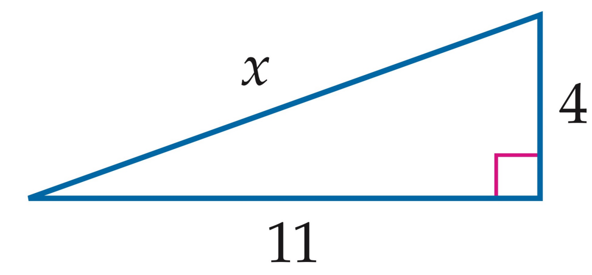
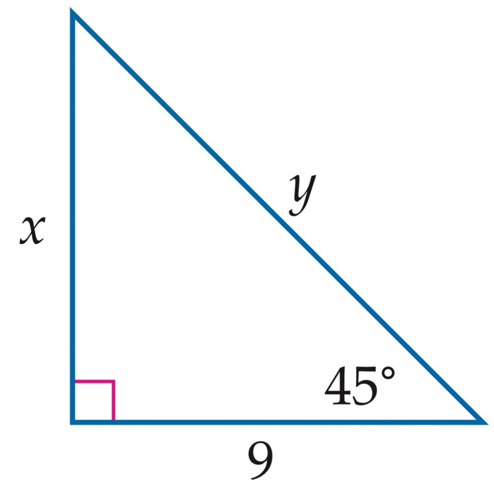
تهيئة حساب المثلثات

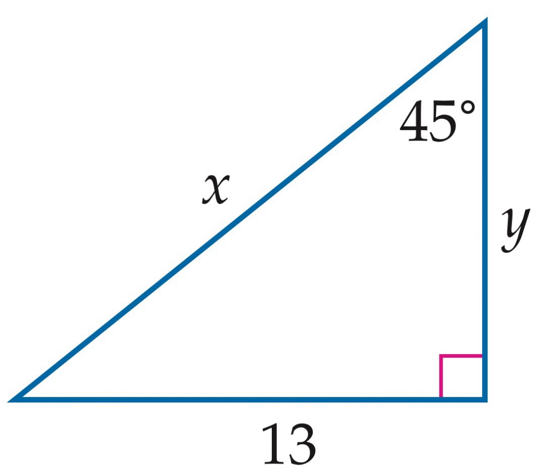
أوجد قيمة x مقرَّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.



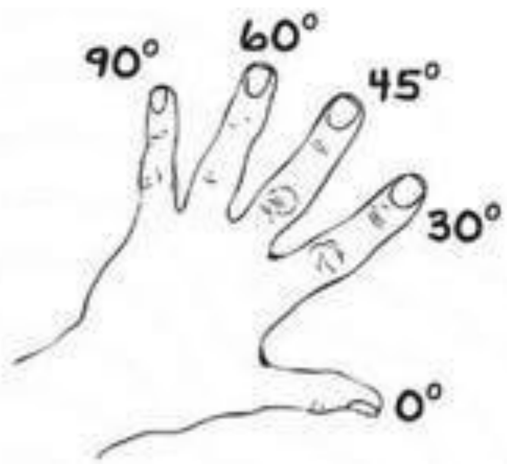
سلالم: يستند سُلَّم إلى جدار بحيث يصنع معه زاوية $45°$. إذا كان طول السُّلَّم 12 ft، فأوجد ارتفاع قمَّته عن الأرض.

أوجد القياسين المجهولين في كلٍّ مما يأتي





تهيئة حساب المثلثات



يمكن إيجاد قيم الدوال

المثلثية عن طريق أصابع

اليد اليسرى كالتالي :

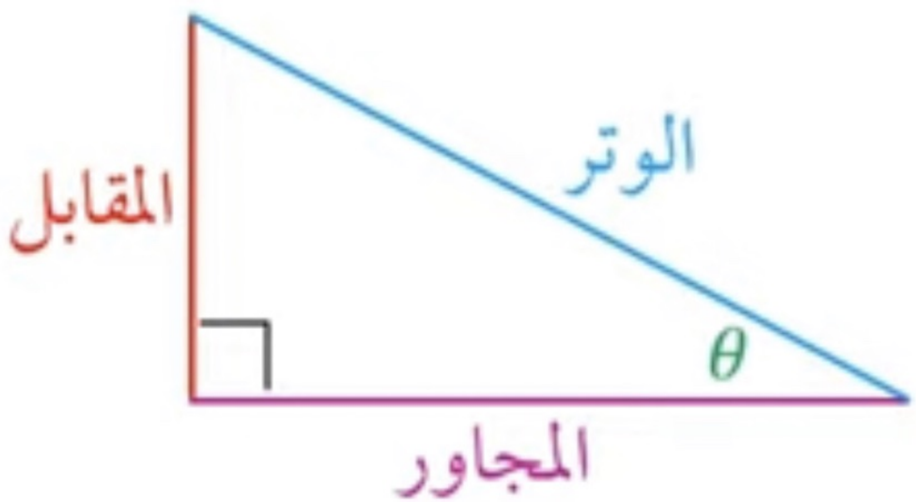
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع تحت الزاوية}}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع فوق الزاوية}}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع تحت الزاوية}}}{\sqrt{\text{عدد الأصابع فوق الزاوية}}}$$

