

التوزيعات ذات الحدين

المضردات:

تجربة ذات الحدين
binomial experiment

التوزيع ذو الحدين
binomial distribution

فيما سبق:

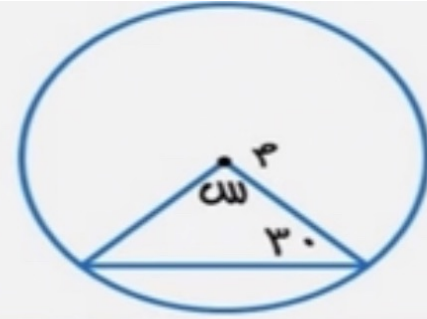
درست استعمال نظرية ذات
الحدين. (مهارة سابقة)

والآن:

- أميز تجربة ذات الحدين.
- أجد الاحتمالات باستعمال
التوزيع ذي الحدين
ومفكوكه.



قدرات



أوجد قيمة س

١٢٠

د

٩٠

٤٠

٨٠

٦٠

٦٠

١



رابط الدرس الرقمي

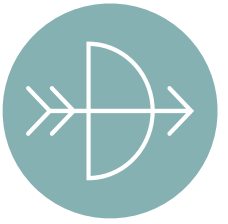


www.ien.edu.sa



في لعبة الكرة الطائرة تبين أن اللاعب سلمان ينجح في لعب الإرسال الساحق الذي لا يصدده الخصم في 36% من محاولاته وبذلك يحصل فريقه على نقطة في كل مرة ينجح فيها.





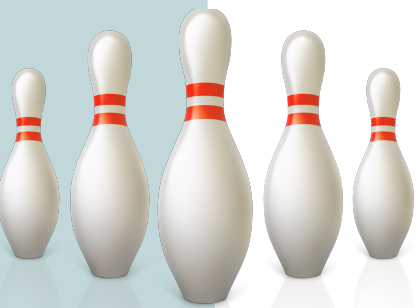
التوزيع ذو الحدين كثير من التجارب الاحتمالية يكون لها نتيجتان فقط؛ نجاح أو فشل أو يمكن جعلها كذلك. فمثلاً في مسائل الاختيار من متعدد التي لها 5 إجابات، يمكن تصنيف نتائج الإجابة عن كل فقرة إلى صح، أو خطأ، ويمكن تصنيف نتائج دواء طبي على أنه فعال أو غير فعال.

مفهوم أساسي

تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

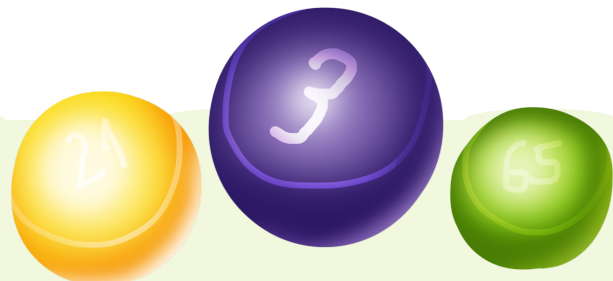
- يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة (المرات).
- كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان؛ نجاح S ، أو فشل F .
- $P(S)$ ويرمز له بالحرف p هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ ويرمز له بالحرف q هو نفسه في كل محاولة ويساوي $1 - p$.
- ويُمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.





حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

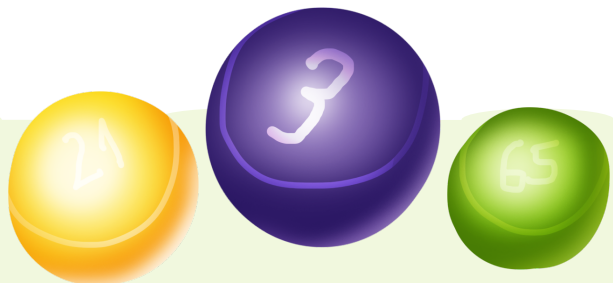
- (a) تُبيّن نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية. إذا تم اختيار 6 طلاب عشوائيًا، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة؛ وكان المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الطلاب الذين يملكون الحاسبة البيانية، فإن:





حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

(b) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، وخصّص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض. سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة ذات اللون الأخضر.

