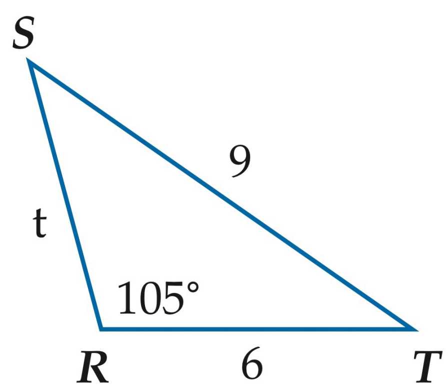
$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin A = \frac{h}{b}$$

حَل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

مثال

حدِّد إن كان لكلَ مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

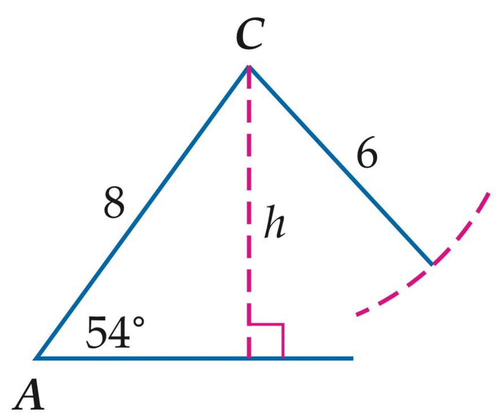


a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105°, r = 9, s = 6$.

مثال

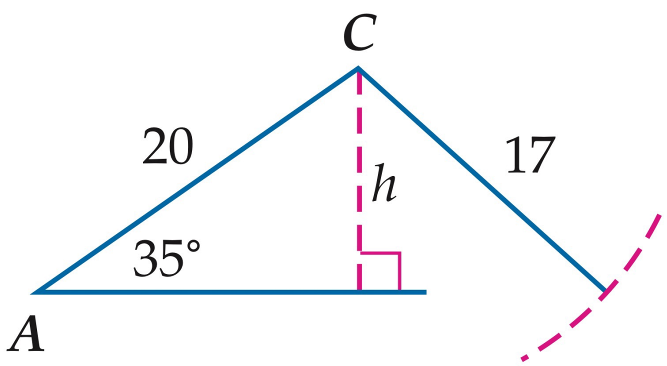
حدِّد إن كان لكلَ مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54°, a = 6, b = 8$.



مثال

حدِّد إن كان لكلَ مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $b = 20 \,, \, a = 17 \,, \, A = 35°$.

تحقق من فهمك

حدِّد إن كان لكل مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95°, r = 10, s = 12$

تحقق من فهمك

حدِّد إن كان لكل مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32°, n = 7, p = 4$

تحقق من فهمك

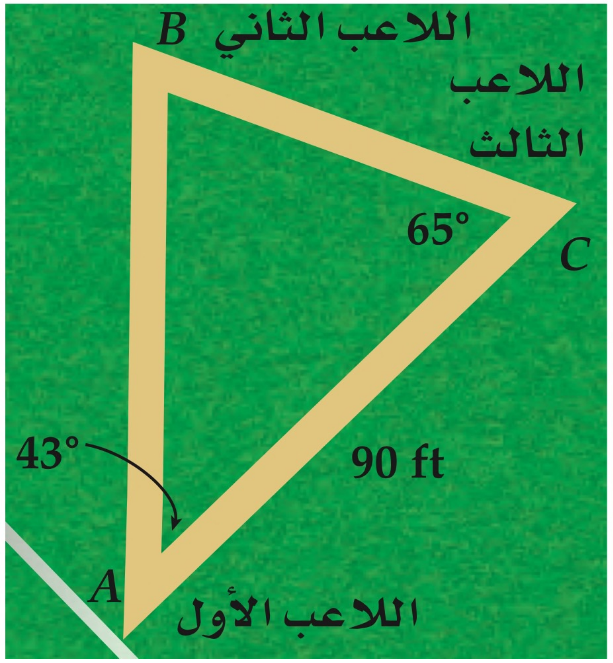
حدِّد إن كان لكل مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47°, a = 15, b = 18$

استعمال قانون الجيوب لحل مسألة

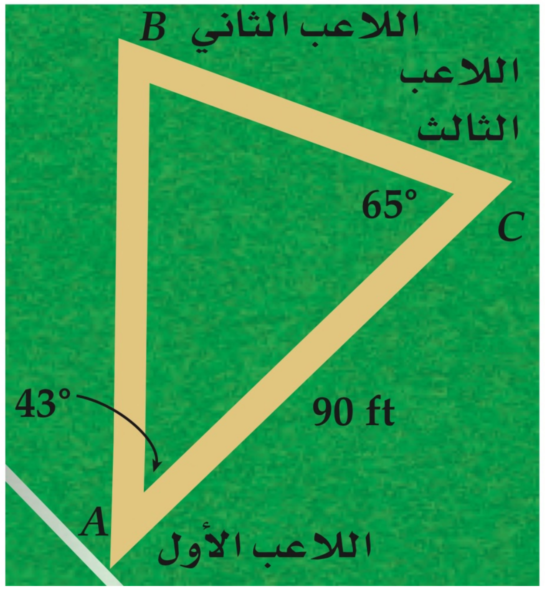
مثال

كرة قدم: يُمثّل الشكل المجاور إحدى التمريرات الحاسمة بين ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.