تهيئة حساب المثلثات

الدوال المثلثية في المثلث قائم الزاوية



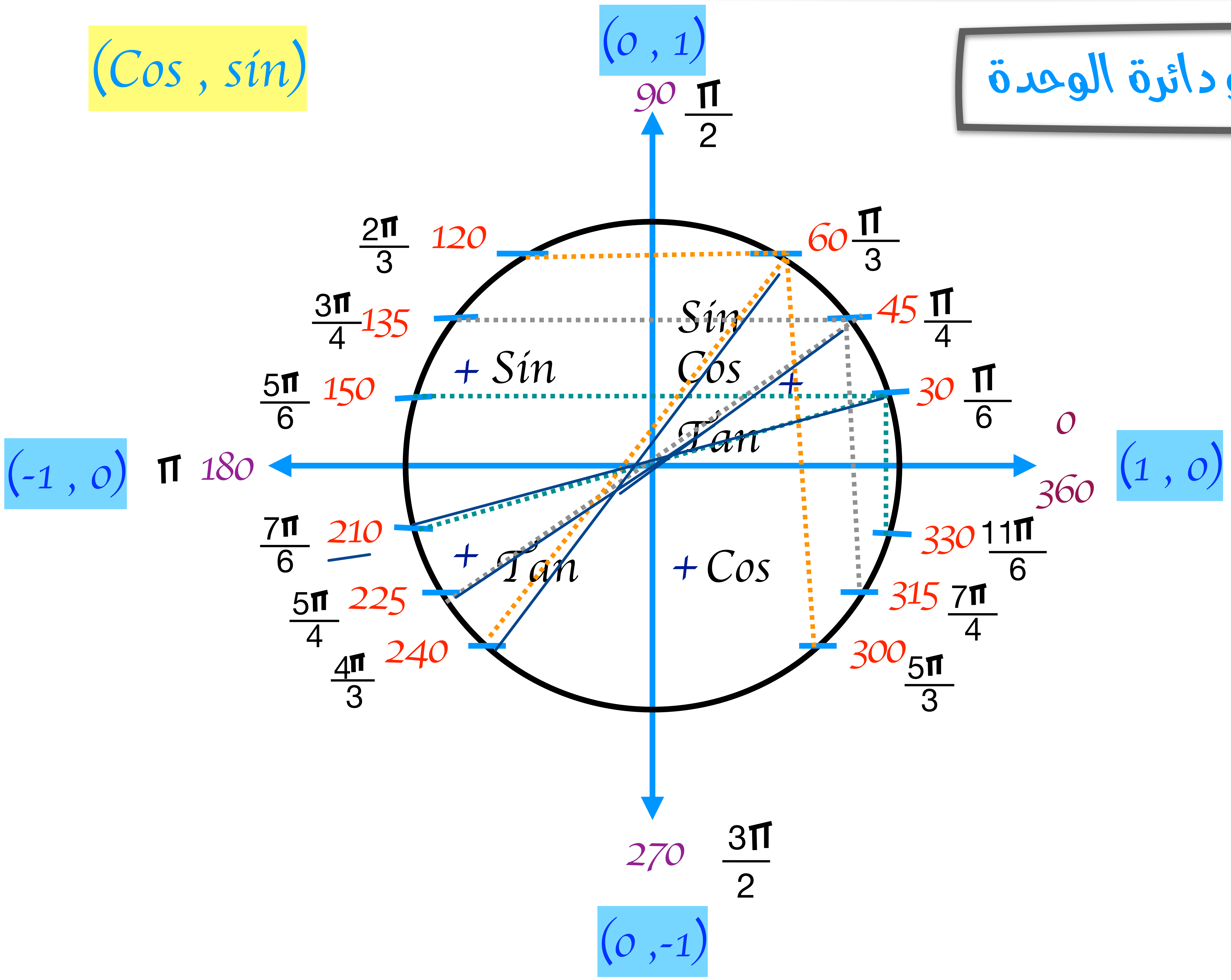
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

جدول قيم الدوال المثلثية و دائرة الوحدة

(Cos , sin)



	330 $\frac{11\pi}{6}$	315 $\frac{7\pi}{4}$	300 $\frac{5\pi}{3}$
	210 $\frac{7\pi}{6}$	225 $\frac{5\pi}{4}$	240 $\frac{4\pi}{3}$
	150 $\frac{5\pi}{6}$	135 $\frac{3\pi}{4}$	120 $\frac{2\pi}{3}$
	30 $\frac{\pi}{6}$	45 $\frac{\pi}{4}$	60 $\frac{\pi}{3}$
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

أ/ حصة الرشيد

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

فيما سبق:

درست استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع مثلّثات قائمة الزاوية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا حادّة.
- أستعمل الدوالّ المثلَّثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلّثات قائمة الزاوية.

المفردات:

حساب المثلَّثات
trigonometry

النسبة المثلَّثية
trigonometric ratio

الدالّة المثلَّثية
trigonometric function

الجيب
sine

جيب التمام
cosine

الظلُّ
tangent

قاطع التمام
cosecant

القاطع
secant

ظلُّ التمام
cotangent

دوالّ المقلوب
reciprocal functions

معكوس الجيب
inverse sine

معكوس جيب التمام
inverse cosine

معكوس الظلِّ
inverse tangent

زاوية الارتفاع
angle of elevation

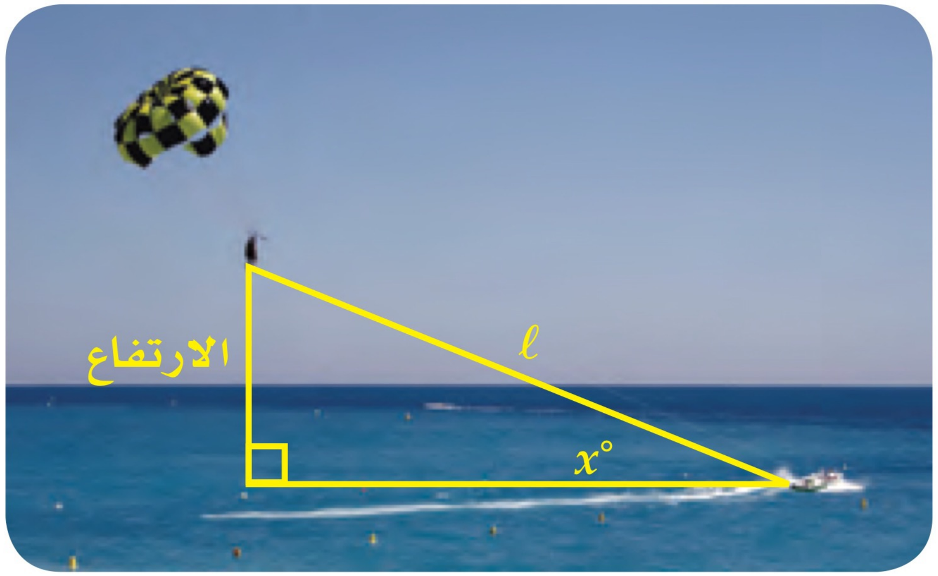
زاوية الانخفاض
angle of depression

قدرات

س١٠) في الشكل المجاور: إذا كانت مساحة الدائرة الكبيرة ١٦ط ، و النقطة (م) هي مركز تلك الدائرة الكبيرة ، فأوجد مساحة المنطقة المظللة؟