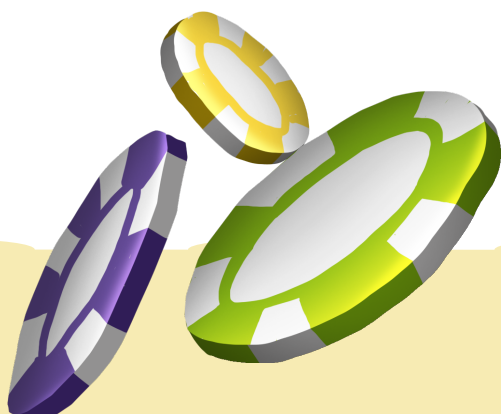


حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

تحقق من فهمك



(1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

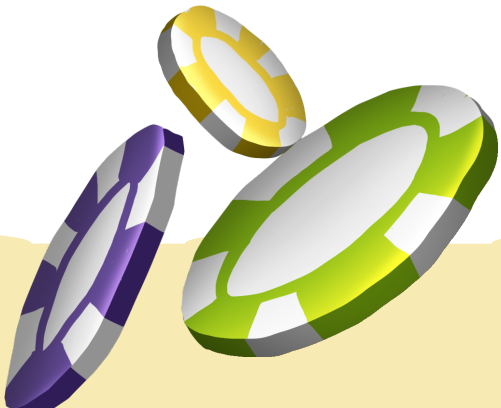


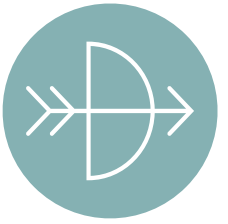


تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

(1B) أجب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة.





يُسمى توزيع النتائج المتوقعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيع ذات الحدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة ${}_nC_X p^X q^{n-X}$ التي تمثل حدًا في مفكوك $(p + q)^n$.

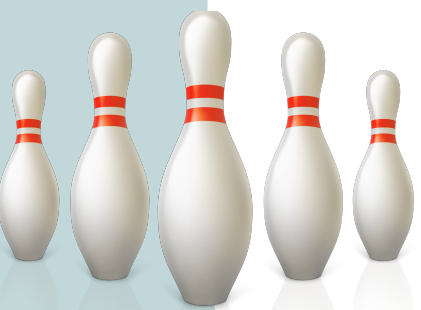
مفهوم أساسي

صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(X) = {}_nC_X p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!X!} p^X q^{n-X}$$

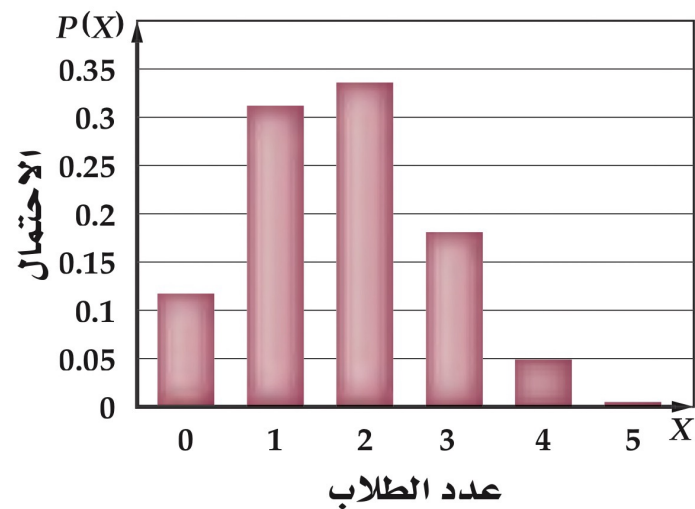
حيث p احتمال النجاح، و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.