تحقق من فهمك

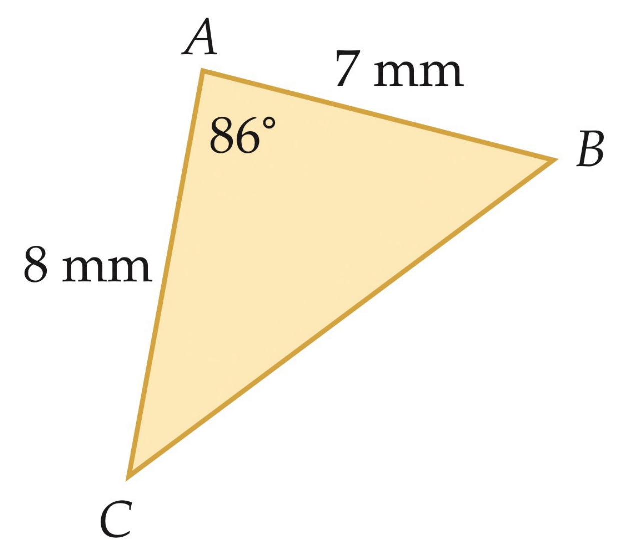
4) كرة قدم: أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني في الشكل أعلاه.



تأكد

أوجد مساحة $\triangle ABC$ ،

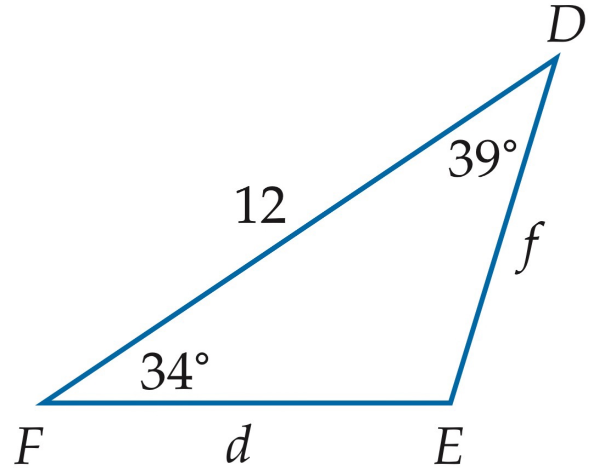
(1



تأكد

حُلّ المثلث ، الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.

(5

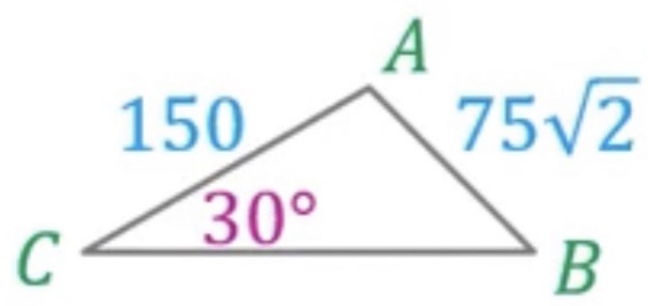


تدرب

38) **اكتشف الخطأ:** $\triangle RST$ فيه: $R = 56°, r = 24, t = 12$. فإذا حاول كلٌّ من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$، فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

رضوان	علي
$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$ $\sin T \approx 0.4145$ $T \approx 24.5°$	بما أن $r > t$ فلا يوجد للمثلّث حلّ.

$m\angle B$ الحادة في الشكل يساوي ..



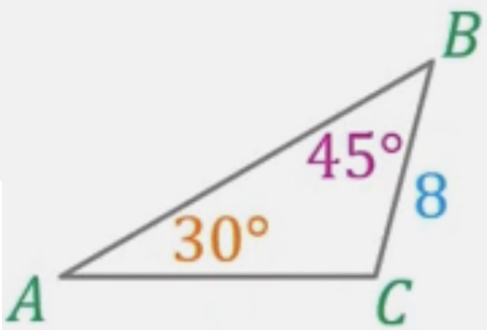
Ⓐ $15°$

Ⓑ $30°$

Ⓒ $45°$

Ⓓ $60°$

ما طول $\overline{AC}$ في الشكل؟



Ⓐ 4

Ⓑ 8

Ⓒ 9

Ⓓ $8\sqrt{2}$