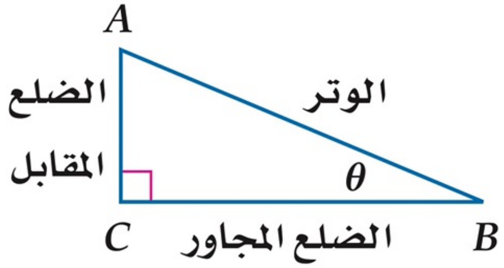
لماذا

يعتمد ارتفاع الشخص في التزلُّج الهوائي على طول حبل السحب ℓ والزاوية $x°$ التي يصنعها الحبل مع الخطِّ الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلِّج.



الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة يُعرّف **حساب المثلَّثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلَّث وأضلاعه. وتقارن **النسبة المثلَّثية** بين طولَي ضلعين في المثلَّث القائم الزاوية، أمّا **الدالّة المثلَّثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلَّثية.

يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويُقرأ ثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادّة في المثلَّث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوالّ المثلَّثية الستِّ.



مفهوم أساسي

جميع الدوالّ المثلَّثية في مثلَّث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثِّل قياس زاوية حادّة في مثلَّث قائم الزاوية، فإنّ الدوالّ المثلَّثية الستَّ تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\csc\theta$ (قاطع تمام θ) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

$\sin\theta$ (جيب θ) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sec\theta$ (قاطع θ) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\cos\theta$ (جيب تمام θ) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

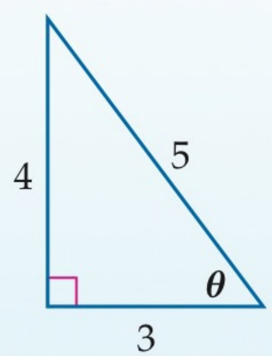
$\cot\theta$ (ظل تمام θ) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

$\tan\theta$ (ظل θ) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

أمثلة:

$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cot\theta = \frac{3}{4}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ $\quad$ $\csc\theta = \frac{5}{4}$



مثال

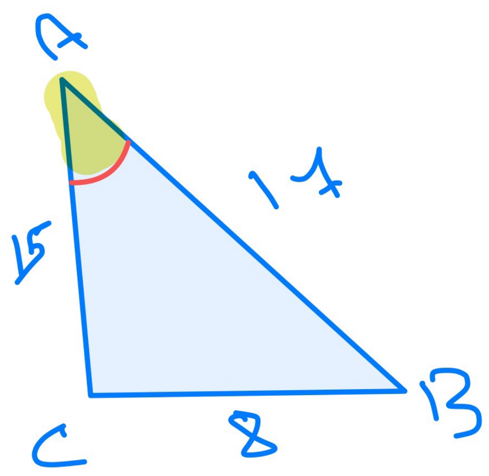
إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية

إذا كانت θ تمثّل قياس زاوية حادّة في المثلّث القائم الزاوية في C، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ عندما يكون:

طول الضلع المقابل للزاوية θ: $BC = 8$، طول الضلع المجاور للزاوية θ: $AC = 15$، طول الوتر: $AB = 17$

تحقق من فهمك

AB :



1) أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية B الواردة أعلاه.

لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظلّ على الترتيب. وتُستعمل في تعريف **دوالّ المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

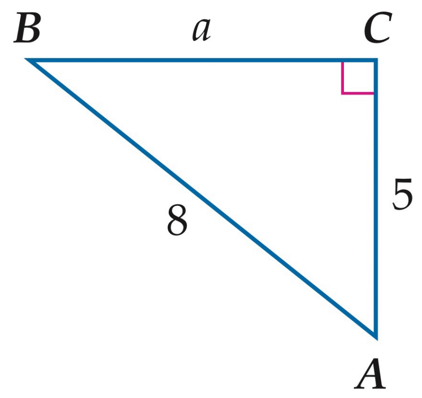
$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

مجال أيِّ دالّة مثلَّثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادّة θ في المثلَّث القائم الزاوية؛ لذا فإن قيم الدوالّ المثلَّثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادّة وليس على أطوال أضلاع المثلَّث القائم الزاوية؛ أي أنَّ قيم الدوالّ المثلَّثية للزاوية الحادّة ستبقى كما هي مهما اختلفت أطوال أضلاع المثلَّث.