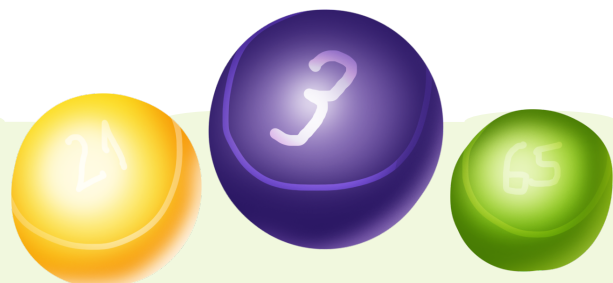


اختبار: في اختبار نهائي، أكد 35% من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلاب عشوائيًا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم عن السؤال، فكوّن جدولًا للتوزيع ذي الحدين، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلاب على الأقل عن السؤال بنعم.

عدد الذين أدوا الاختبار بشكل اعتيادي



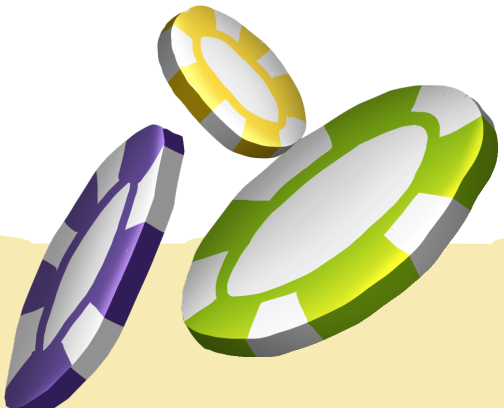
X	P(X)
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005

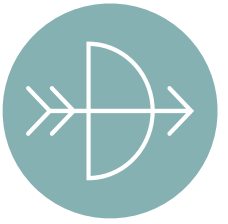


تحقق من فهمك



(2) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 خريجين عشوائيًا، وتم سؤالهم عمّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكّون التوزيع ذا الحدين، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجب أقل من 4 طلاب بنعم.





تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي

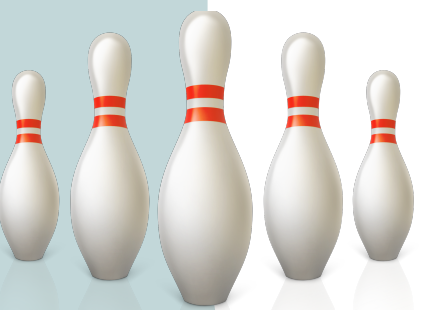
المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

يحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي X في التوزيع ذي الحدين بالصيغ الآتية:

$$\mu = np \quad \text{المتوسط}$$

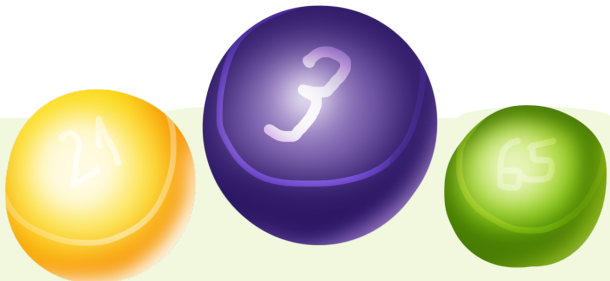
$$\sigma^2 = npq \quad \text{التباين}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq} \quad \text{الانحراف المعياري}$$





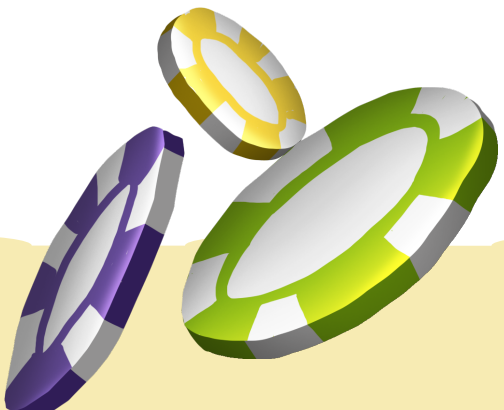
اختبار: بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال 2 . أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ، ثم فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

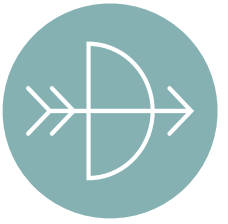


تحقق من فهمك



(3) **كليات:** أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2 ، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.