إيجاد النسب المثلّثية

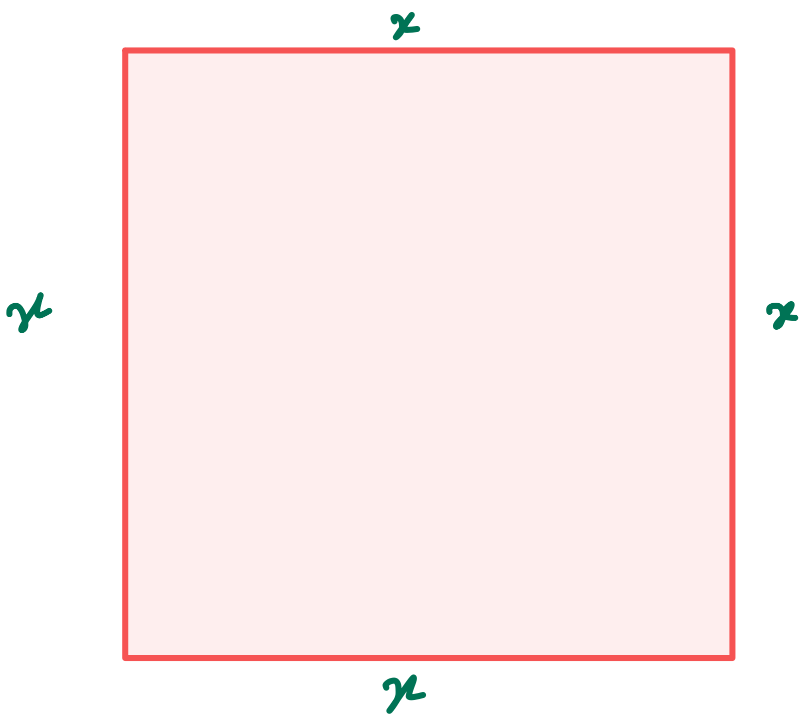
مثال

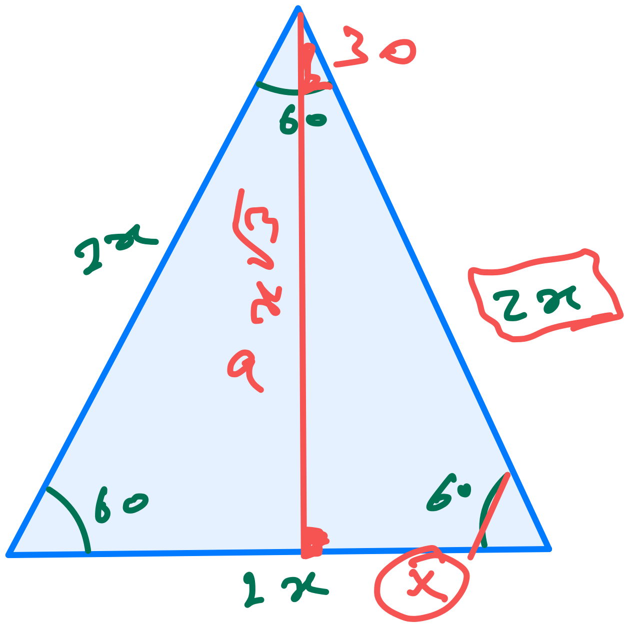
$\angle B$ زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية ،إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$ ، فأوجد قيمة $\tan B$.



تحقق من فهمك

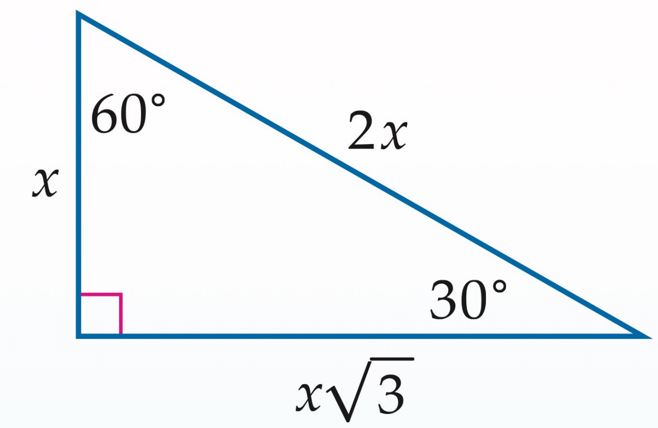
2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$ ، فأوجد قيمة $\sin B$.


x
x
x
x


30
60
2x
2x
$\sqrt{3}x$
a
60
60
2x
x

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $30°-60°-90°$ أن:

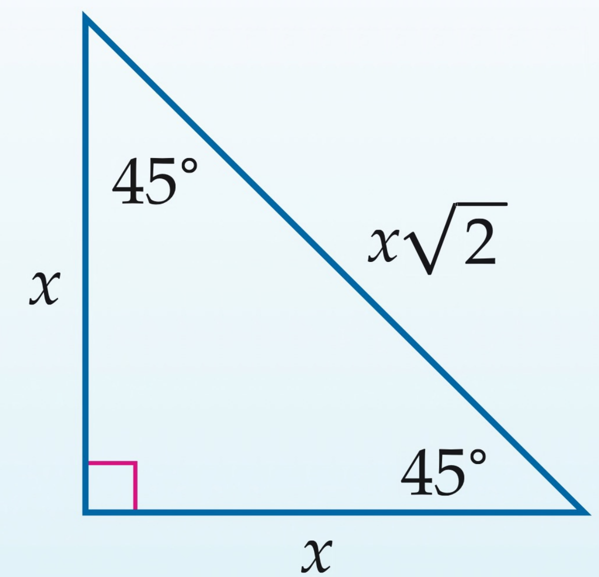


$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$

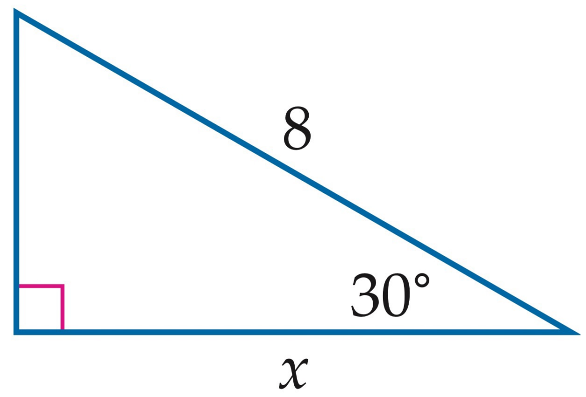
نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $45°-45°-90°$ أن:

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan 45° = 1$



مثال

إيجاد طول ضلع مجهول

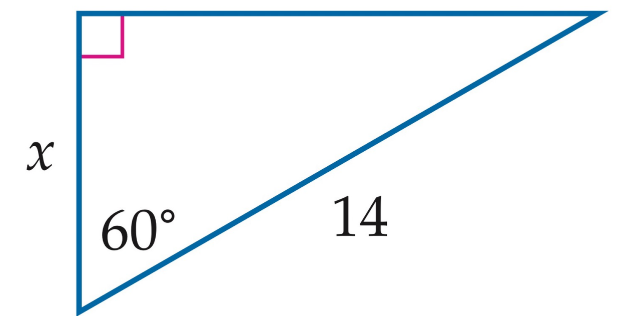


استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

تحقق من فهمك

استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

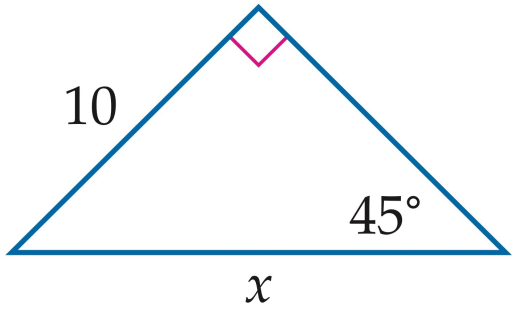
3A)



تحقق من فهمك

استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

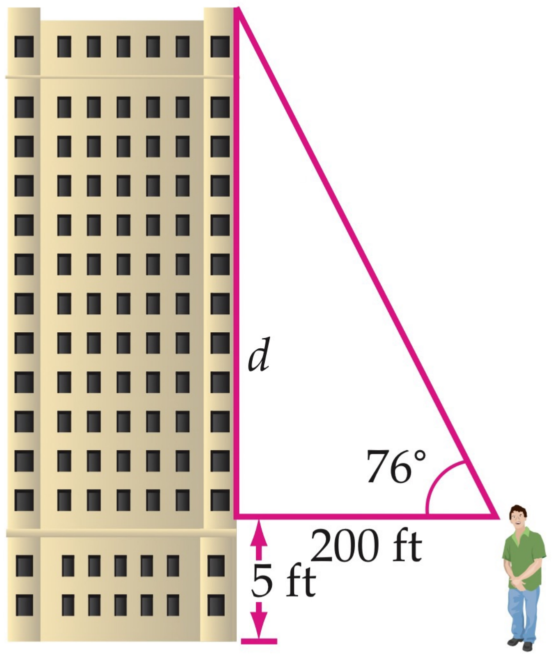
(3B



يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في المثلَّثات التي لا تتضمّن زواياها أيـاً من الزوايا: $60°, 45°, 30°$.

مثال

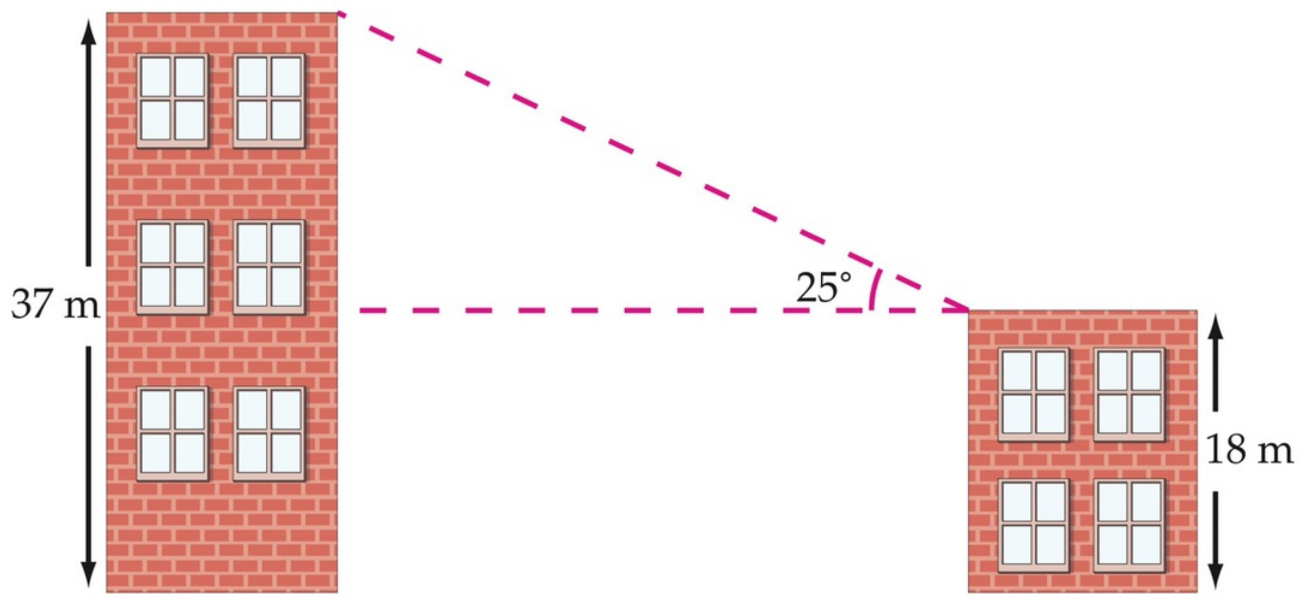
إيجاد طول ضلع مجهول



بناية: لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة **200 ft** مبتعدًا عن قاعدة البناية. واستعمل أداة (مقياس زاوية الميل) لقياس الزاوية المحصورة بين خطِّ نظره المارِّ بقمَّة البناية والخطِّ الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع **5 ft**، فما ارتفاع البناية؟

تحقق من فهمك

4) **بنايات:** في الشكل المجاور بنايتان، ارتفاع إحداهما $18\,m$، وارتفاع الأخرى $37\,m$، ولقياس المسافة الأفقية بينهما، وَضَعَ سعد أداة (مقياس زاوية الميل) على قمَّة البناية الصغرى، فوجد أن قياس الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي بين البنايتين والخط المارِّ من الأداة إلى قمة البناية الكبرى هو 25°. فما المسافة الأفقية بين البنايتين؟



مفهوم أساسي — معكوس النسب المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيبها يساوي x، فإن: **معكوس جيب** x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\sin A = x$ ، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: **معكوس جيب تمام** x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\cos A = x$ ، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وظلّها يساوي x، فإن: **معكوس ظل** x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\tan A = x$ ، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

قراءة الرياضيات

معكوس النسب المثلَّثية

تُقرأ العبارة $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x، وتعني: الزاوية التي جيبها x، يشبه هذا الرمز رمز الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$. كن حذرًا ولا تخلط هذا الرمز مع رمز الأُسِّ السالب؛ $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$.