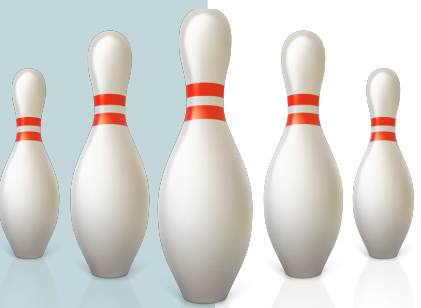


عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة ذات الحدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدين.

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

مفهوم أساسي

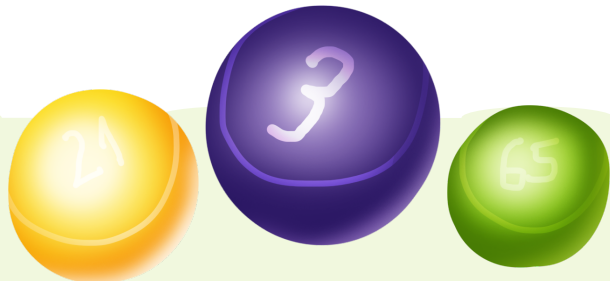
في التوزيع ذي الحدين عندما تُمثّل n عدد المحاولات، واحتمال النجاح p ، واحتمال الفشل q ، ويكون $n p \geq 5, n q \geq 5$ ، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = np$ ، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.



تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

أشارت دراسة سابقة إلى أن 64% من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفذ بلال دراسة مسحية على 300 من هؤلاء الخريجين اختارهم عشوائيًا. ما احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة؟

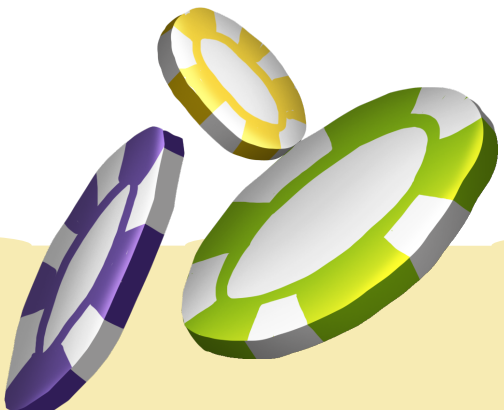
مثال



تحقق من فهمك



(4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتم الدراسة السابقة. ما احتمال ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية؟

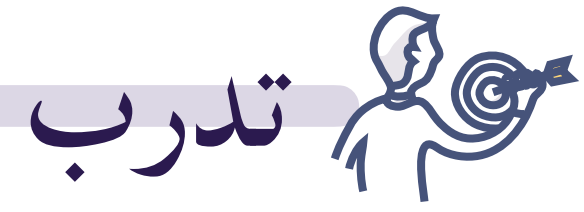


تدرب



(1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.





كّون التوزيع ذا الحدين لكلّ متغير عشوائي مما يأتي، ومثله بالأعمدة، ثم
أوجد المتوسط، وفسّر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين،
والانحراف المعياري. (المثالان 2, 3)

(5) إذا كان % 89 من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس
يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، وتم اختيار 5 طلاب عشوائياً من
هذه المدرسة، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم
الوطني.



(33) اختبار: تقدّمت سمر لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل، لكنها أجابت عن الأسئلة من خلال التخمين (دون معرفة علمية بالموضوع)، ما احتمال أن تحصل على:

(a) 7 أسئلة صحيحة الإجابة؟

(b) 9 أسئلة صحيحة الإجابة؟

(c) 0 سؤال صحيح الإجابة؟

(d) 3 أسئلة صحيحة الإجابة؟

(34) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية 90% ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أُجريت العملية ثلاث مرات؟

(B) 0.1

(A) 0.001

(D) 0.999

(C) 0.9



تخصيلي

كسب لاعب 50% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية، ما احتمال أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة؟

① $\frac{5}{16}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{5}$

④ 1