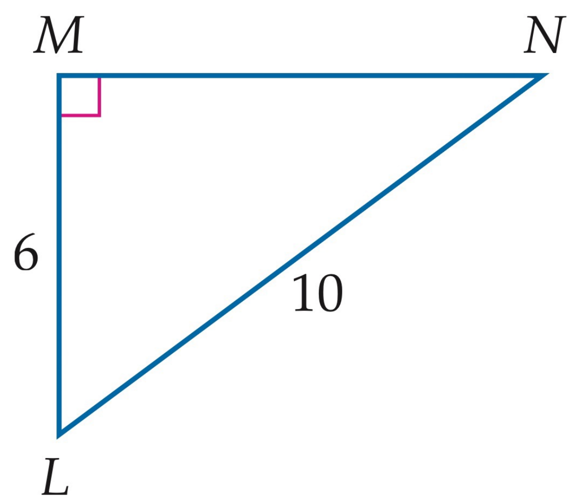
إذا علمت الجيب، أوجيب التمام أوالظل لزاوية حادّة، فإنه يمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد قياس هذه الزاوية والذي هو معكوس النسبة المثلَّثية المعلومة.

إيجاد قياس زاوية مجهولة

مثال

أوجد قياس كلِّ زاوية مما يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

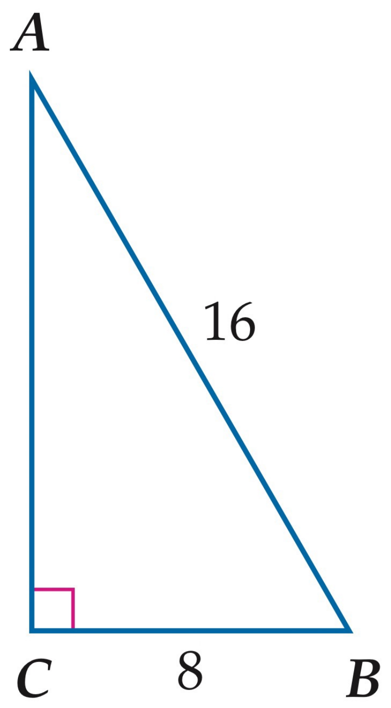
$\angle N$ (a



إيجاد قياس زاوية مجهولة

مثال

أوجد قياس كلِّ زاوية مما يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

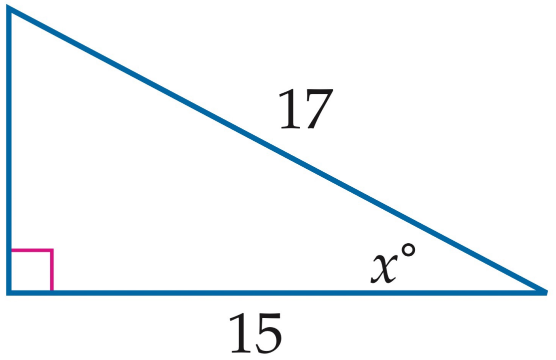


b) $\angle B$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

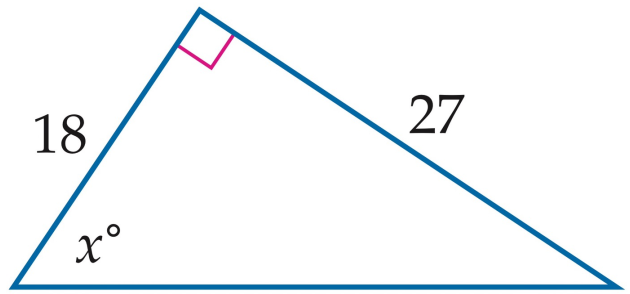
(5A



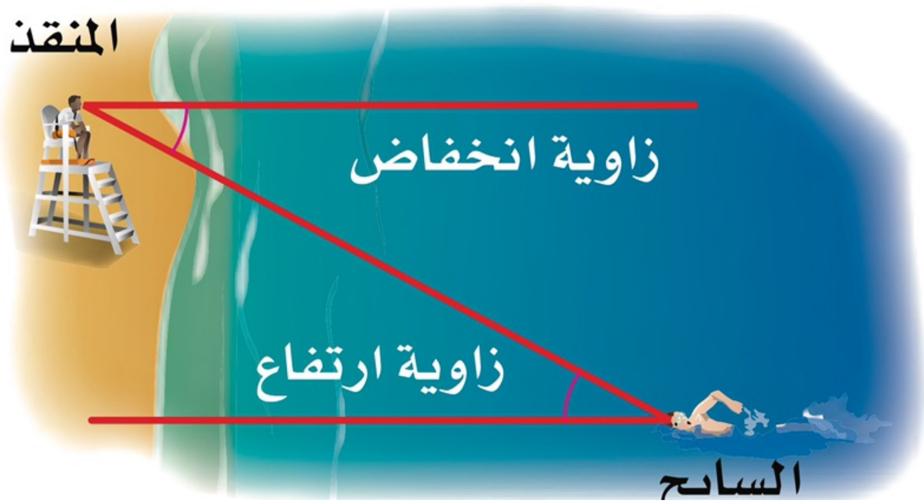
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

5B)



في الشكل المجاور، تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر السابح إلى المنقذ والخطِّ الأفقي له **زاوية الارتفاعِ**. كما تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر المنقذ إلى السابحِ والخطِّ الأفقي له **زاويةَ الانخفاضِ**.



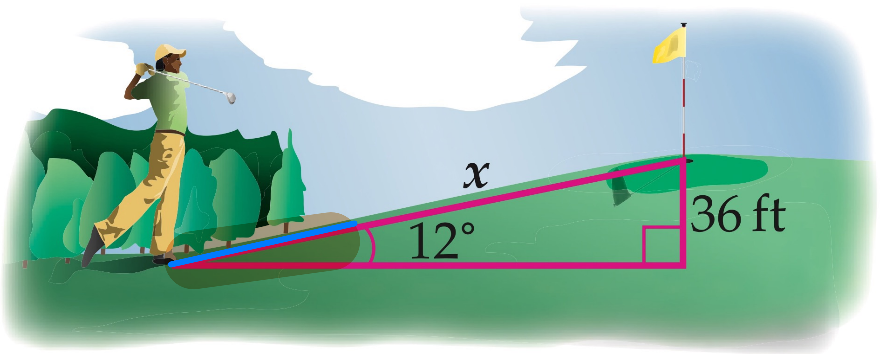
إرشادات للدراسة

زوايا الارتفاع والانخفاض

زاويتا الارتفاع والانخفاض للحالة الواحدة متطابقتان؛ لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لخطين متوازيين .

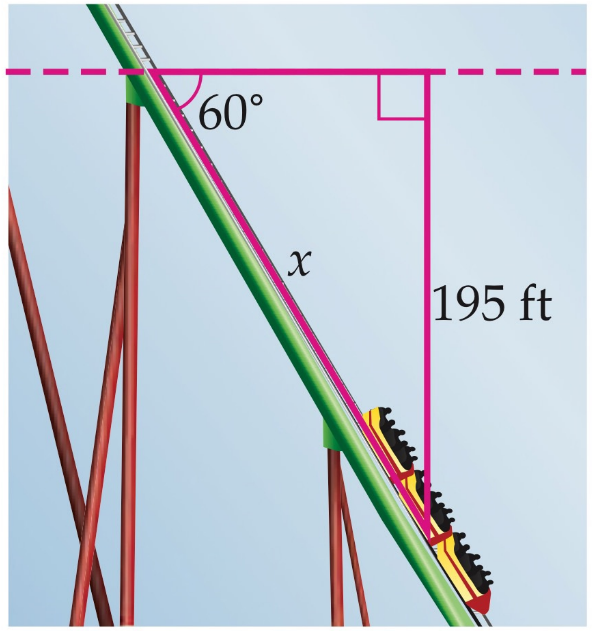
استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض

مثال



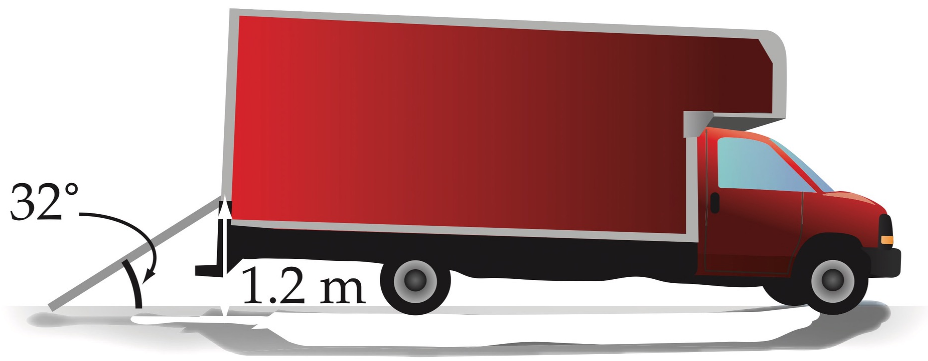
a) **لعبة الجولف:** يقف لاعب جولف أسفل تَلّ، وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التلِّ 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التلِّ عن الحفرة هي 12°، فأوجد المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة.

مثال



b) **العربة الدوارة:** قياس زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوّارة في إحدى مدن الألعاب هي $60°$. وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. أوجد طول هذا الجزء من المسار.

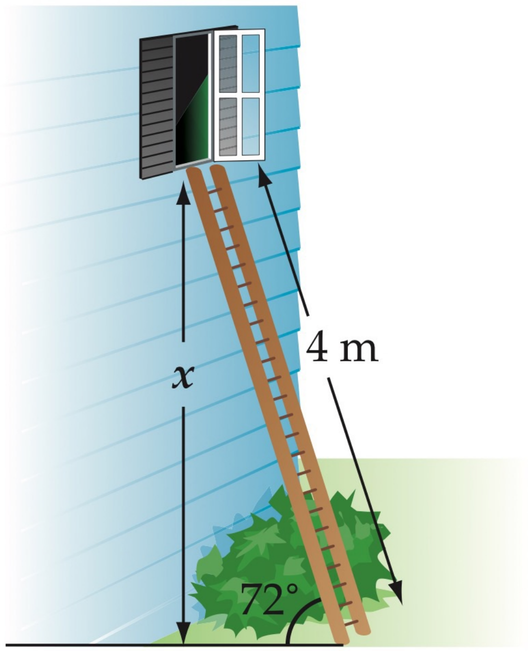
تحقق من فهمك



6A) **تفريغ حمولة :** استُعمِل سطحٌ مائل لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها °32. إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض 1.2 m، فأوجد طول السطح المائل.

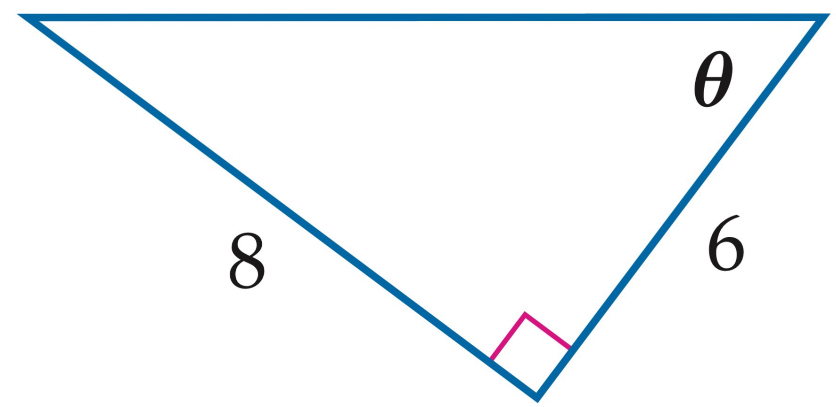
تحقق من فهمك

6B) **سلالم:** سُلَّمٌ طوله 4m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها $72°$. ما ارتفاع قمَّة السلَّم عن الأرض؟



تأكد

أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستّ للزاوية θ



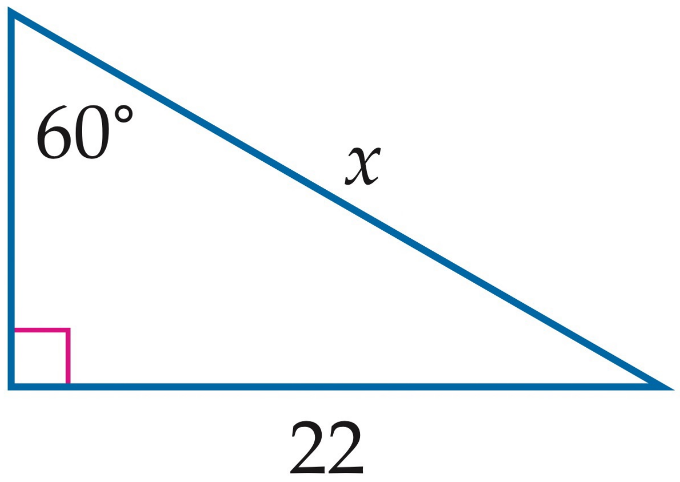
تأكد

معتبرًا $\angle A$ زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، أجب عما يأتي:

3) إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$؟

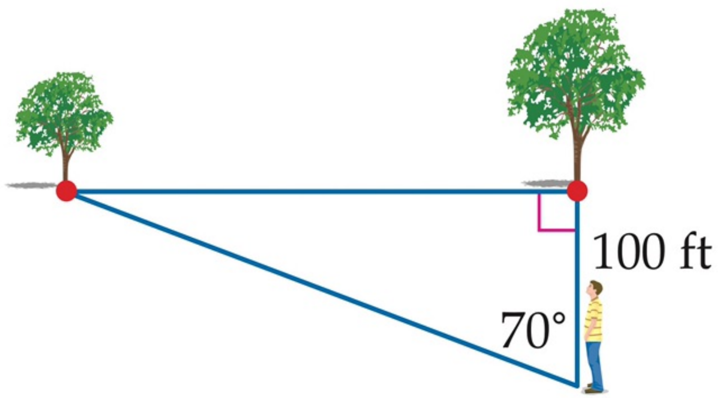
تأكد

استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x ،



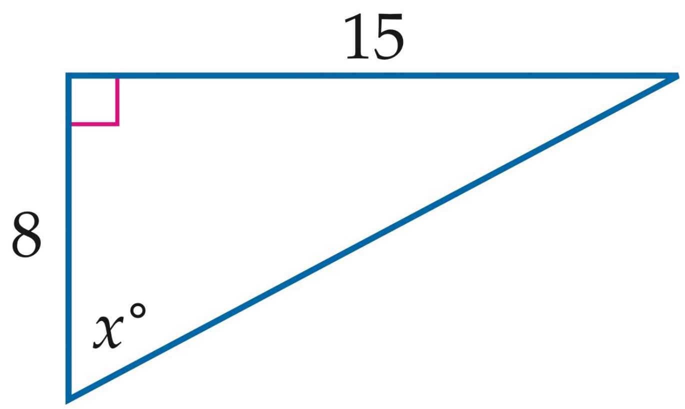
تأكد

أشجار: يقف عبدالله ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرَّك مبتعدًا عن مكانه مسافة 100 ft، في مسار عموديّ على الخطّ الواصل بين الشجرتين، ومشكّلًا معهما زاوية قياسها °70 ، فما البُعد بين الشجرتين؟



تأكد

أوجد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



تدرب

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

39) $\cos A = \frac{3}{19}$

40) $\sin N = \frac{9}{11}$

43) $\tan G = 0.125$

تدرب

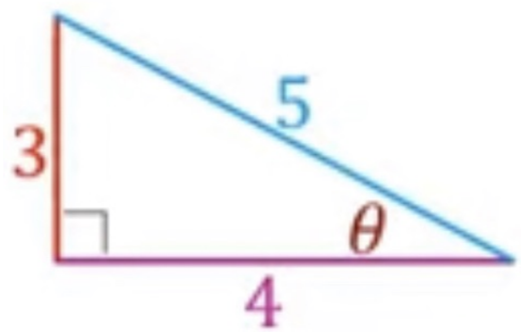
في $\triangle ABC$ ، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المُعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(47 $m\angle A = 36°, a = 12$

(48 $m\angle B = 31°, b = 19$

تحصيلي

من الشكل المجاور: $\sec\theta - \tan\theta$ تساوي ..



Ⓐ $\frac{3}{4}$

Ⓑ $\frac{1}{2}$

Ⓒ $\frac{5}{4}$

Ⓓ 2

تحصيلي

إذا كان $\sec\theta = \frac{13}{12}$ فما قيمة $\sin\theta$ ؟

Ⓐ $\frac{5}{13}$

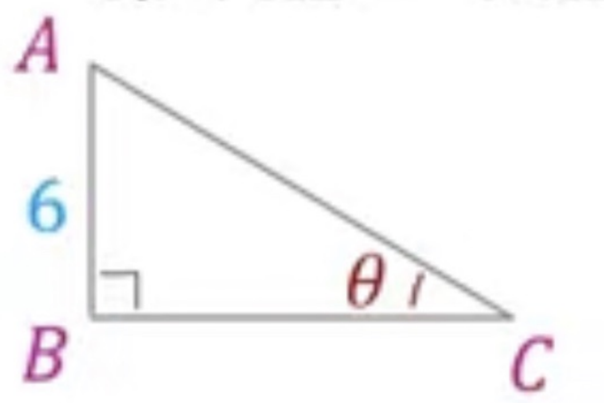
Ⓑ $\frac{12}{13}$

Ⓒ $\frac{13}{12}$

Ⓓ $\frac{13}{5}$

تحصيلي

إذا كانت مساحة المثلث في الشكل المجاور تساوي $27\ \text{cm}^2$ و $AB = 6\ \text{cm}$ ؛ فما قيمة $\tan\theta$ ؟



(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$